

用一类特定的双耦合 Duffing 振子系统检测 强色噪声背景中的周期信号*

李 月¹⁾ 路 鹏¹⁾ 杨宝俊^{2)†} 赵雪平²⁾

1) 吉林大学信息工程系, 长春 130012)

2) 吉林大学地球物理系, 长春 130026)

(2005 年 8 月 20 日收到, 2005 年 12 月 1 日收到修改稿)

通过分析耦合参数作用、系统所呈现大尺度周期相态的复杂性以及与系统在无噪声条件下状态的比较, 得出耦合振子系统的动力学行为比同类单振子系统的复杂, 周期相态更稳定、抗噪能力更强. 用构造的一类含特定恢复力项双中强度耦合 Duffing 振子系统检测色噪声背景中的谐波、方波信号, 信噪比分别达到 -111.0 和 -108.45 dB.

关键词: 特定双耦合 Duffing 振子系统, 色噪声, 周期信号, 信噪比

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 用耦合振子系统描述和处理生物学、化学以及光学、凝聚态物理学等众多领域的物理过程^[1], 从而增加了对耦合振子系统的关注. 各国学者对耦合振子系统的研究大致包括两方面工作, 即系统的动力学行为和系统的控制与同步.

强耦合 Duffing 振子之间大的相差可使耦合振子从混沌运动变至周期运动, 系统的耦合项可抑制相差影响, 使系统发生延迟同步^[1]. 对于双耦合 Van der Pol-Duffing 振子系统当耦合加强时, 系统将产生一个相同频率信号, 它与系统信号振幅包络的同步调制有关, 此类同步行为是振幅包络同步^[2]. 何岱海、占萌等^[3, 4]研究了 Rössler 振子的弱耦合问题, 发现弱耦合可使系统具有广义扩展相态 (generalized splay phase state), 其特点是所有振子轨道相同而不同振子间的相位具有函数关系, 极弱耦合可改变系统动力学性质, 使一高维超混沌系统趋于一有序的周期相态, 利用所建立的耦合势函数 (coupling potential function) 可表达上述特点.

对受弱周期扰动的耦合 Duffing 振子系统, 在同宿轨道附近构造了一般解, 包括不稳定周期部分和

嵌入混沌吸引子中的稳定部分, 对系统参数和初始条件的敏感性使解的稳定性难以确定, 这为由改变系统参数或初始条件去控制系统的同步提供了条件^[5]. 研究同步耦合的稳定性发现^[6], 等耦合系统的同步行为是稳定的, 耦合 Oregon 振子系统同步行为稳定性条件可由 Floquet 乘子加以判定. Lyapunov 指数和广义旋转数 (generalized winding number) 相结合分析耦合 Duffing 振子系统得出^[7], 同步混沌失稳时将发生 Hopf 分岔, 之后系统的功率谱具有一个特征频率, 其值等于分岔前临界横模 (critical transverse modes) 的广义旋转数.

应用开闭回路和自适应控制实现了双耦合 Duffing 振子的吸引子转移 (migration), 即周期轨道和混沌轨道向一个同时存在的周期轨道的转移^[8]. 进一步研究具有 6 个共存混沌吸引子的双耦合 Duffing 振子系统, 2 个吸引子的吸引盆是简单的分立直线, 另外 4 个较为复杂, 其中与 2 个吸引子相应的子系统相变完全同步, 而另外 2 个则异步^[9]. 由对称和不对称耦合 Duffing 振子系统所得到的混沌域远比原单振子系统少, 对于双耦合系统, 仅由激励项增加系统复杂性将使系统离开混沌态, 这一结果可引申到非线性系统的控制应用, 即构成系统的各分立质体

* 国家自然科学基金 (批准号 40374045, A0574051) 和吉林省科技发展计划 (批准号 20050526) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yangbaojun@jlu.edu.cn

(mass)具有某一基本激励频率,则系统可离开混沌态^[10].耦合的 Van der Pol-Duffing 振子系统,当两振子的固有频率很接近时,可以发生耦合系统的锁频周期分岔运动或拟周期分岔运动^[11].

以上所述表明,耦合振子系统的动力学行为远比单振子系统复杂,它的同步和控制过程为在不同领域中的应用提供了可能.迄今为止作者未见到应用耦合振子系统检测微弱信号报道.本文在粗略分析双耦合 Duffing 振子系统的动力学行为后,应用一类特定的双中等强度耦合 Duffing 振子系统检测湮没在强噪声背景中的谐波信号和方波信号,并取得比较满意的结果.

2. 双耦合 Duffing 振子系统动力学行为分析

双耦合 Duffing 振子系统利用两个 Duffing 振子互相联系、互相控制的工作过程,提高系统在临界分岔处的稳定性,为混沌振子系统检测微弱信号提供新的途径.为将耦合振子用于弱信号检测,先分析双耦合 Duffing 振子的动力学行为.

双耦合 Duffing 振子系统模型^[11]

$$\begin{aligned} \ddot{x} + kx - ck(u - x) - x + x^3 &= \gamma \cos(\omega t), \\ \ddot{u} + ku - ck(x - u) - u + u^3 &= \gamma \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \phi], \end{aligned} \quad (1)$$

式中, ϕ 和 $\Delta\omega$ 是双耦合振子的初始相差和频差, c 为耦合系数,阻尼比 k 取为0.5.

2.1. 耦合系数与系统动力学行为的关系

若 $c = 0$,则两振子之间不存在耦合作用,此时系统的动力学行为与单 Duffing 振子系统相同. $c \neq 0$,而 $\phi = \Delta\omega = 0$,系统的变量 x, u 会在耦合作用的影响下随时间趋于同步.图1为系统(1)中 $(x - u)$ 随时间变化曲线.由图1可见 $(x - u)$ 约在 $t > 10$ s后趋于零.

2.2. 相似性函数(similarity function)曲线

以 x 与 u 的自变量(时间)的平移量 τ 作为自变量,定义相似性函数^[11]

$$S(\tau) = \frac{[x(t + \tau) - u(t)]^2}{[x^2(t) + u^2(t)]^2}, \quad (2)$$

式中, \cdot 表示对时间的平均, $S(\tau)$ 表示在一个时间

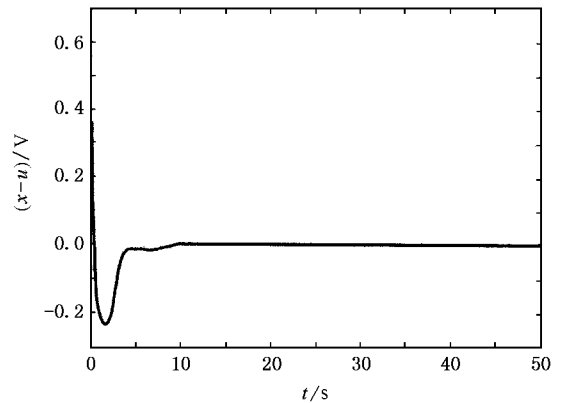


图1 系统1变量 $(x - u)$ 的(时间)历程曲线

段内 $x(t)$ 与 $u(t)$ 在时延 τ 条件下的平均偏差.图2给出了 $S(\tau)$ 与耦合参数 c 、时间平移 τ 之间的关系.由图2可以看出,耦合参数越大(耦合强度越大)系统内不同振子间同步性越强;当 $c \rightarrow \infty$ 时,系统发生完全同步.

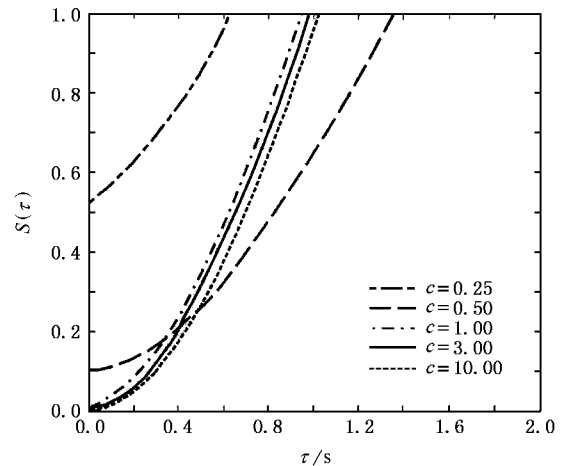


图2 不同耦合参数的相似性曲线

2.3. 初始相差、频差的变化对系统行为的影响

$\phi \neq 0, \Delta\omega = 0$,则即使对于较大的耦合参数,双振子的完全同步行为也会遭到破坏. $\Delta\omega \neq 0, \phi = 0$,对于小耦合参数两混沌振子运动不相关;对于大强度耦合参数,两振子在不同的状态间随机运动,而且各状态的持续时间为 $T = 2\pi/\Delta\omega$.

3. 双耦合 Duffing 振子系统与单振子系统性能比较

单振子 Duffing 方程可表示如下:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(t). \quad (3)$$

双耦合 Duffing 振子系统为

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - (u - x) - x - x^3 = \gamma \cos(t), \quad (4)$$

$$\ddot{u} + 0.5\dot{u} - (x - u) - x + x^3 = \gamma \cos(t).$$

在两种检测模型(3)(4)式中 $\gamma \cos(t)$ 包含内置周期策动力和作为外加周期策动力并入系统的待测信号. 由于仿真目的是比较两种检测系统的稳定性和抗噪性能, 而不是检测微弱信号, 所以未将微弱信号单独写出. 对于微弱信号混沌检测, 系统经临界相态将进入大尺度周期状态, 此状态的稳定性对于系统行为的判定很重要, 这里分别利用两种系统在不同强度噪声背景中的稳定性进行分析.

经大量数值实验确定外加策动力临界幅值为 0.8260 V; 比较两系统的噪声强度分别为 0.01 和 0.001 W. 两个系统在不同噪声强度背景中的周期运动相态见图 3 和图 4. 由图 3、图 4 可见, 在不同强度噪声背景中, 双耦合 Duffing 振子系统都保持着良好的周期运行状态, 而单 Duffing 振子的周期相态则存在一定的不稳定性.

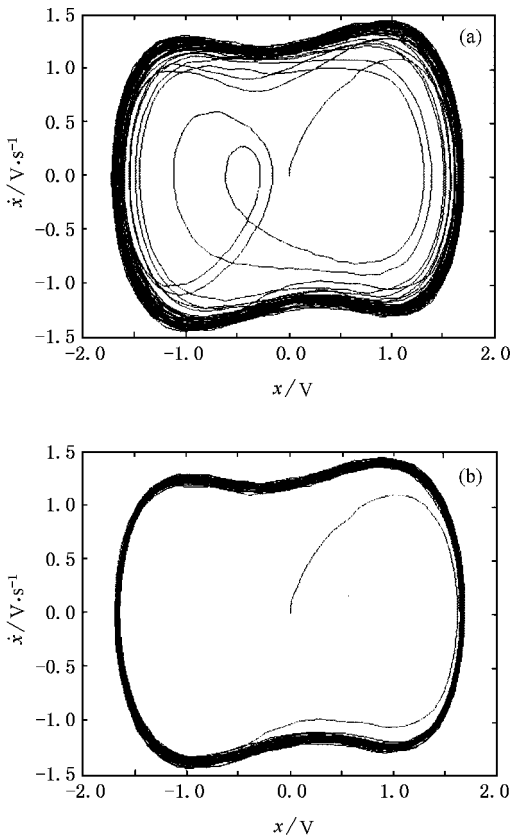


图 3 噪声等级为 0.001 W 时系统相态图 (a) 单 Duffing 振子, (b) 双耦合 Duffing 振子

由于存在噪声, 使两类混沌振子系统周期相态

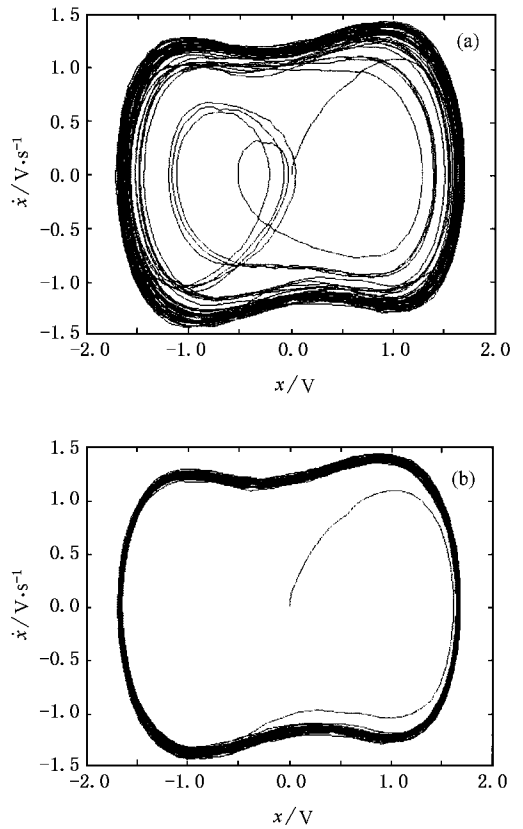


图 4 噪声等级为 0.01 W 时系统相态图 (a) 单 Duffing 振子, (b) 双耦合 Duffing 振子

轨道虽然在无噪声相态轨道附近, 但都略显粗糙. 为进一步衡量两种系统相对于不含噪声系统的偏移程度, 利用含噪声与不含噪声两个系统 $x(t)$ 均方差作为衡量标准, 即

$$\zeta = [x_0(t) - x_n(t)]^2. \quad (5)$$

取系统运行时间为 300 s, $\zeta - \sigma_n$ 关系曲线如图 5 所

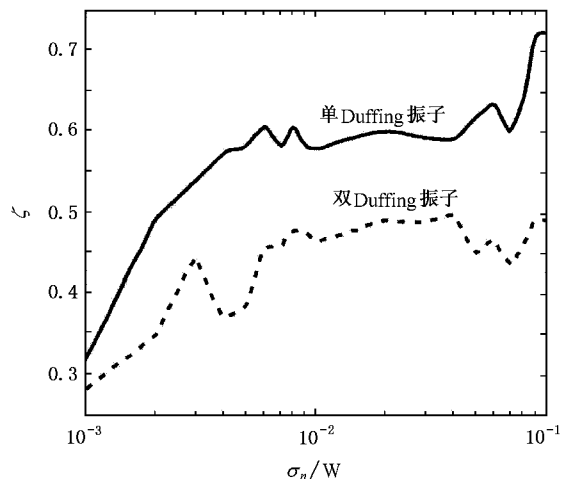


图 5 两种振子系统在不同噪声等级下 ζ 值的变化

示.由图5可见,两种系统的抗噪声能力都随噪声强度增加而降低,说明混沌振子系统抗噪声能力有一定限制.相比之下,双振子系统抗噪声能力优于单振子系统,一方面双振子的 ζ 值低于单振子系统,另一方面是它的 ζ 值随 σ_n 的增大而缓慢升高.

4. 一类特定双中强度耦合 Duffing 振子系统检测色噪声背景中的微弱谐波信号

借助于含较高次幂的恢复力项的 Duffing 振子^[12]构造一类特定的双中强度耦合 Duffing 振子系统,其数学模型为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 0.5\dot{x} - (u - x) - x^3 + x^5 \\ = \gamma_1 \cos(\omega t) + a \cos(\omega t) + n(t), \\ \ddot{u} + 0.5\dot{u} - (x - u) - u^3 + u^5 \\ = \gamma_2 \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

式中,耦合系数 $c = 2$; $\gamma_1 \cos(\omega t)$, $\gamma_2 \cos(\omega t)$ 为内置信号,为调试和叙述简便令 $\gamma_1 = \gamma_2$; a 为待测谐波振幅; $n(t)$ 为色噪声.

对由(6)式所构造的系统进行仿真实验时,选择从临界周期到周期的轨迹相变为判断系统输入是否带有谐波信号的依据,亦即 γ_1, γ_2 将设置在临界分岔状态附近.当待测信号加入系统中经过暂态过程以后,系统稳定在某一运动形式上,计算机通过辨识系统容易得知系统是处于混沌还是大尺度周期运动状态.由此,可判断输入是纯噪声还是混有微弱周期信号.

具体过程为通过信号发生器发出两类信号,第一类为纯随机噪声信号,第二类为谐波信号加噪声信号.然后通过系统对这两类信号的反应考察该方法的有效性,并检测第二类信号幅值大小.先将系统内部周期策动力预先设定在一临界状态处.不加入任何外部信号运行,计算机判断系统处于混沌状态.然后加入第一类信号输入,再观察系统的状态,噪声虽然强烈,但奇怪吸引子将相点牢牢地束缚在大尺度周期轨道之内,系统保持混沌状态.输入第二类信号后,相点很快稳定在大周期轨道,系统状态变为周期运动.为了检测第二类信号中有用信号幅值的大小,计算机自动将系统驱动力幅值每次减少一定数值,循环多次直到系统由周期变为混沌状态,此时将系统原驱动力幅值减去当前幅值就可以求得待测信号的大小.

实际中,很难有理想白噪声^[13],正常情况下是难以预知的色噪声.由混沌状态跃迁到稳定的周期运动状态,在没有噪声的情况下周期轨道应该是一理想的环,但由于噪声的影响该环的边界显得有些粗糙.我们用方差为1的 Gauss 白噪声通过一个四阶带通滤波器产生 Gauss 色噪声.该滤波器的传递函数为

$$\begin{aligned} H(Z) \\ = \frac{0.020(1 - 2Z^{-1} + Z^{-4})}{1 - 1.637Z^{-1} + 2.237Z^{-2} - 1.3072Z^{-3} + 0.641Z^{-4}}. \end{aligned} \quad (7)$$

滤波器的上限截止频率为0.2,下限截止频率为0.15(均为归一化频率).不加入任何外部信号,调整系统内置信号幅度 γ 使系统处于临界状态,计算机判断系统处于混沌临界状态,然后将 Gauss 色噪声并入系统,发现系统相轨迹仍处于混沌状态(此时噪声功率为 7×10^{-8} W).再将微弱谐波信号并入系统,并测得使系统发生相变的最小幅值为 1×10^{-9} V.可见该混沌系统在背景噪声为 Gauss 色噪声时,检测下限可以达到1 nV,相应的信噪比约为-111 dB.

5. 双中强度耦合 Duffing 振子系统检测色噪声背景中的微弱方波信号

方波信号的检测在无线通信、雷达系统等领域应用广泛.检测系统所采用的数学模型为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 0.5\dot{x} - (u - x) - x^3 + x^5, \\ = \gamma_1 s(t) + a s(t) + n(t), \\ \ddot{u} + 0.5\dot{u} - (x - u) - u^3 + u^5, \\ = \gamma_2 s(t), \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $s(t)$ 为单位幅值的方波信号, a 为待检测方波信号幅值, $\gamma_1 s(t)$, $\gamma_2 s(t)$ 为内置信号, $n(t)$ 为色噪声.具体检测步骤与谐波类似. Gauss 色噪声 $n(t)$ 同于谐波检测中的(7)式.

仿真实验结果显示, Gauss 色噪声平均功率为 7×10^{-8} W, $a = 1 \times 10^{-9}$ V, 信噪比为

$$20 \lg \frac{1 \times 10^{-9}}{\sqrt{7 \times 10^{-8}}} \approx 108.45 \text{ dB}.$$

6. 讨 论

对于同类混沌振子,耦合系统具有比单振子系

统复杂的动力学行为,利用耦合振子间的连接和制约关系,得到比单振子系统相态稳定与较强抗噪声能力的优点.检测湮没在色噪声背景中的谐波和方波信号,两种检测系统的结果列于表 1^[13].检测色噪声背景中的微弱谐波信号,检测信噪比十分接近,而对于方波信号检测,双耦合振子系统明显优于单振子系统.

表 1 单振子和双耦合振子系统检测信噪比比较

检测系统	强噪声	信噪比	信噪比
种类	种类	(谐波)/dB	(方波)/dB
单振子 ^[14]	色噪声	-111.5	-88.45
双耦合振子	色噪声	-111.0	-108.45

根据对单振子系统的研究^[14-16],构造双耦合

Duffing 振子检测系统时尚需对阻尼比、恢复力项系数,特别是耦合系数应进行一定量的调试.由调试结果选择可以构造较优检测系统几个参量的数值,有可能进一步提高双耦合振子系统的检测能力.

7. 结 论

1) 耦合振子系统的动力学行为比同类单振子系统的复杂.在相同噪声背景中,双耦合 Duffing 振子系统与单 Duffing 振子系统相比,稳定性高、抗干扰能力强.

2) 应用一类特定双中强度耦合 Duffing 振子系统检测强色噪声背景中的谐波、方波信号,信噪比分别达到 -111.0 和 -108.45 dB.

- [1] Yin H W , Dai J H 1998 *Phys. Rev. E* **58** 5683
- [2] Gonzalez-Miranda J M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036232
- [3] He D H , Hu G , Zhan M *et al* 2001 *Physica D* **156** 314
- [4] Zhan M , Hu G , Zhang Y *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1510
- [5] Fang J S , Fang Z , Liu X J *et al* 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1438
- [6] Zhou T S , Zhang S C , Tang Y 2003 *J. Sys. Sci. Math. Sci.* **23** 65 (in Chinese) [周天寿、张锁春、唐云 2003 系统科学与数学 **23** 65]
- [7] Ma W Q , Yang J Z , Liu W J *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 787 (in Chinese) [马文麒、杨俊忠、刘文吉等 1999 物理学报 **48** 787]
- [8] Paul R S , Rajasekar S 1997 *Phys. Rev. E* **55** 6237
- [9] Paul R S , Rajasekar S , Murali K 1999 *Phys. Lett. A* **264** 283
- [10] Musielak D E , Musielak Z E , Benner J W 2005 *Chaos Solitons Fract.* **24** 907
- [11] Gan C B , Lu Q S , Huang K L 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 63 (in Chinese) [甘春标、陆启韶、黄克累 1999 应用数学和力学 **20** 63]
- [12] Li Y , Yang B J 2003 *Chin. Sci. Bull.* **48** 508
- [13] Zhang Z J 2002 *The Processing and Interpretation Method for the Anisotropic Media Using Multi-component Seismic Data* (Harbin : Publishing House of Heilongjiang Education) pp15—35 (in Chinese) [张中杰 2002 多分量地震资料的各向异性处理和解释方法 (哈尔滨 : 黑龙江教育出版社) 第 15—35 页]
- [14] Li Y , Yang B J , Shi Y W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 526 (in Chinese) [李月、杨宝骏、石要武 2003 物理学报 **52** 526]
- [15] Li Y , Yang B J , Lin H B *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 (in Chinese) [李月、杨宝骏、林红波等 2005 物理学报 **54** 1994]
- [16] Li Y , Yang B J , Deng X Y *et al* 2004 *Chin. Phys.* **13** 1368

Applying a special kind of two coupled Duffing oscillator system to detect periodic signals under the background of strong colored noise^{*}

Li Yue¹⁾ Lu Peng¹⁾ Yang Bao-Jun^{2)†} Zhao Xue-Ping²⁾

¹⁾ *Department of Information and Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China*

²⁾ *Department of Geophysics, Jilin University, Changchun 130026, China*

(Received 20 August 2005 ; revised manuscript received 1 December 2005)

Abstract

The paper shows that the coupled oscillator systems are more complicated in the dynamic behaviors, more stable in periodic phases and stronger in the anti-noise capacity than the same kind of single oscillator systems by analyzing the function of coupled parameters, the complexity of the large-scale periodic phase states of the system and the comparison with the states of the system under the condition of no noise. Moreover, the harmonious wave and square wave signals are detected under the background of colored noise, applying a kind of constructed middle-intensity two coupled Duffing oscillator system including a special resilience force item. The signal-to-noise ratio reaches to -111.0 and -108.45 dB, respectively.

Keywords : special two coupled Duffing oscillator system, colored noise, periodic signal, signal-to-noise ratio

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40374045 40574051) and the Science and Technology Development Program of Jilin Province, China (Grant No. 20050526).

[†] Corresponding author. E-mail : yangbaojun@jlu.edu.cn