第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1651-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.4, April, 2006

基于无源化的细胞神经网络超混沌系统同步

吴忠强 谭拂晓 王绍仙

(燕山大学电气工程学院，秦皇岛 066004)

(2005 年 4 月 8 日收到；2005 年 12 月 12 日收到修改稿)

根据细胞神经网络超混沌系统的特点，求得混沌驱动系统与响应系统之间的误差系统．基于该误差系统，提出了混沌系统的同步条件：使同步误差大范围渐近稳定，然后采用非线性系统的无源化方法设计了使误差系统大范围渐近稳定的反馈镇定器．四阶细胞神经网络超混沌系统的计算机仿真验证了该方法的有效性．

关键词：混沌同步，误差系统，无源化，细胞神经网络超混沌系统

PACC：0545

1. 引 言

自从 Pecora 和 Carroll[1] 在 1990 年首次提出混沌同步以来，混沌同步问题得到了广泛的关注，许多学者进行了深入细致的研究[2—5]．这是因为混沌同步不仅在理论上具有挑战性，而且在保密通信、化学物理反应、生物系统等许多领域具有潜在的应用价值．

混沌同步主要是利用一个混沌信号来驱动或控制另外一个混沌，使两个混沌系统的状态误差趋于零，其目的就是在响应端重构出驱动端的吸引子，可应用于保密通信中[6—9]．混沌信号具有非周期性连续宽带频谱、似噪特性和长期不可预测性，为通信提供了高度保密的手段，而超混沌系统能够产生更加复杂的动力学行为，且具有非常强的随机性和长期不可预测性，将具有更高的保密性能和实际应用价值[10—13]．

本文研究细胞神经网络超混沌系统的同步问题．细胞神经网络超混沌系统具有规则的结构，并且每个细胞单元仅与邻近的细胞相耦合，从而易于超大规模集成电路的实现．细胞神经网络能实现三维甚至更高维的混沌动力学行为，更适合于保密通信[14—16]．本文建立了细胞神经网络超混沌误差系统，并对该误差系统进行坐标变换，基于无源化方法来分析和设计超混沌误差系统的反馈镇定律．当误差趋于零时，两混沌系统便实现了同步．计算机仿真验证了该方法的有效性．

2. 混沌同步问题的描述

考察以下的细胞神经网络超混沌系统．

驱动系统为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \phi(y) = Ay + \psi(y), \\ y(0) &= y_0 \in R^n . \end{aligned} \tag{1}$$

响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \phi(x) + gu = Ax + \psi(x) + gu, \\ x(0) &= x_0 \in R^n , \end{aligned} \tag{2}$$

式中，$x, y \in R^n$ 为状态变量；$A \in R^{n\times n}$，$\psi : R^n \to R^n$ 为连续非线性函数；u 为控制输入．记混沌同步误差为 $e_i = x_i - y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则混沌同步问题可以转化为对其同步误差系统的研究．同步误差系统为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = Ae + [\psi(x) - \psi(y)] + gu . \tag{3}$$

混沌系统的一个显著特征是其轨迹表现出整体有界性，即吸引子内部的相互作用使得混沌系统的非线性部分具有内部稳定性和有界性，因此有定义 1．

定义 1 混沌系统(1)和(2)的非线性部分 ψ : $R^n \to R^n$，满足 Lipschitz 条件

$$\| \psi(x) - \psi(y) \| \leqslant L \| x - y \| = L \| e \| , \tag{4}$$

式中，$x \in \Omega_1 \in R^n$，$y \in \Omega_2 \in R^n$，Ω_1 和 Ω_2 分别为混沌系统(1)和(2)的状态演化空间，L 为未知的 Lipschitz 常数．

根据定义 1，混沌同步误差系统(3)可以转化为

$$\dot{e} = (Ae + M_{xy}e) + gu, \tag{5}$$

式中 $M_{xy}e$ 为满足 Lipschitz 条件的误差系统(3)的非线性等效部分.

根据(5)式,不失一般性,考察下列非线性误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= f(e) + g(e)u, \\ z &= h(e), \end{aligned} \tag{6}$$

式中,$e \in R^n$ 为状态向量;$u \in R^p$,$z \in R^p$ 分别为 p 维的输入信号和输出信号;$f(e)$ 和 $h(e)$ 分别为 n 维和 p 维的向量函数,且 $f(0) = 0$,$h(0) = 0$;$g(e)$ 为 $n \times p$ 维的矩阵.

3. 基于无源性的反馈控制器设计

3.1. 误差系统的反馈坐标变换和标准链式结构

对于混沌误差系统(6),考察输出信号 z 对时间的微分

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial h}{\partial e}\dot{e} = \frac{\partial h}{\partial e}[f(e) + g(e)u] \\ &= L_f h(e) + L_g h(e)u. \end{aligned}$$

若 $L_g h(e) \neq 0$,$\forall\, e \in R^n$ 成立,令 $\dot{z} = v$,则有

$$u = \frac{1}{L_g h(e)}[v - L_f h(e)].$$

若 $L_g h(e) = 0$,$\forall\, e \in R^n$ 成立,可以对 $\dot{z}$ 继续进行微分,得

$$\ddot{z} = L_f^2 h(e) + L_g L_f h(e)u.$$

若 $L_g L_f h(e) = 0$,则可以进一步进行微分,直到 $L_g L_f^{r-1} \neq 0$,即相对阶数为 r,此时有

$$\begin{aligned} u &= [L_g L_f^{r-1} h(e)]^{-1}(- L_f^r h(e) + v), \\ z^{(r)} &= v. \end{aligned}$$

对于误差系统(6),根据以上求相对阶数 r 的过程可得到下面两个结论.

结论 1 若误差系统(6)具有相对阶数 r,取新的坐标变换

$$\begin{aligned} \xi_1 &= z = h(e), \\ \xi_2 &= \dot{\xi}_1 = L_f h(e), \\ &\vdots \\ \xi_r &= \dot{\xi}_{r-1} = L_f^{r-1} h(e), \end{aligned}$$

及 $n - r$ 维的变换函数

$$\eta = \eta(e) = [\eta_1(e), \eta_2(e), \cdots, \eta_{n-r}(e)]^{\mathrm{T}},$$

使得 $\eta(e)$ 满足

$$L_g \eta_i(e) = \frac{\partial \eta_i}{\partial e_1} g_1(e) + \frac{\partial \eta_i}{\partial e_2} g_2(e) + \cdots + \frac{\partial \eta_i}{\partial e_n} g_n(e) = 0,$$

其中 $g(e) = [g_1(e), g_2(e), \cdots, g_n(e)]^{\mathrm{T}}$,那么误差系统(6)与以下系统反馈等价:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_r &= L_f^r h(e) + L_g L_f^{r-1} h(e)u = v, \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r) = [L_f \eta_i], \\ z &= \xi_1 = h(e), \end{aligned} \tag{7}$$

式中变换阵

$$\begin{aligned} \Phi(e) &= [\eta, \xi_1, \cdots, \xi_r]^{\mathrm{T}} \\ &= [\eta(e), h(e), \cdots, L_f^{r-1} h(e)]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

具有局部微分同胚,即它的 Jacobi 矩阵对任意 $e \in R^n$ 非奇异.

结论 2 对于误差系统(6),其相对阶数为 r,若存在 $n - r$ 维变换函数 $\eta(e)$ 满足

$$\frac{\partial \eta_i(e)}{\partial e}\Big[g(e), ad_f g(e), ad_f^2 g(e), \cdots, ad_f^{r-1} g(e)\Big] = 0,$$

且分布 $\Delta = \mathrm{span}\,\{g(e), ad_f g(e), ad_f^2 g(e), \cdots, ad_f^{r-1} g(e)\}$ 是对和分布,那么误差系统(6)就可以通过坐标变换和状态反馈将其转化为以下标准链式结构:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_r &= L_f^r h(e) + L_g L_f^{r-1} h(e)u = v, \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta; \xi_1), \\ z &= \xi_1 = h(e). \end{aligned} \tag{8}$$

3.2. 误差系统的无源化

非线性误差系统(8)的无源化,就是利用无源性与稳定性之间的等价关系,采用反馈补偿使系统成为无源系统的过程,并且通过无源化可以得到反馈镇定律[17—20].

引理 1(KYP(Kalman-Yacubovitch-Popov)引理[18]) 对于误差系统(8),存在可微的非负定函数 $V(e)$,使系统(8)是无源的充要条件是当且仅当 $V(e)$ 满足

$$L_f V(e) \leqslant 0,\quad L_g V(e) = h^{\mathrm{T}}(e). \tag{9}$$

对于混沌误差系统(8),若只考察子系统与积分器串联所构成的系统

$$\dot{e} = f(e,z),\quad \dot{z} = u, \tag{10}$$

当 $z=0$ 时,系统在 $e=0$ 是渐近稳定的,即 $e=0$ 是系统 $\dot{e}=f'(e)$ 渐近稳定的平衡点,其中 $f'(e)=f(e,0)$,$f'(0)=0$. 若令

$$f'_0(e,z) = \int_0^1 \frac{\partial f(e,\zeta)}{\partial \zeta}\bigg|_{\zeta=\theta z} \mathrm{d}\theta,$$

则有

$$f(e,z) = f_1(e) + f'_1(e,z)z. \tag{11}$$

考察(11)式,并根据 Lyapunov 逆定理[21],对于在原点稳定的系统 $\dot{e}=f'(e)$,存在正定函数 $w(e)$ $(w(0)=0)$,且 $\dot{w}=L_{f_0}w(e)<0$, $\forall e\neq 0$ 成立.

定理 1　对于非线性系统(10),令 z 为该系统的输出,设存在半正定函数 $w(e)\geqslant 0$,使得下式成立:

$$\dot{w} = L_{f_1} w(e) \leqslant 0 \qquad (\forall e \neq 0). \tag{12}$$

若取反馈律

$$u = -L_{f_1} w(e) + v, \tag{13}$$

则闭环系统对于存储函数

$$V(e,z) = w(e) + \frac{1}{2}z^2, \tag{14}$$

以及输入 v 是无源的.

证明　由(10)式及反馈控制律(13)式构成的闭环系统为

$$\dot{e}' = F(e') + G(e')v,\quad z = H(e'). \tag{15}$$

式中,

$$e' = [e \quad z]^{\mathrm{T}},$$

$$F(e') = \begin{bmatrix} f_0(e) + f'_1(e,z) \\ -L_{f_1} w(e) \end{bmatrix},$$

$$G(e') = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H(e') = [0 \quad 1]e'.$$

利用(12)式,可以验证

$$\begin{aligned} L_F V(e,z) &= \left[\frac{\partial w}{\partial e} \quad z\right] F(e') \\ &= L_{f_1} w(e) + L_{f_1} w(e) z - z L_{f_1} w(e) \\ &= L_{f_1} w(e) \leqslant 0 \quad (\forall e' \in R^2), \end{aligned} \tag{16}$$

$$L_G V(e,z) = z = H(e'). \tag{17}$$

根据(16),(17)式可知系统(15)具有 KYP 特性. 由引理 1 可知系统(10)是无源的.

3.3. 基于无源性的反馈镇定控制器设计

对于混沌误差系统(6),只考虑相对阶数为 3 时的反馈镇定律的设计. 相对阶数大于 3 的混沌系统可按照相同的方法逐步递推.

当相对阶数为 1 时,通过坐标变换,误差系统(6)可以写成

$$\dot{\xi}_1 = v,\quad \dot{\eta} = f_0(\eta,\xi_1), \tag{18}$$

式中 v 为等价变换后新的控制输入信号,则存在定理 2.

定理 2　对于系统(18),如果存在函数 $\beta_1(\eta)$ $(\beta(0)=0)$ 和正定函数 $w(\eta)$,使得 $\dot{w}=L_{f_0}w(\eta)<0$, $\forall \eta\neq 0$ 成立,则使闭环系统在原点稳定的反馈控制律为

$$v = \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta} f_0(\eta,\xi_1) - L_{f'} w(\eta) - \xi_1 + \beta_1(\eta).$$

证明　假设存在适当的函数 $\beta_1(\eta)$,使得 $\xi_1=\beta_1(\eta)$ 时的子系统 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\beta_1(\eta))$ 在原点 $\eta=0$ 是渐近稳定的,且存在正定函数 $w(\eta)$,使得 $\dot{w}=L_{f_0}w(\eta)<0$, $\forall \eta\neq 0$ 成立.

对系统(18)取新的输出信号 $\xi'_1=\xi_1-\beta(\eta)$,并采用如下的坐标变换:

$$[\eta \quad \xi_1]^{\mathrm{T}} \to [\eta \quad \xi'_1]^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

则系统(18)可以写成

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\beta_1(\eta) + \xi'_1),\quad \dot{\xi}'_1 = -\dot{\beta}_1(\eta) + v. \tag{20}$$

令反馈输入为

$$\begin{aligned} v &= \dot{\beta}_1(\eta) + v' \\ &= \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta} f_0(\eta,\beta_1(\eta) + \xi'_1) + v', \end{aligned} \tag{21}$$

式中 v' 为辅助输入信号,则(17)式可以写成

$$\dot{\xi}'_1 = v',\quad \dot{\eta} = f_0(\eta,\beta_1(\eta) + \xi'_1). \tag{22}$$

该系统的输出 ξ'_1 满足零状态可检测条件,即具有最小相位特性. 因此,按(11)式可将 $f_0(\eta,\beta_1(\eta)+\xi'_1)$ 分解为

$$f_0(\eta,\beta_1(\eta) + \xi'_1) = f_0(\eta,\beta_1(\eta)) + f'(\eta,\xi'_1)\xi'_1.$$

由定理 1 得到使闭环系统成为无源系统的反馈控制律为

$$v' = -L_{f'}w(\eta) + \tilde{v}. \tag{23}$$

取闭环系统所对应的存储函数为

$$V(\eta,\xi_1') = W(\eta) + \frac{1}{2}\xi_1'^2. \tag{24}$$

由引理 1 所描述的无源性与稳定性的等价关系,令

$$\tilde{v} = -\xi_1', \tag{25}$$

则由(22),(23),(25)式所构成的闭环系统在原点$(\eta,\xi')=(0,0)$是渐近稳定的.又因为坐标变换(19)式是满秩的,因此,使系统(20)稳定的反馈控制器同样也是系统(18)的镇定控制律.将(23),(25)式代入(21)式,可得到定理 2 中的控制律.

对于相对阶数为 3 的超混沌误差系统,进行坐标变换后其标准链式结构为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \xi_3 &= v, \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta,\xi_1). \end{aligned} \tag{26}$$

相应的反馈镇定律的设计可分三步进行.

第一步 首先视积分器 ξ_1 的输入 ξ_2 为假想控制信号,利用 η 子系统与积分器 ξ_1 的串联结构,并根据定理 2 求得以(η,ξ_1)为坐标的子系统所对应的镇定控制律 $\beta_2(\eta,\xi_1)$.

设存在函数 $\beta_1(\eta)$和正定函数 $w(\eta)$,使得 $\frac{\partial w}{\partial\eta}f_0(\eta,\beta_1(\eta))<0,\forall\,\eta\neq0$ 成立,即当 $\xi_1=\beta_1(\eta)$ 时,η 子系统在 $\eta=0$ 处渐近稳定.令 $\xi_1'=\xi_1-\beta_1(\eta)$,则$(\eta,\xi_1)$子系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1' &= \xi_1 - \dot{\beta}_1(\eta), \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta,\xi_1' + \beta_1(\eta)). \end{aligned}$$

进一步,若将 ξ_2 看作是该系统的假想控制输入,根据定理 2 可以得到镇定控制律

$$\begin{aligned} \xi_2 = v_1 = \beta_2(\eta,\xi_1) &= \frac{\partial\beta_1}{\partial\eta}f_0(\eta,\xi_1) \\ &\quad - L_{f_0'}w(\eta) - \xi_1 + \beta_1(\eta,\xi_1), \end{aligned} \tag{27}$$

式中 f_0' 满足

$$\begin{aligned} &f_0(\eta,\xi_1' + \beta_1(\eta)) \\ &= f_0(\eta,\beta_1(\eta)) + f_0'(\eta,\xi_1')\xi_1'. \end{aligned}$$

令

$$\eta' = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi_1' \end{bmatrix},$$

$$F_0(\eta',\xi_2) = \begin{bmatrix} f_0(\eta,\xi_1' + \beta_1(\eta)) \\ \xi_2 - \dot{\beta}_1(\eta) \end{bmatrix},$$

则系统可以表示成

$$\begin{aligned} \dot{\eta}' &= F_0(\eta',\xi_2), \\ \dot{\xi}_2 &= v_1. \end{aligned} \tag{28}$$

第二步 视 ξ_3 为假想输入,用 ξ_3 代替 v_1,求使(η,ξ_1,ξ_2)稳定的反馈控制律 $\beta_3(\eta,\xi_1,\xi_2)$.

对系统(28)的 η' 子系统,当 $\xi_2=\beta_2(\eta,\xi_1)$时,取正定函数为 $w_1'(\eta,\xi_1')=w(\eta)+\frac{1}{2}\xi_1'$,将满足

$$\frac{\partial w_1'}{\partial\eta}F_0(\eta',\beta_2(\eta')) < 0 \qquad (\forall\,\eta' \neq 0).$$

对系统(28)重复使用定理 2,令

$$\begin{aligned} \xi_2' &= \xi_2 - \beta_2(\eta,\xi_1), \\ \beta_2(\eta,\xi_1) &= \beta_2(\eta'), \end{aligned}$$

并记

$$F_0'(\eta',\xi_2') = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}},$$

则

$$\begin{aligned} &F_0(\eta',\xi_2' + \beta_2(\eta')) \\ &= F_0(\eta',\beta_2(\eta')) + F_0'(\eta',\xi_2')\xi_2', \end{aligned}$$

可得系统的反馈控制律为

$$v_2 = \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta'}F_0(\eta',\xi_2) - L_{F_0'}w'(\eta') - \xi_2 + \beta_2(\eta').$$

由于

$$\begin{aligned} L_{F_0'}w'(\eta') &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial\eta} & \xi_1' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \xi_1' = \xi_1 - \beta_1(\eta), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta'}F_0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\beta_2}{\partial\xi_1'} \end{bmatrix}F_0 \\ &= \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta}f_0(\eta,\xi_1' + \beta_1) + \frac{\partial\beta_2}{\partial\xi_1'}[\xi_2 - \dot{\beta}_1(\eta)]. \end{aligned}$$

可求得系统(28)的反馈镇定律为

$$\begin{aligned} v_2 &= \beta_3(\eta,\xi_1,\xi_2) \\ &= \frac{\partial\beta_2}{\partial\eta}f_0(\eta,\xi_1) + \frac{\partial\beta_2}{\partial\xi_1'}[\xi_2 - \dot{\beta}_1(\eta)] \\ &\quad - \xi_1 + \beta_1(\eta) - \xi_2 + \beta_2(\eta,\xi_1). \end{aligned} \tag{29}$$

第三步 在控制输入 v 作用下,将(η,ξ_1,ξ_2,ξ_3)系统视为子系统与积分器 ξ_3 的串联,重复使用定理 2,可求得使系统镇定的反馈控制器 v.

令

$$z_2' = \begin{bmatrix} z_1' \\ \xi_2' \end{bmatrix},$$

$$F_1(\eta_2',\xi_3)=\begin{bmatrix}F_0(\eta_1',\xi_2)\\ \xi_2'=\xi_3-\dot\beta_2(\eta,\xi_1,\xi_2)\end{bmatrix},$$

则系统可以表示成

$$\begin{aligned}\eta_2'&=F_1(\eta_2',\xi_3),\\ \dot\xi_3&=v.\end{aligned}\tag{30}$$

令

$$\begin{aligned}\xi_3&=\beta_3(\eta,\xi_1,\xi_2),\\ \xi_3'&=\xi_3-\beta_3,\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}w_2'(\eta,\xi_1,\xi_2)&=w_1'+\frac{1}{2}\xi_2'^2\\ &=w(\eta)+\frac{1}{2}\xi_1'^2+\frac{1}{2}\xi_2'^2.\end{aligned}$$

记 $F_1'(\eta_2',\xi_3'^2)=[0\quad 1]^{\mathrm T}$,可以得到

$$\begin{aligned}F_1(\eta_2',\xi_3)&=F_1(\eta_2',\beta_3+\xi_3')\\ &=F_1(\eta_2',\beta_3)+F_1'(\eta_2',\xi_3')\xi_3'.\end{aligned}$$

对系统(30)重复使用定理 2,得到反馈控制律

$$v=\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_2'}F_1(\eta_2',\xi_3)-L_{F_1'}w_2'(\eta_2')-\xi_3+\beta_3.$$

由于 $F_1'=[0\quad 1]^{\mathrm T}$,可得

$$\begin{aligned}L_{F_1'}w_2'&=\begin{bmatrix}\frac{\partial w_2'}{\partial\eta_1'} & \xi_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\ &=\xi_2'=\xi_2-\beta_2(\eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_2'}F_1(\eta_2',\xi_3)&=\begin{bmatrix}\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_1'} & \frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_2'}\end{bmatrix}F_1(\eta_2',\xi_3)\\ &=\begin{bmatrix}\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_1'} & \frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_2'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_0(\eta_1',\xi_2)\\ \xi_2'=\xi_2-\dot\beta_2\end{bmatrix}\\ &=\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_1'}F_0(\eta_1',\xi_2)+\frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_2'}[\xi_3-\dot\beta_2],\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}v=&\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_1'}F_0(\eta_1',\xi_2)+\frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_2'}[\xi_3-\dot\beta_2]\\ &-(\xi_2-\beta_2)-\xi_3+\beta_3(\eta_2'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta_1'}F_0(\eta_1',\xi_2)&=\begin{bmatrix}\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta} & \frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_1'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0(\eta,\xi'+\beta_1)\\ \xi_2-\dot\beta_1(\eta)\end{bmatrix}\\ &=\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta}f_0(\eta,\xi_1)+\frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_1'}\\ &\quad\times[\xi_2-\dot\beta_1(\eta,\xi_1)].\end{aligned}$$

最终可得到控制律为

$$\begin{aligned}v=&\frac{\partial\beta_3}{\partial\eta}f_0(\eta,\xi_1)+\frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_1'}[\xi_2-\dot\beta_1]\\ &+\frac{\partial\beta_3}{\partial\xi_2'}[\xi_3-\dot\beta_2]-(\xi_1-\beta_1)\\ &-(\xi_2-\beta_2)-\xi_3+\beta_3.\end{aligned}\tag{31}$$

4. 四阶细胞神经网络超混沌系统的同步

Chua 和 Yang 在 1998 年首创细胞神经网络[16]. 细胞神经网络的一个细胞是一个线性电容和一些压控电流源构成的非线性电路. 简化的推广细胞神经网络的细胞模型可由以下无量纲的非线性状态方程描述:$\dot x_j=-x_j+a_jy_j+G_0+G_s+i_j$,其中 j 是细胞记号,x_j 为状态变量,y_j 为细胞输出,且 $y_j=0.5(|x_j+1|-|x_j-1|)$,a_j 为常量,i_j 为门限值,G_0 和 G_s 分别是所考虑连接细胞输出和状态变量的线形组合.

四阶细胞神经网络超混沌系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot x_1&=-x_3-x_4,\\ \dot x_2&=2x_2+x_3,\\ \dot x_3&=14x_1-14x_2,\\ \dot x_4&=100x_1-100x_4\\ &\quad+100(|x_4+1|-|x_4-1|).\end{aligned}$$

根据(6)式,可以得到驱动系统与响应系统之间的误差系统为

$$\dot e=\begin{bmatrix}0&0&-1&-1\\0&2&1&0\\14&-14&0&0\\100&0&0&-100(1-L)\end{bmatrix}e+g(e)u.$$

四阶细胞神经网络超混沌系统的同步问题就是使误差系统为渐近稳定. 采用本文给出的控制器设计方法,仿真结果如图 1 所示,在 80 s 加入控制,系统经过一段时间调整后,很快达到了同步.

控制器的设计过程分为三步.

第一步:令 $g=[-1\quad 0\quad 0\quad -1]^{\mathrm T}$,取 $h(e)=e_2$ 为输出,求得以下数据:

$$\begin{aligned}I_gh(e)&=0,\\ L_fh(e)&=2e_2+e_1,\\ L_f^2h(e)&=14e_1-10e_2+2e_3,\\ [f,g]&=[-1\quad 0\quad 14\quad 100L]^{\mathrm T},\end{aligned}$$

则

$$L_g\eta(e)=-\frac{\partial\eta}{\partial e_1}-\frac{\partial\eta}{\partial e_4}=0,$$

$$L_{[f,g]}\eta(e)=-\frac{\partial\eta}{\partial e_1}+14\frac{\partial\eta}{\partial e_2}+100L\frac{\partial\eta}{\partial e_4}=0.$$

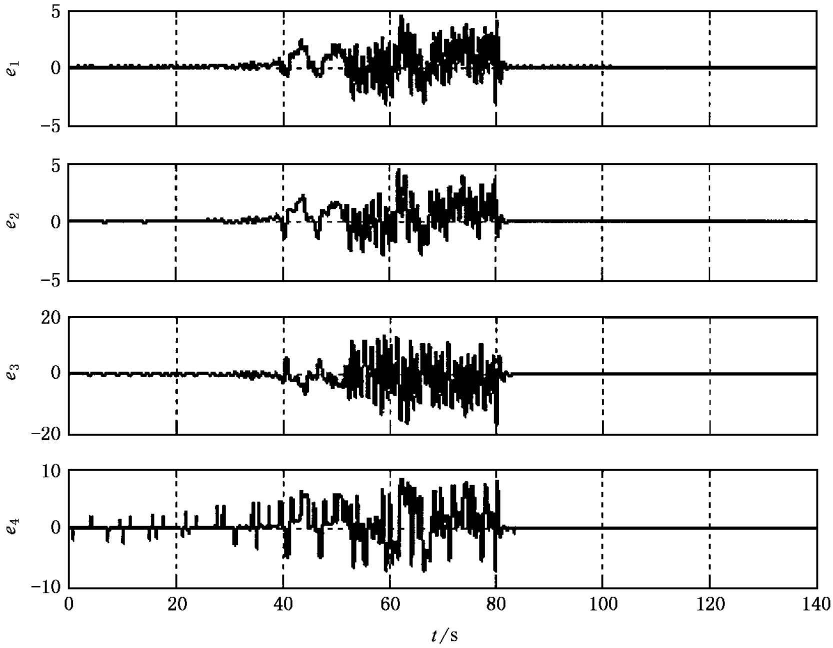

图 1 四阶细胞神经网络超混沌系统同步误差曲线

可以求得该方程组的一个解为

$$\eta(e) = e_1 + \frac{1+100L}{14}e_3 - e_4 .$$

取坐标变换为

$$\begin{aligned}\xi_1 &= h(e) = e_2,\\ \xi_2 &= L_f h(e) = 2e_2 + e_1,\\ \xi_3 &= L_f^2 h(e) = 14e_1 - 10e_2 + 2e_3,\\ \eta(e) &= e_1 + \frac{1+100L}{14}e_3 - e_4,\end{aligned} \tag{32}$$

则坐标变换的标准式为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2,\\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3,\\ \dot{\xi}_3 &= v,\\ \dot{\eta} &= f_0(\eta,\xi_1) = [L_f\eta(e)]\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1+100L}{14} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 14 & -14 & 0 & 0\\ 100 & 0 & 0 & -100(1-L)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

通过计算可以得到

$$\dot{\eta} = f_0(\eta,\xi_1) = -(1+100L)\xi_1 + (-99+100L)\eta - (-2\xi_1+\xi_2)\left[1+(-99+100L)\frac{1+100L}{14}\right]. \tag{33}$$

为使(33)式等号右端不含 ξ_2,令该式等号右端的最后一项为零,即 $1+(-99+100L)\dfrac{1+100L}{14}=0$,求得 $L=0.9886$,并把 L 值代入(33)式,得 $\dot{\eta} = -0.14\eta - 99.86\xi_1$.

第二步 取 $\xi_1 = \beta_1(\eta) = \eta$, $w(\eta) = \dfrac{1}{2}\eta^2$,令 $\xi_1' = \xi_1 - \beta_1(\eta)$.由

$$f_0(\eta,\beta_1(\eta)+\xi_1') = f_0(\eta,\beta_1(\eta)) + f_0'(\eta,\xi_1')\xi_1'$$

得 $f_0' = -99.86$.

因为

$$\dot{w} = L_{f_0} w = \frac{\partial w}{\partial \eta} f_0(\eta, \xi_1)$$
$$= \eta(-0.14\eta - 99.86\xi_1)$$
$$= -100\eta^2 < 0,$$

所以得

$$\beta_2(\eta, \xi_1) = \frac{\partial \beta_1}{\partial \eta} f_0(\eta, \xi_1) - L_{f_0'} w(\eta) - \xi_1 + \beta_1(\eta)$$
$$= -0.14\eta,$$
$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1'} = 0,$$

$$w(\eta, \xi_1) = w(\eta) + \frac{1}{2}[\xi_1 - \eta]^2.$$

可以验证

$$\dot{w}_1 = \frac{\partial w_1}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1}\dot{\xi}_1 = -100\eta^2 < 0.$$

第三步 :令 $\xi_2 = \beta_2(\eta, \xi_1)$，并注意到 $\xi_1 = \beta_1(\eta) = \eta$，$\dot{\eta} = \xi_2$，可以得到

$$\beta_3(\eta, \xi_1, \xi_2) = \frac{\partial \beta_2}{\partial \eta} f_0(\eta, \xi_1) + \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1'}[\xi_2 - \dot{\beta}_1(\eta)]$$
$$- \xi_1 + \beta_1(\eta) - \xi_2 + \beta_2(\eta, \xi_1)$$
$$= 0.88\eta + 12.98\xi_1 - \xi_2.$$

由 $\xi_2' = \xi_2 - \beta_2(\eta, \xi_1)$，可得 $\frac{\partial \beta_3}{\partial \xi_1'} = 12.98$，$\frac{\partial \beta_3}{\partial \xi_2'} = -1$.

注意到 $\xi_1 = \beta_1 = \eta$，$\dot{\xi}_1 = \xi_2$，$\dot{\xi}_2 = \xi_3$，并由(31)式可得

$$v = 1.72\eta + 11.98\xi_1 - 0.26\xi_2 - 2\xi_3. \quad (34)$$

把(32)式代入(34)式，最终求得控制律为

$$u = -26.28e_1 + 31.46e_2 + 8e_3 - 1.72e_4.$$

5. 结　论

本文尝试用无源化方法实现两个超混沌系统同步. 求出了两个混沌系统的误差系统，采用无源化方法设计误差系统的反馈镇定器，并以四阶细胞神经网络超混沌系统为例进行仿真验证，仿真结果表明该方法能够使驱动系统与响应系统全局同步.

[1] Pecora L M，Carroll T L 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 821

[2] Kocarev L，Parlitz U 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **74** 5208

[3] Fujisaka H，Yamada T 1983 *Prog*. *Theory Phys*. **69** 32

[4] Femat R，Alvarez-Ramirez J，Fernandez-Anaya G 2000 *Physica* D **139** 231

[5] Femat R，Alvarez-Ramirez J 1997 *Phys*. *Lett*. A **236** 307

[6] Yang T，Shao H H 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 742 (in Chinese) [杨　涛、邵惠鹤 2002 物理学报 **51** 742]

[7] Li S H，Cai H X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1687 (in Chinese) [李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687]

[8] Gao J F，Liang Z H 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2454 (in Chinese) [高金峰、梁占红 2004 物理学报 **53** 2454]

[9] Li G H 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1002 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 1002]

[10] Wei R，Wang X Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3298 (in Chinese) [魏　荣、王行愚 2004 物理学报 **53** 3298]

[11] Yin X H，Ren Y，Shan X M 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1948 (in Chinese) [尹逊和、任　勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1948]

[12] Wu Z Q，Yue D，Xu S F 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1193 (in Chinese) [吴忠强、岳　东、许世范 2002 物理学报 **51** 1193]

[13] Guan X P，Fan Z P，Zhang Q L *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2216 (in Chinese) [关新平、范正平、张群亮等 2002 物理学报 **51** 2216]

[14] Guan X P ，Zhang Q L，Fan Z P *et al* 2001 *J*. *China Inst*. *Commun*. **22** 55 (in Chinese) [关新平、张群亮、范正平等 2001 通信学报 **22** 55]

[15] Zhao L Y，Li X R，Zhao G Z 2003 *J*. *Circ*. *Syst*. **8** 41 (in Chinese) [赵辽英、历小润、赵光宙 2003 电路与系统学报 **8** 41]

[16] Jiang G P，Wang S P 2000 *J*. *China Inst*. *Commun*. **21** 79 (in Chinese) [蒋国平、王锁萍 2000 通信学报 **21** 79]

[17] Mei S W，Shen T L，Liu K Z 2003 *Modern Robust Control Theory and Application* (Beijing :Tsinghua University Press) (in Chinese) [梅生伟、申铁龙、刘康志 2003 现代鲁棒控制理论与应用 (北京 :清华大学出版社)]

[18] Bymes C I，Isidori A，Willems J C 1991 *IEEE Trans*. *Automat*. *Contr*. **36** 1228

[19] Van D，Schaft A J 1996 *L_2 Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control* (New York :Spinger-Verlag)

[20] Hu Y M 2002 *Nonlinear Control Systems Theory and Application* (in Chinese) (Beijing :National Defence Industry Press) [胡跃明 2002 非线性系统理论与应用 (北京 :国防工业出版社)]

[21] Isidori A 1995 *Nonlinear Control Systems* (3rd ed) (London :Springer-Verlag)

The synchronization of hyper-chaotic system of cellular neural network based on passivity

Wu Zhong-Qiang Tan Fu-Xiao Wang Shao-Xian

(*Institute of Electric Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 8 April 2005; revised manuscript received 12 December 2005)

Abstract

Based on a certain characteristic of cellular neural network hyper-chaotic system, an error system for the drive system and response system is got, and the problem of synchronization of hyper-chaotic system is put forward thereupon. The problem is to ensure the global approximate stability of the synchronization error system. A kind of passivity method is adopted to design stable feedback controller to ensure global approximate stability of the error system. The simulation result of the hyper-chaotic system of four order cellular neural network testifies the validity of the method.

Keywords: synchronization of chaotic system, error system, passivity, hyper-chaotic system of cellular neural network

PACC: 0545