

# 色噪声驱动的双奇异随机系统的熵流与熵产生\*

谢文贤<sup>1)†</sup> 徐 伟<sup>1)</sup> 蔡 力<sup>2)</sup>

1) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2) 西北工业大学航天学院, 西安 710072)

(2005 年 7 月 5 日收到; 2005 年 11 月 3 日收到修改稿)

讨论一类(非平衡约束下)高斯色噪声驱动的双奇异随机系统对应的 Fokker-Planck 方程, 结合 Shannon 信息熵定义给出此类系统的熵流、熵产生随时间演化的精确表达式. 分析(非平衡约束下)所引入的奇异性强度参数、噪声相关时间与耗散参数的相互作用以及对熵流、熵产生的显著影响.

关键词: 信息熵, 熵流与熵产生, 双奇异随机系统, 高斯色噪声

PACC: 0540, 0520

## 1. 引 言

Shannon 信息熵<sup>[1]</sup>

$$S = - \int P(x, t) \ln P(x, t) dx \quad (1)$$

是研究非平衡态统计物理的有力工具. (1) 式中  $P(x, t)$  是相空间中的连续概率密度函数. Shannon 信息熵统计信息理论发展较为成熟的方面仅限于与时空无关的静态或平衡态. 但从动力系统角度看, 信息熵的动态性是客观的, 非平衡信息熵随时间的演化规律及噪声性质对其影响的研究备受关注<sup>[2-8]</sup>.

另一方面, 熵产生的极值性质研究是近年来熵理论深化的重要课题之一<sup>[3-6]</sup>. 熵作为表征不可逆过程自发趋势的限度, 表现为在一定条件下具有某种极值性质. 本文将研究一类色噪声驱动双奇异随机系统的 Shannon 信息熵流、熵产生问题.

邢修三<sup>[2]</sup>建立 Shannon 信息(熵)的非线性演化方程, 引入统计物理信息并给出其非线性演化方程等, 指明了非平衡信息熵密度随时间的变化率是由其在坐标空间和态变量空间的漂移、扩散和产生三者共同引起的. 原则上非线性演化方程是可以求解的, 但严格的求解却很困难, 因而很难直观地认识信息熵是如何随时间变化而演化的. 而 Bag 等<sup>[3, 4]</sup>探讨

了色噪声或关联白噪声驱动的动力学系统中噪声性质及系统的耗散参数对 Shannon 信息熵流、熵产生的作用. Bag<sup>[5]</sup>和 Goswami 等<sup>[6, 7]</sup>研究了有限记忆耗散性质如何影响信息熵及相关性质, 分别给出(非平衡约束下)一维、二维的 Ornstein-Uhlenbeck 噪声驱动的热力学封闭系统的熵流、熵产生以及熵变上界的解析表达式. 文献[3—8]考虑的是变换<sup>[9]</sup>后 Fokker-Planck (FP) 方程的概率密度一般都可精确解出的几类典型系统, 其熵流、熵产生随时间演化的表达式也可以精确解出, 因而能够直观地分析噪声性质对信息熵的显著影响.

胡岗<sup>[10]</sup>在探讨双奇异随机系统的相变问题时表明随机力的奇异性决定性地影响着随机系统的性质. 当改变这种奇异性的程度, 必然会使系统相关性产生重大变化. 人们自然会问, 奇异性对信息熵及其相关量是否存在影响? 此时, 噪声性质又是如何作用于信息熵的? 目前, 关于(非平衡约束下)色噪声驱动双奇异随机系统的 Shannon 信息熵以及相关性质的问题作者尚未见报道. 本文将结合文献[9, 10]中的变换思路给出该系统的熵流、熵产生的精确表达式并分析(非平衡约束下)所引入的奇异性强度参数、色噪声相关时间与系统耗散参数的相互作用以及对熵流、熵产生的显著影响.

\* 国家自然科学基金(批准号: 30472091, 30332030), 陕西省自然科学基金(批准号: 2003A03)和西北工业大学青年科技创新基金资助的课题.

† E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn

## 2. 色噪声驱动的双奇异随机系统

考虑一个高斯色噪声驱动的线性动力学系统, 其 Langevin 方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma x + |x|^\beta \xi(t) \quad (\gamma > 0), \\ \xi(t) &= 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= \frac{D}{\tau} \exp(-|t-t'|/\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

由于  $x=0$  既是确定性力的奇点, 又是随机力的奇点, 故称 (2) 式为双奇异随机系统. (2) 式中,  $\beta$  为标度随机力在原点的奇异程度的参数,  $\tau$  与  $D$  分别是高斯色噪声  $\xi(t)$  的相关时间与噪声强度.  $\xi(t)$  与高斯白噪声  $\eta(t)$  满足下列关系:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= -\frac{\xi(t)}{\tau} + \frac{\sqrt{D}}{\tau} \eta(t), \\ \eta(t) &= 0, \\ \eta(t)\eta(t') &= 2\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (3)$$

令  $X_1 = x$ ,  $X_2 = \xi$ , 我们可将 (2) (3) 式等效地变为

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -\gamma X_1 + |X_1|^\beta X_2, \\ \dot{X}_2 &= -\frac{X_2}{\tau} + \frac{\sqrt{D}}{\tau} \eta(t). \end{aligned} \quad (4)$$

当  $\beta=0$  时 (2) 式化为加性噪声的问题, 有关熵流、熵产生的结论详见文献 [4]. 这里我们关心的是非平凡的双奇异情形, 即  $\beta < 1$ . 当  $\beta \neq 1$  时, 通过下列变换

$$\begin{aligned} Y_1 &= \begin{cases} |X_1|^{1-\beta} & (X_1 > 0), \\ -|X_1|^{1-\beta} & (X_1 < 0), \end{cases} \\ Y_2 &= X_2, \end{aligned} \quad (5)$$

将 (4) 式化为

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= -\chi(1-\beta)Y_1 + (1-\beta)Y_2, \\ \dot{Y}_2 &= -\frac{Y_2}{\tau} + \frac{\sqrt{D}}{\tau} \eta(t). \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式等效的 FP 方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(Y_1, Y_2, t)}{\partial t} &= \chi(1-\beta) \frac{\partial Y_1 P}{\partial Y_1} - (1-\beta)Y_2 \frac{\partial P}{\partial Y_1} \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{\partial Y_2 P}{\partial Y_2} + \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial^2 P}{\partial Y_2^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

$P(Y_1, Y_2, t)$  是扩维并经 (5) 式变换后相空间的概率密度函数.

## 3. 双奇异随机系统的熵流与熵产生

下面利用 FP 方程 (7) 给出熵流、熵产生定义. 令  $U = aY_1 + Y_2$  [9], 从而方程 (7) 变为

$$\frac{\partial P(U, t)}{\partial t} = -\frac{\partial AP}{\partial U} + B \frac{\partial^2 P}{\partial U^2}, \quad (8)$$

式中,

$$\begin{aligned} A &= -\lambda U, \\ B &= \frac{D}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

这里,

$$\begin{aligned} \lambda U &= a\chi(1-\beta)Y_1 - a(1-\beta)Y_2 + \frac{Y_2}{\tau}, \\ \lambda &= \chi(1-\beta), \\ a &= \frac{1-\tau\chi(1-\beta)}{(1-\beta)\tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

针对形同方程 (8) 的 FP 方程以及信息熵定义 (1) 式, 熵流  $S_t$ 、熵产生  $S_p$  分别定义为 [4,5]

$$S_t = \int P \frac{\partial A}{\partial x} dx, \quad (11)$$

$$S_p = B \int \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (12)$$

从而由 (9)–(12) 式可得双奇异随机系统 (2) 的熵流与熵产生表达式为

$$S_t = -\chi(1-\beta), \quad (13)$$

$$S_p = \frac{2B}{\chi(1-\beta)} \left[ 1 - \exp(-2\chi(1-\beta)t) \right] + \sigma_0 \exp(-2\chi(1-\beta)t), \quad (14)$$

式中  $\sigma_0$  为常数.

由此可见, 通过变换 (5) 式将色噪声驱动的双奇异随机系统 (2) 变为加性色噪声情形, 然后推广文献

[4,5] 中的方法应用到 (7) 式, 可得到双奇异随机系统的熵流、熵产生的精确表达式 (13) (14). 下面我们分析奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  以及系

统的耗散参数  $\gamma$  对熵流  $S_f$ 、熵产生  $S_p$  的影响。

(13) 式表明, 熵流  $S_f$  为负且不依赖于时间  $t$  和噪声相关时间  $\tau$ . 图 1—图 4 中我们取定  $D = 1.0$ ,  $\sigma_0 = 0.5$ . 图 1 和图 2 分别描述了噪声相关时间  $\tau$  以及奇异性强度参数  $\beta$  取不同值时熵产生  $S_p$  随时间  $t$

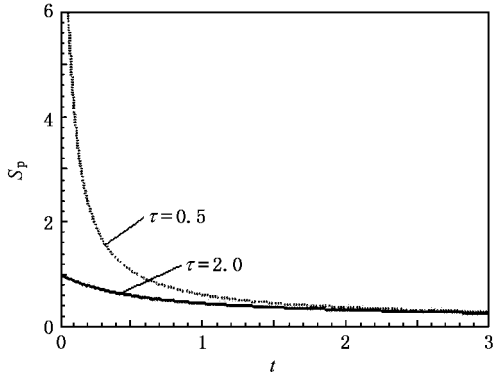


图 1 熵产生  $S_p$  在  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$  时随时间  $t$  的变化

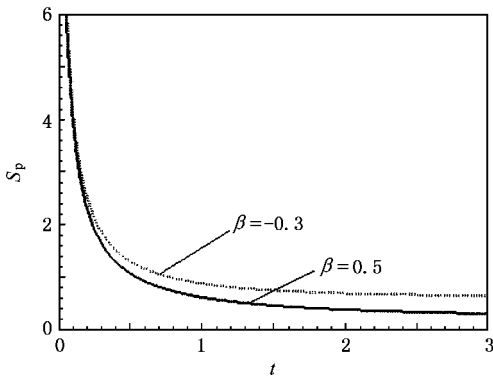


图 2 熵产生  $S_p$  在  $\tau = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$  时随时间  $t$  的变化

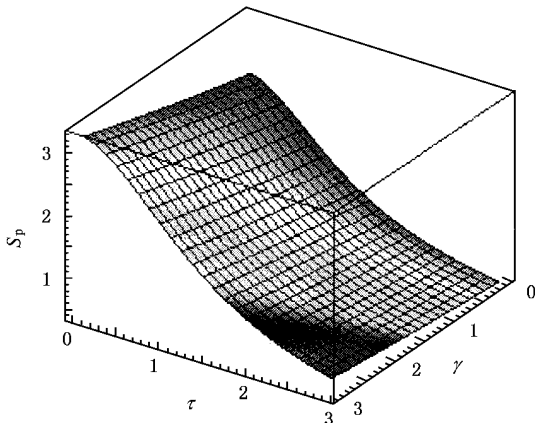


图 3 熵产生  $S_p$  在  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.2$  时随  $\tau$  与  $\gamma$  的变化

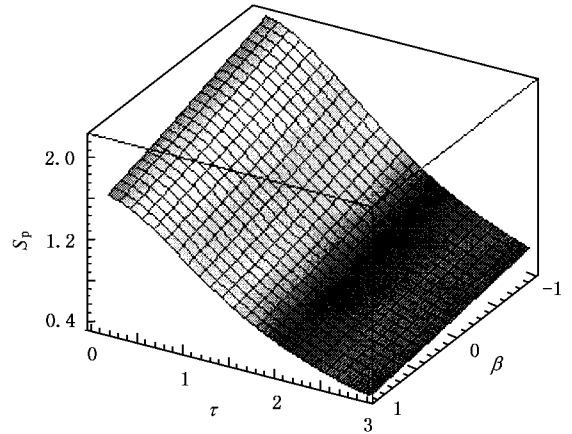


图 4 熵产生  $S_p$  在  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 0.3$  时随  $\tau$  与  $\beta$  的变化

的变化情况. 由图 1 和图 2 可见,  $S_p$  随  $t$  的增加而单调递减, 当时间  $t$  不断增大时最终达到极限值  $\chi(1 - \beta)$ . 对于较小的  $\tau$  或者较大的  $\beta$ , 弛豫时间较长;  $S_p$  的平衡值随着  $\beta$  的增大而减小. 由图 3 和图 4 可见,  $S_p$  随着  $\tau$  的增加而单调递减, 并且对于较大的  $\gamma$  或较小的  $\beta$ ,  $S_p$  的值较大.

#### 4. 非平衡约束下双奇异随机系统的熵流与熵产生

考虑非平衡约束对系统 (2) 的熵流、熵产生的作用, 亦即在 (2) 式中引入常数外力  $f_e$ . 相应 FP 方程 (8) 中的漂移系数变为

$$A = A_0 + aA_1. \quad (15)$$

(15) 式中,  $A_0(U) = -\chi(1 - \beta)U$ ,  $A_1 = f_e$ ,  $a$  是小参数. 类似文献 4—6 的推导, 非平衡约束下双奇异随机系统 (2) 的熵流  $\Delta S_f$  和熵产生  $\Delta S_p$  分别为

$$\begin{aligned} \Delta S_f = & \frac{\Gamma}{2B} [2B - \Gamma\alpha(t) + 2a(t)\chi - \alpha(t)\Gamma \\ & + A_1] - \frac{\Gamma}{B} A_1 \alpha(t), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_p = & \frac{1}{2B\alpha(t)} [2\Gamma^2\alpha(t)\chi\alpha(t) + \Gamma^2\alpha(t)\chi \\ & - 4\Gamma\alpha(t)B + 4B^2]. \end{aligned} \quad (17)$$

式中,

$$\alpha(t) = \frac{A_1}{\Gamma} + \left( \alpha(0) - \frac{A_1}{\Gamma} \right) \exp(-\Gamma t),$$

$$\begin{aligned} \chi(t) = & \frac{2B[1 - \exp(-2\Gamma t)]}{\Gamma} \\ & + \alpha(0)\exp(-2\Gamma t), \end{aligned}$$

$$\Gamma = \chi(1 - \beta),$$

$$B = \frac{D}{\tau^2}.$$

我们取非平衡约束力为常数力  $f_e = 1.0$  以及  $D = 0.5$ ,  $\alpha(0) = -0.5$  和  $\alpha(0) = 0.5$  保持不变. 图 5—图 8 分别描述了奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  或系统的耗散参数  $\gamma$  取值不同时熵流  $\Delta S_f$  和熵产生  $\Delta S_p$  随时间  $t$  的演变. 图 5 描述了在非平衡约束下, 当  $\tau$  较大时  $\Delta S_f$  关于  $t$  的演化曲线出现了极值, 该现象在白噪声激励情形的双奇异随机系统中未曾见到.

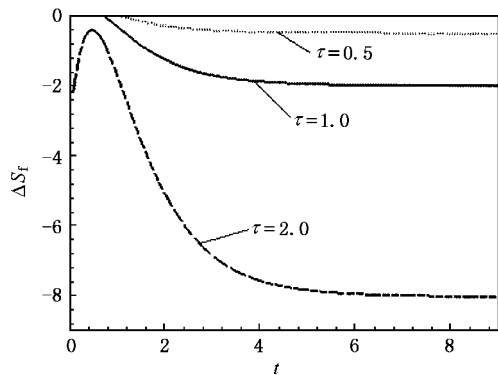


图 5 熵流  $\Delta S_f$  在  $\gamma = 2.0, \beta = 0.5$  时随时间  $t$  的变化

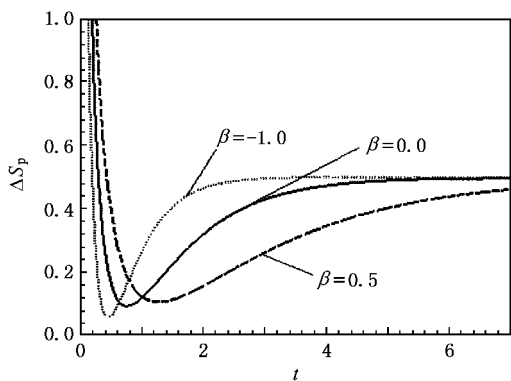


图 6 熵产生  $\Delta S_p$  在  $\gamma = 1.0, \tau = 0.5$  时随时间  $t$  的变化

图 6—图 8 描述了在非平衡约束下,  $\beta, \tau$  或  $\gamma$  取不同值时  $\Delta S_p$  关于  $t$  的演化均呈现极值现象.  $\Delta S_p$  随  $t$  的增大先快速减小穿过最小值后逐渐增大至新的平衡值;  $\beta$  越小, 弛豫时间也越短, 如图 6 所示. 当  $\tau$  较大时  $\Delta S_p$  关于  $t$  的演化曲线出现了显著的极值, 且  $\tau$  越大  $\Delta S_p$  新的平衡值也越大, 如图 7 所示. 随着  $\gamma$  的增大, 弛豫时间缩短,  $\Delta S_p$  的极值降低, 极值位置左移, 如图 8 所示. 图 9 描述了噪声相关时间

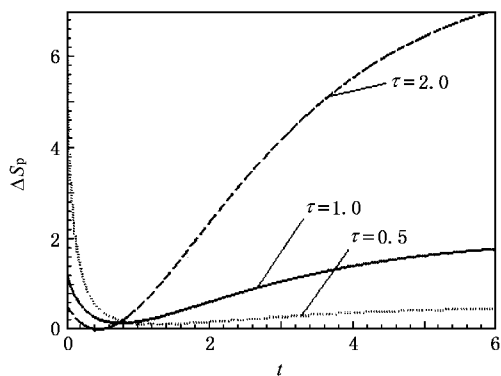


图 7 熵产生  $\Delta S_p$  在  $\gamma = 1.0, \beta = 0.5$  时随时间  $t$  的变化

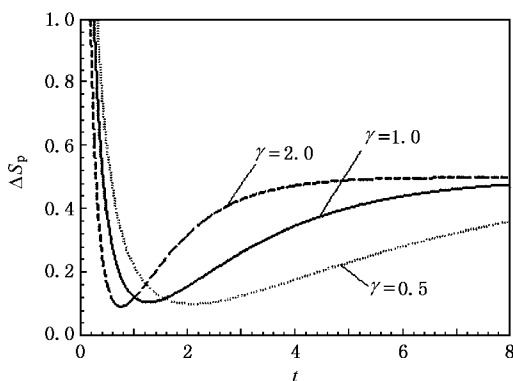


图 8 熵产生  $\Delta S_p$  在  $\beta = 0.5, \tau = 0.5$  时随时间  $t$  的变化

$\tau$  与奇异性强度参数  $\beta$  的相互作用以及对熵产生  $\Delta S_p$  的影响. 图 10 描述了  $\Delta S_p$  关于  $\tau$  的演化曲线出现了显著的极值, 且随着  $\tau$  的增大  $\Delta S_p$  先减小直到穿过极小值后逐渐增大, 对于较大的  $\beta, \Delta S_p$  的极值位置右移 (所有计算值均为无量纲).

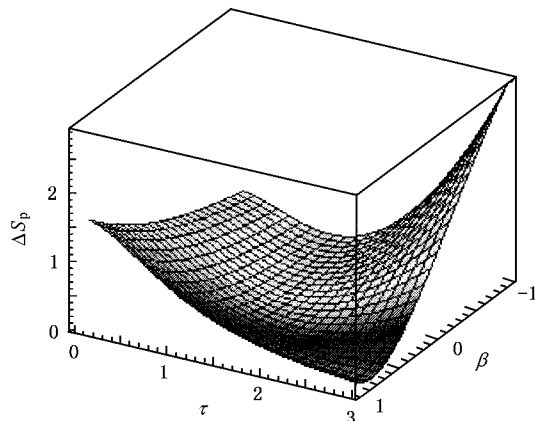


图 9 熵产生  $\Delta S_p$  在  $\gamma = 0.8, t = 0.3$  时随  $\tau$  与  $\beta$  的变化

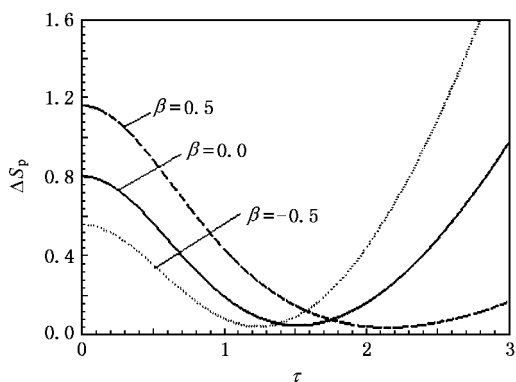


图 10 熵产生  $\Delta S_p$  在  $\gamma=0.8$ ,  $\mu=0.3$  时随  $\tau$  的变化

## 5. 结 论

本文得到了(非平衡约束下)色噪声驱动的双奇异随机系统的熵流  $S_f(\Delta S_f)$ 、熵产生  $S_p(\Delta S_p)$  的精确表达式. 借此分析了奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  和系统的耗散参数  $\gamma$  相互作用以及对  $S_f(\Delta S_f)$ 、 $S_p(\Delta S_p)$  的影响. 特别是在非平衡约束作用下,  $\beta$ 、 $\tau$  或  $\gamma$  取不同值时  $\Delta S_f$ 、 $\Delta S_p$  关于  $t$  的演化均呈现极值现象.

- [1] Katz A 1967 *Statistical Mechanics* (San Francisco: Freeman)  
 [2] Xing X S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2852 (in Chinese) [邢修三 2004 *物理学报* **53** 2852]  
 [3] Bag B C, Banik S K, Ray D S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026110  
 [4] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026122  
 [5] Bag B C 2003 *J. Chem. Phys.* **119** 4988  
 [6] Goswami G, Mukherjee B, Bag B C 2005 *Chem. Phys.* **312** 47  
 [7] Goswami G, Mukherjee B, Bag B C 2005 *J. Phys. A: Math.*

*Gen.* **38** 1659

- [8] Xie W X, Xu W, Cai L *et al* 2005 *Chin. Phys.* **14** 1766  
 [9] Kramers H A 1940 *Physica* **7** 284  
 [10] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 *随机力与非线性系统* (上海: 上海科技教育出版社)]

# Entropy flux and entropy production of a stochastic system with double singularities driven by colored noise<sup>\*</sup>

Xie Wen-Xian<sup>1)†</sup> Xu Wei<sup>1)</sup> Cai Li<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

<sup>2)</sup> College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 5 July 2005; revised manuscript received 3 November 2005)

## Abstract

This paper shows the Fokker-Planck (FP) equation of a stochastic system with double singularities driven by Gaussian colored noise. Based on the FP equation and the definition of Shannon's information entropy, the exact time dependence of entropy flux and entropy production of the system is calculated both in the absence and in the presence of non-equilibrium constraint. The relationship between the properties of double singularities, noise correlation time and dissipative parameter and their effects on entropy flux and entropy production are discussed.

**Keywords:** information entropy, entropy flux and entropy production, stochastic system with double singularities, Gaussian colored noise

**PACC:** 0540, 0520

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2003A03) and the Science and Technology Innovation Foundation for Young Teachers of Northwestern Polytechnical University, China.

<sup>†</sup> E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn