

# 具有突变结构开放腔的矩阵分析

刘迎辉 李宏福 李 浩 王峨锋 徐 勇 王 晖 王 丽

(电子科技大学高能电子学研究所, 成都 610054)

(2004 年 12 月 28 日收到, 2005 年 12 月 5 日收到修改稿)

利用模式展开与场匹配原理, 建立了突变波导的散射矩阵( $S$  参数矩阵), 在此基础上分析研究了具有突变结构的波导开放式谐振腔, 并由矩阵级联建立了开放腔总的  $S$  参数矩阵. 通过 Matlab 编制计算程序对具有多级突变结构的开放式输出腔进行了数值计算和分析, 并通过与实验数据和软件模拟的结果比较对该方法得到的数据结果进行了验证.

关键词: 回旋管, 开放式谐振腔, 突变结构,  $S$  参数矩阵

PACC: 1120, 7210

## 1. 引 言

自文献 [1—4] 提出了以电子在静磁场中作回旋运动的相对论效应为电子回旋谐振受激辐射的机理, 电子回旋脉塞及以此为基础的回旋管的发展至今已有 40 多年的历史, 经过 40 多年的不懈努力, 电子回旋脉塞已发展出一类新型的毫米波、亚毫米波器件. 该类器件可以广泛地应用于雷达、电子战及微波能武器、受控核聚变电子回旋谐振加热、致密特种陶瓷材料的加工烧结等领域.

回旋振荡管和回旋速调管都是以谐振腔为相互作用高频系统的回旋脉塞器件, 它们均利用电子注与谐振腔中驻波场的互作用来产生或放大电磁波. 在这些开放腔中, 不少都具有突变结构. 在实际工作中, 对具有突变结构的开放腔和复合腔的谐振频率及  $Q$  值的计算是一项非常重要的内容. 有关复合腔回旋管已有较多报道<sup>[5—8]</sup>, 但通常对其中谐振腔体部分的分析所采用的由耦合波理论出发推导出腔中高频驻波场幅值纵向分布所满足的普适方程组, 再以边界条件为约束使用优化算法反复迭代数值求解方程组, 最终求出满足一定精度的优化解的方法. 这种方法对多模情况因计算量较大、耗时而不便于快速方便的求解, 且在处理连接两突变的中间传输段时, 通常假设其距离较长而只需考虑单个或少量的可传输模式, 不适合传输段较短两突变面距离较近时传输和截止模式均参与的多模进行能量传输和交换的情况. 而在解决微波器件中广泛存在的不规则

问题时通常采用的有限元法, 为了提高计算的准确性, 需要划分大量的几何元, 因此计算时也会耗费和占用大量的时间和计算机资源.

使用本文提出的散射矩阵( $S$  参数矩阵)法, 通过将场中多模式展开并利用模匹配法和矩阵级联, 生成整个腔体的  $S$  参数矩阵来处理具有突变结构的开放式谐振腔, 既可数值求解谐振腔谐振频率和  $Q$  值等物理参量, 又可通过绘制腔体中的各模式场幅值曲线和  $S$  参数曲线图直观地反映出整个腔体物理特性, 能够方便快捷地得到要求的结果. 对于腔中的渐变部分, 可将腔体渐变曲线部分划分为多个微小的突变台阶来近似, 划分的突变台阶越多, 则近似的准确性越高. 通过对各个微小突变级联的计算, 可得到整个渐变曲线部分的特性. 因此, 本文的分析既适用于突变腔, 也适用于渐变腔. 计算中,  $S$  参数矩阵法将场用一系列模式展开, 当腔体半径恰好等于某一模式的截止半径时, 就会出现截止模式的波阻抗为零或无穷大的情况. 当阻抗为零时, 需要使用电流幅值系数展开计算; 当阻抗为无穷大时, 使用电压幅值系数展开, 并通过波导纳进行计算. 因此, 本文解决了在特殊情况下使用  $S$  参数矩阵进行计算的问题<sup>[9]</sup>.

## 2. 多级突变结构 $S$ 参数矩阵公式推导

规则圆波导的突变结构如图 1 所示, 在图中波导突变两侧存在有一系列的入射波和散射波, 其中  $F_1$  和  $F_2$  分别代表一区和二区中的入射波(朝向突变面)的模式幅值,  $B_1$  和  $B_2$  分别代表一区和二区

中的散射波(背向突变面)的模式幅值.

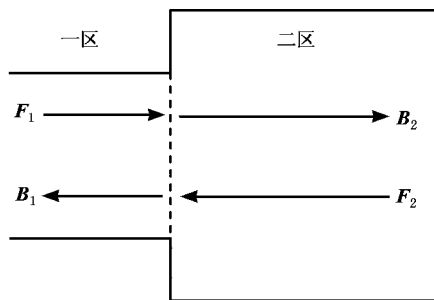


图1 规则波导突变结构及传播模式

假设将突变结构两边的横向电磁场  $E$  和  $H$  按以下形式展开<sup>[10]</sup>.在一区有

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^M \sqrt{Z_{i1}} (F_{i1} + B_{i1}) e_{i1}, \\ H_1 &= \sum_{i=1}^M \left( \frac{F_{i1} - B_{i1}}{\sqrt{Z_{i1}}} \right) h_{i1}. \end{aligned} \quad (1)$$

在二区有

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{j=1}^N \sqrt{Z_{j2}} (F_{j2} + B_{j2}) e_{j2}, \\ H_2 &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{B_{j2} - F_{j2}}{\sqrt{Z_{j2}}} \right) h_{j2}. \end{aligned} \quad (2)$$

这里,  $Z$  代表特征阻抗,  $e, h$  分别代表电波、磁波的波矢量函数,  $M, N$  为选取的模式个数, 下标 1, 2 分别代表所属区域为一区或二区.

应用电场与磁场在边界满足的连续性条件, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{I} [F_1 - B_1] &= \sqrt{Z_1} \mathbf{R} \sqrt{Y_2} [B_2 - F_2], \\ \mathbf{I} [F_1 + B_1] &= \sqrt{Y_1} \mathbf{R} \sqrt{Z_2} [F_2 + B_2]. \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{I}$  代表单位阵,  $F$  和  $B$  是由选取模式的行波幅值系数组成的矩阵,  $Z$  为包含各模式阻抗系数的对角线矩阵,  $Y$  为包含各模式导纳系数的对角线矩阵,  $R$  为传输系数矩阵,

$$R_{ij} = \iint_{S_0} e_{i1} \cdot e_{j2}^* ds,$$

式中  $S_0$  为突变处小腔体所包含的面积.

将(3)式整理成如下 S 参数矩阵方程形式:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

可得到

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{I} + P_1][\mathbf{I} - P_1] & \mathbf{I}[\mathbf{I} + P_1]^{-1}P_0 \\ \mathbf{I}[\mathbf{I} + P_2]^{-1}P_n & [\mathbf{I} + P_2][P_2 - \mathbf{I}] \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

对于归一化后的行波幅值系数,

$$\begin{aligned} P_n &= \sqrt{Y_2} R^{-1} \sqrt{Z_1}, \\ P_0 &= \sqrt{Z_1} R \sqrt{Y_2}, \\ P_1 &= P_0 \times P_n, \\ P_2 &= P_n \times P_0. \end{aligned} \quad (6)$$

将(6)式求解得到的结果代入到(5)式的 S 参数矩阵中, 便可得到代表波导中模式耦合情况的归一化后的单级 S 参数矩阵. 此时波导中的总功率即为所有反射和透射的模式幅值的平方和.

若一区中 TM 波的某一模式传播常数  $\gamma \rightarrow 0$ , 则此时该模式的  $Z_{i1} \rightarrow 0$ , 将突变结构两边的横向电磁场  $E$  和  $H$  用电流幅值系数展开. 在一区有

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^M Z_{i1} (F_{i1} + B_{i1}) e_{i1}, \\ H_1 &= \sum_{i=1}^M (F_{i1} - B_{i1}) h_{i1}. \end{aligned} \quad (7)$$

在二区有

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{j=1}^N Z_{j2} (F_{j2} + B_{j2}) e_{j2}, \\ H_2 &= \sum_{j=1}^N (B_{j2} - F_{j2}) h_{j2}. \end{aligned} \quad (8)$$

应用电场与磁场在边界满足的连续性条件, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{I} [F_1 - B_1] &= \mathbf{R} [B_2 - F_2], \\ Y_2 P Z_1 [F_1 + B_1] &= \mathbf{I} [F_2 + B_2]. \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$\begin{aligned} Q &= Y_2 P Z_1, \\ a &= [P + Q]^{-1}, \\ b &= Q \times R, \\ c &= [b + I]^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

可求解出 S 参数矩阵方程

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a[P - Q] & 2a \\ 2cQ & c[b - I] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中  $P$  为耦合系数矩阵,

$$P_{ji} = \iint_{S_0} e_{i1}^* \cdot e_{j2} ds.$$

当矢量波型函数为实数时,  $P$  矩阵与  $R$  矩阵互为转置关系.

若一区中 TE 波的某一模式传播常数  $\gamma \rightarrow 0$ , 则此时该模式  $Z_{i1} \rightarrow \infty$ , 将突变结构两边的横向电磁场

$E$  和  $H$  用电压幅值系数展开. 一区为

$$E_1 = \sum_{i=1}^M (F_{i1} + B_{i1}) e_{i1}, \quad (12)$$

$$H_1 = \sum_{i=1}^M (F_{i1} - B_{i1}) / Z_{i1} h_{i1}.$$

二区为

$$E_2 = \sum_{j=1}^N (F_{j2} + B_{j2}) e_{j2}, \quad (13)$$

$$H_2 = \sum_{j=1}^N (B_{j2} - F_{j2}) / Z_{j2} h_{j2}.$$

同样应用电场与磁场在边界满足的连续性条件, 可得

$$\begin{aligned} Z_2 P Y [F_1 - B_1] &= [B_2 - F_2] \\ [F_1 + B_1] &= R [F_2 + B_2]. \end{aligned} \quad (14)$$

令

$$Q = Z_2 P Y_1, \quad (15)$$

可求解出  $S$  参数矩阵方程

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a[Q - P] & 2a \\ 2cQ & d[I - b] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

在以上分析中, 假定一区中出现  $\gamma = 0$  的情况, 对于其他区域中出现  $\gamma = 0$  的情况, 可用同样的办法进行处理.

如图 2 所示, 若两突变中间连接的过渡段, 假设其长度为  $l$ , 则  $D$  为以  $\exp(-\gamma l)$  作对角线元素的对角线矩阵,  $\gamma$  为中间连接的过渡段中模式的传播常数 (复数). 下面分析两个突变相连接的情况.

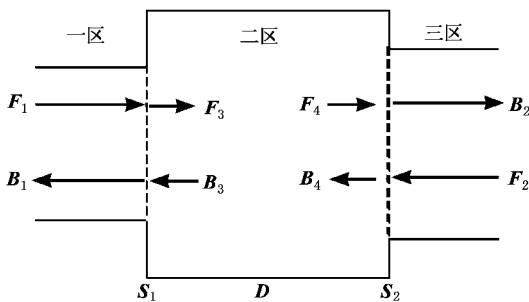


图 2 过渡段两侧连接突变结构

对于左侧突变, 有

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,11} & S_{1,12} \\ S_{1,21} & S_{1,22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

对于右侧突变, 有

$$\begin{pmatrix} B_4 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{2,11} & S_{2,12} \\ S_{2,21} & S_{2,22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_4 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

对于中间过渡段, 有

$$\begin{aligned} F_4 &= D F_3, \\ B_3 &= D B_4. \end{aligned} \quad (19)$$

综合(17)–(19)式可得到

$$\begin{aligned} B_1 &= S_{1,11} F_1 + S_{1,12} F_3, \\ B_2 &= S_{2,21} F_4 + S_{2,22} F_2, \\ B_3 &= S_{1,21} F_1 + S_{1,22} F_3, \\ B_4 &= S_{2,11} F_4 + S_{2,12} F_2, \\ F_4 &= D F_3, \\ B_3 &= D B_4. \end{aligned} \quad (20)$$

消去(20)式中参数  $F_3, F_4$  和  $B_3, B_4$ , 整理后可得到在波导过渡段  $D$  左右两侧分别连接突变  $S_1, S_2$  的情况下, 由  $S_1, S_2$  和  $D$  级联生成的  $S$  参数矩阵<sup>[10]</sup>

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,11} + S_c S_{2,11} D S_{1,21} & S_c S_{2,12} \\ S_d S_{1,21} & S_{2,22} + S_d S_{1,22} D S_{2,12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

式中,

$$\begin{aligned} S_a &= (I - D S_{2,11} D S_{1,22})^{-1}, \\ S_b &= (I - S_{1,22} D S_{2,11} D)^{-1}, \\ S_c &= S_{1,12} S_a D, \\ S_d &= S_{2,21} D S_b. \end{aligned} \quad (22)$$

若计算的各模式对于腔体中存在的传输损耗可以忽略, 则腔体中可传输模式的  $\gamma$  为纯虚数, 截止模式的  $\gamma$  为实数. 当计算的腔体中存在壁损耗较大时, 可将壁损耗系数加入到  $\gamma$  中.

当计算多个突变结构级联时, 利用(21)式可将任意多级  $S$  参数矩阵及  $D$  矩阵相互级联, 计算出整体的  $S$  参数矩阵, 从而可将多个突变结构级联后的整个腔体看作一个黑匣子. 通过扫频绘制出  $S$  参数特性曲线图, 能够快速直观地反映出整个谐振腔系统的传输特性, 并可得到相应的谐振频率和  $Q$  值<sup>[10]</sup>. 这样就为研究波导腔体的整体性能提供了便利.

### 3. 数值计算与讨论

图 3 所示为波导突变结构的一个计算实例<sup>[7]</sup>.

图 3(a) 为由左侧入射  $TE_{61}$  模 ( $a/\lambda = 1.2055 f_0 = 35 \text{ GHz}$ ), 改变半径  $b$  时, 各阶模式的功率与波导尺寸的关系. 图 3(b) 为由右侧入射  $TE_{62}$  模 ( $b/\lambda = 1.8744 f_0 = 35 \text{ GHz}$ ), 改变半径  $b$  时, 各阶模式的功

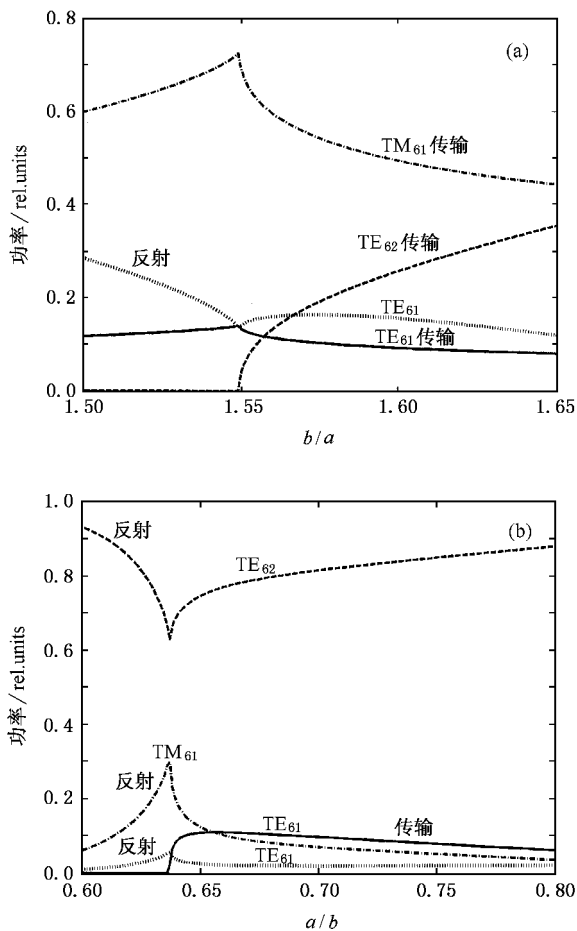


图 3 各阶模式的功率与波导尺寸的关系 (a) 突变结构左边入射 TE<sub>61</sub> 模时的情况 (b) 突变结构右边入射 TE<sub>62</sub> 模时的情况

率与波导尺寸的关系. 由图 3 的关系曲线可以看出, 在波导突变结构右侧 TM<sub>61</sub> 波占有相当的比例. 因此, 为了提高突变结构 TE<sub>61</sub>-TE<sub>62</sub> 模式的转换效率, 可以适当选择波导尺寸  $a, b$ , 以抑止 TM<sub>61</sub> 波, 从而可以得到较高的复合腔输出模式的纯度. 计算得到的结果与文献 [7] 给出的结果完全相同.

图 4 中的模型是具有突变结构的开放式输出腔模型. 当 TE<sub>01</sub> 波由左侧入射此圆柱波导时, 经波导三级突变结构后的反射系数、品质因数和谐振频率的计算结果如表 1 所示. 由表 1 中计算结果可以看出,

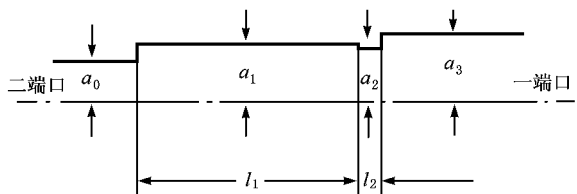


图 4 输出腔计算模型示意图

使用 S 参数矩阵法的计算结果与 HFSS8.0 的计算结果基本一致, 也与实验得到的结果符合较好<sup>[10]</sup>.

表 1 两种方法计算 TE<sub>01</sub> 模入射多级突变结构的结果

	S 参数矩阵法	HFSS8.0
反射系数	0.520	0.576
谐振频率/GHz	33.921	33.929
品质因数	165.95	171.01

图 5 是使用 Agilent8722ES S 参数矢量网络分析仪对开放腔测得到的 S 参数曲线. 图 6 和图 7 分别为由 S 参数矩阵法编制的程序和由 HFSS8.0 仿真软件绘制的 S 参数曲线, 从图 6、图 7 可以看出, 绘出的 S 参数曲线基本一致, 且与实验结果非常接近. 但当计算的结构尺寸较大时, 如果要得到较为准确的结果, HFSS8.0 仿真软件计算时间会远多于使用 S 参数矩阵法计算的时间. 如计算图 4 中的输出腔模型时, 在相同配置、同样计算精度要求条件下, 使用 S 参数矩阵法编制的程序约需 20 min 的时间完成计算, 而使用 HFSS8.0 仿真软件约需 500 min 的时间完成计算, 且会在计算中占用大量 CPU 和硬盘资源.

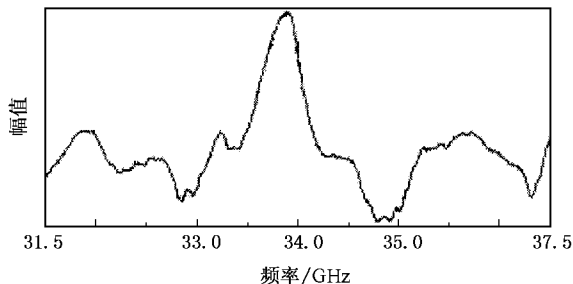


图 5 实验中测量得到的 S 参数曲线

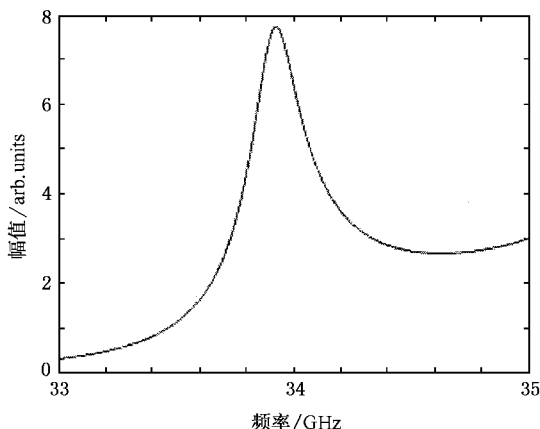


图 6 由 S 参数矩阵法编制的程序绘制的 S 参数曲线

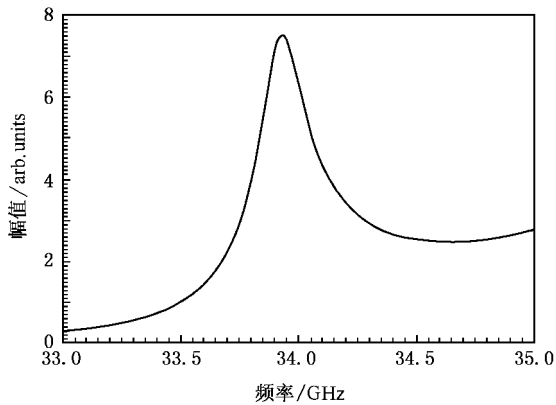


图 7 由 HFSS8.0 仿真软件绘制的 S 参数曲线

当设计要求在某一频率谐振的腔体时,可将腔体尺寸作为变量进行优化,计算出不同谐振频率下的腔体尺寸,从中选择所需要的腔体结构参数.表 2 为改变输出腔体半径  $a_1$  后计算得到的谐振频率值,当半径  $a_1$  取 0.98 时谐振频率可以满足设计要求.因此,使用 S 参数矩阵法可以根据谐振频率的设计要求优化腔体半径.

表 2 谐振腔半径优化结果

归一化半径 $a_1$	谐振频率/GHz
0.96	34.79
0.97	34.49
0.98	34.20
0.99	33.92
1.00	33.64

## 4. 结 论

本文主要研究了使用 S 参数矩阵处理具有突变结构开放腔的方法,简单推导了单级突变和多级突变级联的矩阵方程,并给出了存在壁损耗及渐变情况下的处理方法.通过对回旋管具有多级突变结构的开放式输出腔的实验结果、软件模拟和使用该方法编制计算程序的数据计算结果比较表明,由该方法计算可较快且较准确地得到所需的结果.因此,由该方法进行的理论分析和计算机模拟为回旋管的设计提供了依据.

- [ 1 ] Twiss R Q, Roberts J A 1958 *Aust. J. Phys.* **11** 424  
 [ 2 ] Schneider J 1959 *Phys. Rev. Lett.* **2** 504  
 [ 3 ] Pantell R H 1959 *Proc. IRE* **47** 1146  
 [ 4 ] Gaponov A V 1959 *Izv. VU Zov. Radiofiz.* **2** 836  
 [ 5 ] Li H F, Du P Z, Yang S W *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 312 (in Chinese) [ 李宏福、杜品忠、杨仕文等 2000 物理学报 **49** 312 ]  
 [ 6 ] Yu S, Li H F, Xie Z L *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2455 (in Chinese) [ 喻 胜、李宏福、谢仲怜等 2000 物理学报 **49** 2455 ]  
 [ 7 ] Yang S W, Li H F 1997 *Acta Electron. Sin.* **25** 76 (in Chinese)

- [ 杨仕文、李宏福 1997 电子学报 **25** 76 ]  
 [ 8 ] Luo Y, Li H F, Xie Z L *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 229 (in Chinese) [ 罗 勇、李宏福、谢仲怜等 2004 物理学报 **53** 229 ]  
 [ 9 ] Neilson J M, Latham P E, Caplan M *et al* 1989 *IEEE Trans. Microwave Theory. Techn.* **37** 1165  
 [ 10 ] Liu Y H 2004 *M. S. Dissertation* ( Chengdu : University of Electronic Science and Technology of China ) ( in Chinese ) [ 刘迎辉 2004 硕士学位论文( 成都 : 电子科技大学 ) ]

# Analysis of an open cavity with abrupt changes by S-matrix

Liu Ying-Hui Li Hong-Fu Li Hao Wang E-Feng Xu Yong Wang Hui Wang Li

( *Research Institute of High Energy Electronics , University of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 ,China* )

( Received 28 December 2004 ; revised manuscript received 5 December 2005 )

## Abstract

Based on the modal expansion and field matching technique , the S-matrix of a abrupt change is derived. The open resonator with a series of abrupt changes in radius is studied , and the S-matrix of the open cavity is derived by matrix cascading. A computer program was developed to calculate the scattering matrix of the cavity and the result shows good agreement with experiment and HFSS simulation.

**Keywords** : gyrotron , open resonator , abrupt change , S-matrix

**PACC** : 1120 , 7210