第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1602-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.4,April,2006

具有广义协变的包含重力场贡献的重力场方程[*]

娄太平[†]

(东北大学材料与冶金学院,沈阳 110004)

(2005 年 5 月 10 日收到;2005 年 10 月 21 日收到修改稿)

利用半度规 $\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 表象的数学工具定义一个对广义坐标具有协变形式的重力场矢势函数 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}\equiv-c\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$,给出一个具有广义协变的包含重力场贡献的重力场方程 $R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}R/2+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi G(T_{\mu\nu}^{(\mathrm{I})}+T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})})/c^4$,这里 Λ 为 Einstein 宇宙常数,$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{I})}$,$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ 分别代表重力场源纯物质部分和纯重力场部分的能量-动量张量.纯重力场部分的能量-动量张量表述为 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}=c^2(D_{\mu\rho}^{(\alpha)}D_{\nu(\alpha)}^{\rho}-g_{\mu\nu}D_{\tau\gamma}^{(\alpha)}D_{(\alpha)}^{\tau\gamma}/4)/4\pi G$,其中 $D_{\mu\nu}^{(\alpha)}\equiv\omega_{\mu;\nu}^{(\alpha)}-\omega_{\nu;\mu}^{(\alpha)}$.还研究和讨论了球对称静态重力场、质量缺失问题及重力场的量子化问题.

关键词:重力场方程,协变形式,能量-动量张量,量子化

PACC:0420,0460,0470

1. 引 言

Einstein 广义相对论深刻地揭示了时间、空间和运动物质之间内在的关系.然而在一些特殊重力场精确解中存在不能消除的奇点,像具有球对称静态重力场 Schwarzschild 外部解[1—3] 及匀速转动重力场外部解[4] 等.另外,用广义相对论处理宇宙演化解中,存在与直接观测到的质量密度相矛盾的结论,即质量缺失问题[5—7].Penrose[8] 和 Hawking[9] 认为只要关于物质、能量以及因果性一些合理物理条件成立,在 Einstein 广义相对论中就不可避免存在着奇点.在这类奇点处,时空流行达到尽头,像在星体中引力坍缩终止于黑洞中心奇点就是这样的.在广义相对论中由于不知道奇点所遵循的规律,物理学规律(包括广义相对论)将随着奇点出现而失效.一般认为,出现这种运动终止于奇点的现象反映了广义相对论重力场理论某种不完善,并不一定是客观世界所固有的.当前,有关如何避免这类奇点及探索和解释质量缺失问题是一个活跃的领域.Qian[10] 和 Lou[11,12] 提出通过将重力矢势或重力场强引入到广义相对论中修改 Einstein 重力场方程方法,确实消除了一些特殊重力场解中的奇点,但由于引入的重力矢势或重力场强不具有广义协变性,给出修改的重力场方程也不具有协变性,因此失去一般性.本文将采用熟悉的半度规表象数学工具定义一个对广义坐标具有协变形式的重力场矢势函数,构造出具有协变形式的属于重力场源一部分的纯重力场部分能量-动量张量,给出一个包含重力场贡献具有广义协变的重力场方程,同时对重力场量子化进行了讨论.

2. 广义协变的包含重力场贡献的重力场方程

我们知道四维黎曼空间度规张量 $g_{\mu\nu}$ 可用非对称半度规元素 $\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 来表述,$\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 被定义为[13—15]

$$g_{\mu\nu}=G_{(\alpha\beta)}\lambda_{\nu}^{(\alpha)}\lambda_{\nu}^{(\beta)}. \tag{1}$$

这里 $G_{(\alpha\beta)}$ 代表局域惯性时空(或称标架表象)的度规.在广义坐标系中,半度规 $\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 对广义坐标指数 μ 是协变的,而对指标 α 是一个标量函数.$\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 的基本性质可表述为

$$\begin{aligned}\lambda_{(\alpha)}^{\mu}&=g^{\mu\nu}\lambda_{\nu(\alpha)},\\ \lambda_{(\alpha)}^{\mu}\lambda_{\mu}^{(\beta)}&=\delta_{(\alpha)}^{(\beta)},\\ \lambda_{(\alpha)}^{\mu}\lambda_{\nu}^{(\alpha)}&=\delta_{\nu}^{\mu}.\end{aligned} \tag{2}$$

可以看到,$\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 无论对协变指标还是对标架指标都是正交归一化的,所以也称正交标架.

由于重力场唯一由度规张量所描述,因此可等

---

* 国家自然科学基金(批准号:50274030)和辽宁省自然科学基金(批准号:20032027)资助的课题.

† E-mail:loutaiping@yahoo.com.cn

价由半度规元素 $\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$ 来唯一描述. 现定义对广义坐标 μ 是协变的重力场矢势函数为

$$\omega_{\mu}^{(\alpha)} \equiv -c\lambda_{\mu}^{(\alpha)}. \tag{3}$$

根据文献[11,12]，定义一个对广义坐标 μ 和 ν 具有协变性的重力场反对称张量，

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{(\alpha)} &\equiv \omega_{\mu;\nu}^{(\alpha)} - \omega_{\nu;\mu}^{(\alpha)} \\ &= \frac{\partial\omega_{\mu}^{(\alpha)}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\omega_{\nu}^{(\alpha)}}{\partial x^{\mu}}, \end{aligned} \tag{4}$$

通过类比电磁理论，一个属于重力场源具有广义协变性的纯重力场部分能量-动量张量可被表示为

$$T_{\mu\nu}^{(\text{II})} = \frac{c^2}{4\pi G}\left(D_{\mu\rho}^{(\alpha)}D_{\nu(\alpha)}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}D_{\tau\gamma}^{(\alpha)}D_{(\alpha)}^{\tau\gamma}\right). \tag{5}$$

将方程(5)引入到 Einstein 的重力场方程中，得到具有广义协变性包含重力场贡献的重力场方程为[11,12]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu}^{(\text{I})} + T_{\mu\nu}^{(\text{II})}\right). \tag{6}$$

这里 $T_{\mu\nu}^{(\text{I})}$ 代表重力场源纯物质部分的能量-动量张量. 方程(6)与 Einstein 的重力场方程的差异在于对物质的能量-动量张量的解释不同. 在 Einstein 的重力场方程中，系统的能量-动量张量仅看作是由纯物质提供的，重力场中不含有产生重力场源的物质. 而方程(6)则认为，作为产生重力场源的一部分物质应像电荷一样储存在重力场中，另一部分则作为可直接被观测的纯物质形式存在. 由于属于重力场源系统的能量-动量张量必须守恒，因此下列的方程必须被满足：

$$T_{;\nu}^{(\text{I})\mu\nu} + T_{;\nu}^{(\text{II})\mu\nu} = 0. \tag{7}$$

上述方程表明，由于系统的能量-动量张量是由两部分组成，即纯物质部分和纯重力场部分，因此纯物质部分与纯重力场部分的能量-动量张量一般是不单独守恒的. 这也表明物质系统的能量-动量张量本身蕴含着其运动过程.

由方程(4)可知 $D_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ 满足如下方程：

$$D_{\mu\nu,\tau}^{(\alpha)} + D_{\nu\tau,\mu}^{(\alpha)} + D_{\tau\mu,\nu}^{(\alpha)} = 0. \tag{8}$$

若引入一个能量流密度

$$J^{\mu(\alpha)} = \frac{c^2}{4\pi G}D_{;\nu}^{\mu\nu(\alpha)}, \tag{9}$$

显然有关系

$$J_{;\mu}^{\mu(\alpha)} = 0. \tag{10}$$

由方程(5)，(7)和(9)，可得

$$T_{;\nu}^{(\text{II})\mu\nu} = -D^{\mu\nu(\alpha)}J_{\nu}(\alpha), \tag{11}$$

或

$$T_{;\nu}^{(\text{I})\mu\nu} = D^{\mu\nu(\alpha)}J_{\nu(\alpha)}. \tag{12}$$

由上述方程可看出，方程组(8)—(12)完全类似于 Maxwell 方程组在重力场中的形式.

3. 弱重力场中的微分方程组

在笛卡尔坐标系中，对于一个自由的 $T_{\mu\nu}^{(\text{II})}$ 张量场($T_{\mu\nu}^{(\text{I})} \equiv 0$)满足下列关系：

$$D_{;\nu}^{\mu\nu(\alpha)} = 0. \tag{13}$$

因此，在弱重力场中，方程(8)和(9)可近似改写为

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot \boldsymbol{A}^{(\alpha)} = 0, \\ &\nabla\times \boldsymbol{B}^{(\alpha)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}^{(\alpha)}}{\partial t}, \\ &\nabla\cdot \boldsymbol{B}^{(\alpha)} = 0, \\ &\nabla\times \boldsymbol{A}^{(\alpha)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}^{(\alpha)}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{14}$$

这里，

$$\boldsymbol{A}^{(\alpha)} = \left(A_1^{(\alpha)}, A_2^{(\alpha)}, A_3^{(\alpha)}\right),$$
$$\boldsymbol{B}^{(\alpha)} = \left(B_1^{(\alpha)}, B_2^{(\alpha)}, B_3^{(\alpha)}\right),$$

其中，

$$\begin{aligned} A_1^{(\alpha)} &= D^{01(\alpha)}, \\ A_2^{(\alpha)} &= D^{02(\alpha)}, \\ A_3^{(\alpha)} &= D^{03(\alpha)}, \\ B_1^{(\alpha)} &= D^{23(\alpha)}, \\ B_2^{(\alpha)} &= D^{31(\alpha)}, \\ B_3^{(\alpha)} &= D^{12(\alpha)}. \end{aligned} \tag{15}$$

显然，方程组(14)完全类似于 Maxwell 方程组的微分形式. 如果引入条件

$$\omega_{\mu,\mu}^{(\alpha)} = 0, \tag{16}$$

方程(14)可改写为

$$\begin{aligned} &\nabla^2\boldsymbol{A}^{(\alpha)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}{\partial t^2} = 0, \\ &\nabla^2\boldsymbol{B}^{(\alpha)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}^{(\alpha)}}{\partial t^2} = 0, \\ &\nabla^2\omega_{\mu}^{(\alpha)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\omega_{\mu}^{(\alpha)}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

方程(17)一个平面波解可表述为[13]

$$\omega_{\mu}^{(\alpha)} = e_{\mu}^{(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\sigma}x^{\sigma}}. \tag{18}$$

式中 $\mathrm{e}_{\mu}^{(\alpha)}$ 对指标 μ 是一个极化矢量. 定义一个对称的张量为

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} &= \omega_{\mu}^{(\alpha)}\lambda_{\nu(\alpha)} + \omega_{\nu}^{(\alpha)}\lambda_{\mu(\alpha)} \\ &= \left(e_{\mu}^{(\alpha)}\lambda_{\nu(\alpha)} + e_{\nu}^{(\alpha)}\lambda_{\mu(\alpha)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\sigma}x^{\sigma}} = e_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\sigma}x^{\sigma}}. \end{aligned} \tag{19}$$

式中 $e_{\mu\nu}$ 代表一个对称的极化张量. 方程(19)表明,在弱重力场条件下一个自由的 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ 张量场是一个具有质量为零、自旋为 $2\hbar$ 的横波[13].

4. 重力场的量子化

我们尝试用重力场的矢势 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}$ 作为算符来描述 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ 张量场. 对于一个自由的 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ 张量场,即 $D^{\mu\nu(\alpha)}_{;\nu}=0$,通过类比电磁理论,其相应的 Lagrange 密度函数可表示为[16]

$$\mathfrak{P}=-\frac{c^2\sqrt{-g}}{16\pi G}\left[D_{\mu\nu}^{(\alpha)}D^{\mu\nu}_{(\alpha)}+2\eta_{(\alpha)}\eta^{(\alpha)}\right],\qquad(20)$$

式中

$$\eta^{(\alpha)}=\omega_{\mu;\mu}^{(\alpha)}.\qquad(21)$$

利用标准的方法,我们可得到 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}$ 的共轭动量为

$$\pi^0_{(\alpha)}(x,t)=\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\omega_{0\mathfrak{D}}^{(\alpha)}}=-\frac{c^2\sqrt{-g}}{4\pi G}\eta_{(\alpha)},$$

$$\pi^k_{(\alpha)}(x,t)=\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\omega_{k\mathfrak{D}}^{(\alpha)}}=-\frac{c^2\sqrt{-g}}{4\pi G}D^{0k}_{(\alpha)}$$

$$(k=1,2,3).\qquad(22)$$

比较电磁场的量子化理论,可以给出 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}$ 和 $\pi^{\nu}_{(\alpha)}$ 对指标 μ 和 ν 的对易关系,

$$[\omega_{\mu}^{(\alpha)}(x,t),\omega_{\nu(\alpha)}(x',t)]=0,$$

$$[\pi^{\mu(\alpha)}(x,t),\pi^{\nu}_{(\alpha)}(x',t)]=0,$$

$$[\pi^{\mu}_{(\alpha)}(x,t),\omega_{\nu}^{(\alpha)}(x',t)]=-\mathrm{i}\hbar g^{\mu}_{\nu}\delta^3(x-x').\qquad(23)$$

方程(23)表明,一个自由的 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ 张量场可通过标准的方法量子化. 由于重力场可由 $\omega_{\mu}^{(\alpha)}$ 完全描述,所以对于一个自由的重力场也能够通过方程(23)的对易关系量子化.

5. 实例讨论

5.1. 球对称静态重力场

一个球对称静态重力场的度规可表述为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\\&=-a\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\theta^2\\&\quad-r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+bc^2\mathrm{d}t^2,\end{aligned}\qquad(24)$$

式中 a 和 b 仅是 r 的函数. 对于局域惯性时空(或称标架表象)的度规 $G_{(\alpha\beta)}$ 可表示为

$$\begin{aligned}&G_{(00)}=1,\\&G_{(11)}=-1,\\&G_{(22)}=-r^2,\\&G_{(33)}=-r^2\sin^2\theta,\\&G_{\alpha\beta}=0\quad(\alpha\neq\beta).\end{aligned}\qquad(25)$$

由方程(1),(2),(24)和(25),可得到非零的半度规为

$$\begin{aligned}&\lambda_0^{(0)}=\sqrt{b},\\&\lambda_1^{(1)}=\sqrt{a},\\&\lambda_2^{(2)}=1,\\&\lambda_3^{(3)}=1,\end{aligned}\qquad(26)$$

则非零的 $D_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ 为

$$\begin{aligned}&D_{01}^{(0)}=-D_{10}^{(0)}=-\frac{cb'}{2\sqrt{b}},\\&D^{01}_{(0)}=-D^{10}_{(0)}=\frac{cb'}{2a\sqrt{b^3}}.\end{aligned}\qquad(27)$$

这里 $b'=\partial b/\partial r$.

忽略宇宙常数的影响,将方程(27)代入方程(5),解方程(6),可获得球对称静态的重力场的度规为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\frac{1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\theta^2\\&\quad-r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+\left(1-\frac{m}{r}\right)^2c^2\mathrm{d}t^2.\end{aligned}\qquad(28)$$

这与文献[10,11]的结果是一致的. 这表明协变的包含重力场贡献的重力场方程能够消除重力场中的奇点.

5.2. 质量缺失问题

一个符合宇宙学原理的时空可由 Robertson-Walker 度规描述[13],

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}\\&=\mathrm{d}t^2-a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\kappa r^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right).\end{aligned}\qquad(29)$$

对于局域惯性时空(或称标架表象)的度规 $G_{(\alpha\beta)}$,在三维常曲率空间维 κ 中可表示为

$$\begin{aligned}&G_{(00)}=1,\\&G_{(11)}=-(1-\kappa r^2)^{-1},\\&G_{(22)}=-r^2,\\&G_{(33)}=-r^2\sin^2\theta,\\&G_{(\alpha\beta)}=0\quad(\alpha\neq\beta).\end{aligned}\qquad(30)$$

由方程(1)，(2)，(29)和(30)，可得到非零的半度规为

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(0)} &= 1, \\ \lambda_1^{(1)} &= a(t), \\ \lambda_2^{(2)} &= a(t), \\ \lambda_3^{(3)} &= a(t). \end{aligned} \tag{31}$$

由方程(3)—(5)和(31)，可获得非零的 $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ 为

$$\begin{aligned} T_{00}^{(\mathrm{II})} &= -3Bg_{00}, \\ T_{11}^{(\mathrm{II})} &= Bg_{11}, \\ T_{22}^{(\mathrm{II})} &= Bg_{22}, \\ T_{33}^{(\mathrm{II})} &= Bg_{33}. \end{aligned} \tag{32}$$

式中 $B = c^4 H^2/8\pi G$，其中 $H = \dot{a}/a$ 是 Hubble 常数，$a = a(t)$，$\dot{a} = \partial a/\partial t$.

符合宇宙学原理，可直接被观察到的纯物质部分的能量-动量张量可表示为[13]

$$\begin{aligned} T_{00}^{(\mathrm{I})} &= -\rho_0 c^2 g_{00}, \\ T_{11}^{(\mathrm{I})} &= P_0 g_{11}, \\ T_{22}^{(\mathrm{I})} &= P_0 g_{22}, \\ T_{33}^{(\mathrm{I})} &= P_0 g_{33}, \\ T_{\mu\nu}^{(\mathrm{I})} &= 0 \qquad (\mu \neq \nu). \end{aligned} \tag{33}$$

因此系统的能量-动量张量可表示为

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\mathrm{I})} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}. \tag{34}$$

由方程(32)—(34)，可给出宇宙平均的质量密度和平均压强分别为

$$\rho = \rho_0 + \frac{3c^2}{8\pi G}\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \rho_0 + \rho_c, \tag{35}$$

$$P = P_0 + \frac{c^4}{8\pi G}\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \tag{36}$$

式中 ρ_c 是宇宙临界质量密度.

方程(35)等号右端第一项是可被观测的质量密度；第二项是纯重力场部分的质量密度，这部分不能直接被观察到，可归结为所谓的暗物质.最近的研究表明，纯物质的密度参数 $\Omega_b = \rho_0/\rho_c \approx 0.05$[6,7]. 因此我们可获得 $\Omega = \rho/\rho_c \approx 1.05$.这表明，采用广义协变的包含重力场贡献的重力场方程(6)处理宇宙演化时，不会出现质量缺失问题.

6. 结　　论

通过引入一个对广义坐标具有协变形式重力场矢势函数，给出了一个包含重力场贡献的具有广义协变的重力场方程.理论分析表明，重力场中的奇异性问题可以消除，物质的缺失问题也可消除.另外，重力场可以通过标准的方法量子化.

[1] Kruskal M D 1960 *Phys. Rev.* **119** 1743

[2] Fransdal C 1959 *Phys. Rev.* **116** 778

[3] Szekeres G 1960 *Publ. Mat.* (Debrecen) **7** 285

[4] Kerr R P 1963 *Phys. Rev. Lett.* **11** 237

[5] Zwicky F 1937 *Phys. Rev.* **51** 679

[6] Spergel D N 2003 *Astrophys. J. Suppl.* **148** 175

[7] Efstathiou G, Maddox S, Sutherland W 1990 *Nature* **348** 705

[8] Penrose R 1965 *Phys. Rev. Lett.* **14** 57

[9] Hawking S W 1966 *Phys. Rev. Lett.* **17** 144

[10] Qian S W 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 377

[11] Lou T P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1657 (in Chinese) [娄太平 2004 物理学报 **53** 1657]

[12] Lou T P 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 18 (in Chinese) [娄太平 2005 物理学报 **54** 18]

[13] Liu L 1987 *General Theory of Relativity* (Beijing: Higher Education Press) pp112—161 (in Chinese) [刘　辽 1987 广义相对论(北京:高等教育出版社)第 112—161 页]

[14] Duan Y S, Zhang J Y 1963 *Acta Phys. Sin.* **19** 11 (in Chinese) [段一士、张敬业 1963 物理学报 **19** 11]

[15] Duan Y S, Zhang J Y 1962 *Acta Phys. Sin.* **18** 17 (in Chinese) [段一士、张敬业 1962 物理学报 **18** 17]

[16] Wu D Y 1983 *Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press) pp160—165 (in Chinese) [吴大猷 1983 量子力学(北京:科学出版社)第 160—165 页]

A covariant gravitational field equation including the contribution of gravitational field*

Lou Tai-Ping†

(*School of Materials and Metallurgy*, *Northeastern University*, *Shenyang* 110004, *China*)

(Received 10 May 2005; revised manuscript received 21 October 2005)

Abstract

Using the four-leg metric tensor $\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$, a gravitational field 4-vector potential for index μ is defined as $\omega_{\mu}^{(\alpha)} \equiv -c\lambda_{\mu}^{(\alpha)}$, and a covariant gravitational field equation that includes the gravitational field contribution is proposed as $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{(\mathrm{I})} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})})/c^4$, where Λ is Einstein's cosmic constant, $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{I})}$ and $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})}$ are energy-momentum tensor of pure matter part and pure gravitational field part, respectively. The covariant energy-momentum tensor of gravitational field that belongs to the part of the gravitational source can be constructed as $T_{\mu\nu}^{(\mathrm{II})} = c^2(D_{\mu\rho}^{(\alpha)}D_{\nu(\alpha)}^{\rho} - g_{\mu\nu}D_{\tau\gamma}^{(\alpha)}D_{(\alpha)}^{\tau\gamma}/4)/4\pi G$, where $D_{\mu\nu}^{(\alpha)} \equiv \omega_{\mu;\nu}^{(\alpha)} - \omega_{\nu;\mu}^{(\alpha)}$. The static spherically symmetric gravitational field, the missing mass and the gravitational field quantization are discussed.

Keywords: gravitational field equation, covariant, energy-momentum tensor, quantization

PACC: 0420, 0460, 0470

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50274030) and the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20032027).

† E-mail: loutaiping@yahoo.com.cn