

# 光场与纠缠双原子相互作用过程中的熵演化特性<sup>\*</sup>

黄春佳 贺慧勇 周 明 方家元 黄祖洪

(长沙理工大学物理与电子科学系,长沙 410076)

(2005 年 4 月 21 日收到,2005 年 9 月 2 日收到修改稿)

研究了单模光场与纠缠双原子相互作用过程中熵的演化特性,讨论了双原子纠缠度与初始光场强度对场熵演化特性的影响.研究表明,双原子纠缠度影响场熵的平均值,而初始光场的强度则影响场熵演化的振荡特性.

关键词:单模辐射场,纠缠双原子,场熵演化

PACC:4250

## 1. 引 言

自从 Phoenix 和 Knight(P-K)<sup>[1,2]</sup>将熵理论应用于量子光学领域以来,光场与原子相互作用系统中场熵演化规律的研究已经取得了一系列有重要意义的结果<sup>[3-9]</sup>.根据 P-K 量子熵理论,在光场-原子相互作用系统中,光场(原子)熵演化行为反映了光场与原子关联程度的演化特性,熵越高关联就越强.如果光场和原子在初始时刻均处于纯态,彼此无关联,则光场-原子全系统的熵  $S$  为零且不随时间变化.根据 Araki-Lieb 不等式<sup>[10]</sup>

$$|S_a - S_f| \leq S \leq |S_a + S_f|, \quad (1)$$

在  $t > 0$  的任何时刻,光场与原子的熵相等.可见,光场-原子相互作用系统的初始状态对系统的演化性质具有非常重要的影响.

对于双原子系统而言,初始状态可以制备成纯态,也可以制备成纠缠态.由于在量子信息科学中原子纠缠态有着广泛的应用,因此研究处于纠缠态的双原子与光场相互作用系统的动力学具有实际意义.本文运用全量子理论,研究了单模光场与初始时刻处于纠缠态的双原子系统相互作用过程中场熵的演化规律,重点讨论了双原子初始纠缠度及光场初始强度对场熵演化行为的影响.结果表明:在光场-双原子相互作用系统中,光场-原子纠缠与原子-原子纠缠是相互关联的,而且这种关联是正的关联,即若双原子系统初始纠缠度大,则光场-原子纠缠度也

大,反之亦然,而初始光场强度主要影响场熵演化的振荡特性.

## 2. 态 矢

考虑单模光场与两个全同的二能级原子的相互作用.设原子-光场间的耦合常数为  $\epsilon$ .在旋波近似下,系统的哈密顿量为

$$H = H_0 + V, \quad (2)$$

式中,

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \omega_0 \sum_{l=1}^2 S_3^{(l)}, \quad (3)$$

$$V = \epsilon \sum_{l=1}^2 (a^\dagger S_-^{(l)} + a S_+^{(l)}). \quad (4)$$

这里,  $a^\dagger$  和  $a$  分别为光场的产生和湮没算符,  $S_3^{(l)}$  和  $S_\pm^{(l)}$  为第  $l$  ( $l=1, 2$ ) 个原子的赝自旋算符,  $\omega$  为光场频率,  $\omega_0$  为原子的本征跃迁频率,为了简便,只考虑共振情形,即  $\omega = \omega_0$ .

设初始时刻 ( $t=0$ ) 由  $A, B$  两个原子组成的双原子系统处于如下纠缠态:

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{\gamma} |e, e\rangle + \sqrt{1-\gamma} |g, g\rangle, \quad (5)$$

式中  $\gamma$  为表征双原子系统纠缠程度的参数,且  $0 \leq \gamma \leq 1$ .相应的密度算符为

$$\rho_a(0) = |\psi(0)\rangle \langle\psi(0)|. \quad (6)$$

子系统  $A$  和  $B$  的约化密度算符分别为

$$\rho_A(0) = \text{tr}_B \{\rho_a(0)\}, \quad (7)$$

$$\rho_B(0) = \text{tr}_A \{\rho_a(0)\}. \quad (8)$$

\* 湖南省教育厅科研基金(批准号 03A003, 03C064, 04C0121)资助的课题.

双原子系统的部分熵纠缠度则为<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} E_A(0) &= -\text{tr}\{\rho_A(0)\ln\rho_A(0)\} \\ &= -\text{tr}\{\rho_B(0)\ln\rho_B(0)\} \\ &= -[\gamma\ln\gamma + (1-\gamma)\ln(1-\gamma)]. \end{aligned} \quad (9)$$

$E_A(0)$ 随 $\sqrt{\gamma}$ 变化的关系曲线如图1所示.当取 $\sqrt{\gamma} = \sqrt{2}/2$ 时,部分熵纠缠度有最大值  $E_A(0)_{\max} \approx 0.6931$ .

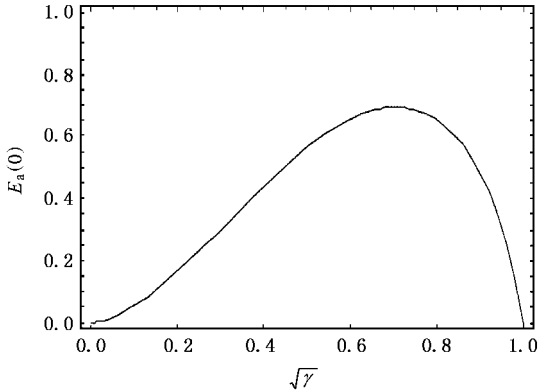


图1  $E_A(0)$ 随 $\sqrt{\gamma}$ 变化的关系曲线

若光场处于相干态,则原子-光场相互作用系统初始时刻的态矢可表示为

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\sqrt{\gamma}|e\rangle_e|n\rangle_m \\ &\quad + \sqrt{1-\gamma}|g\rangle_e|n\rangle_m), \end{aligned} \quad (10)$$

$$f_n = \exp(-n_0/2) \frac{n_0^{n/2}}{\sqrt{n!}} \exp(in\xi). \quad (11)$$

式中  $n_0$  为辐射场初始平均光子数;  $\xi$  为相位角,可为任意值,为简便起见,本文取  $\xi = 0$ .

设  $t$  时刻系统状态演化为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(n,t)|e\rangle_e|n\rangle_m + \beta(n,t)|g\rangle_e|n\rangle_m \\ &\quad + \gamma(n,t)|e\rangle_e|n\rangle_m + \delta(n,t)|g\rangle_e|n\rangle_m]. \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)式代入薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = V|\psi(t)\rangle, \quad (13)$$

可解得

$$\begin{aligned} \alpha(n,t) &= \alpha(n) + 2\beta(n)\cos[\sqrt{2(2n+3)}t] \\ &\quad (n=0,1,2,\dots), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \beta(n,t) &= \{(1-n)\alpha(n-2) \\ &\quad + 2n\beta(n-2) \\ &\quad \times \cos[\sqrt{2(2n-1)}t]\}/\sqrt{n(n-1)} \\ &\quad (n=2,3,4,\dots), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \gamma(n,t) &= \delta(n,t) = -i[\sqrt{2(2n+1)}\beta(n-1) \\ &\quad \times \sin[\sqrt{2(2n+1)}t]]/\sqrt{n} \\ &\quad (n=1,2,3,\dots), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\beta(0,t) = \sqrt{1-\gamma}f_0, \quad (17)$$

$$\beta(1,t) = \sqrt{1-\gamma}f_1\cos(\sqrt{2}t), \quad (18)$$

$$\gamma(0,t) = \delta(0,t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\gamma}f_1\sin(\sqrt{2}t). \quad (19)$$

这里,

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= [(n+2)\sqrt{\gamma}f_n \\ &\quad - \sqrt{(n+1)(n+2)(1-\gamma)}f_{n+1}]/(2n+3), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \beta(n) &= [(n+1)\sqrt{\gamma}f_n \\ &\quad + \sqrt{(n+1)(n+2)(1-\gamma)}f_{n+1}]/(4n+6). \end{aligned} \quad (21)$$

### 3. 场熵的演化特性

由系统的初始条件及(1)式可知,在  $t > 0$  的任意时刻,系统的场熵和原子熵总是相等的.因此,可利用原子约化密度矩阵求出系统场熵的表达式.

根据态矢表达式(12),容易得到原子约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho_A(t) &= \text{tr}_r|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \\ &= \begin{pmatrix} \sum_n \alpha(n,t)a^*(n,t) & \sum_n \alpha(n,t)b^*(n,t) & \sum_n \alpha(n,t)c^*(n,t) & \sum_n \alpha(n,t)d^*(n,t) \\ \sum_n \beta(n,t)a^*(n,t) & \sum_n \beta(n,t)b^*(n,t) & \sum_n \beta(n,t)c^*(n,t) & \sum_n \beta(n,t)d^*(n,t) \\ \sum_n \gamma(n,t)a^*(n,t) & \sum_n \gamma(n,t)b^*(n,t) & \sum_n \gamma(n,t)c^*(n,t) & \sum_n \gamma(n,t)d^*(n,t) \\ \sum_n \delta(n,t)a^*(n,t) & \sum_n \delta(n,t)b^*(n,t) & \sum_n \delta(n,t)c^*(n,t) & \sum_n \delta(n,t)d^*(n,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

系统的场(原子)熵为

$$S_f(t) = S_a(t) = -\text{tr}_a[\rho_a(t) \ln \rho_a(t)] \\ = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \ln \lambda_j. \quad (23)$$

(23) 式中  $\lambda_j (j=1, 2, 3, 4)$  为原子约化密度矩阵的本征值, 满足下列方程:

$$\lambda^4 - \lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda = 0, \quad (24)$$

其中  $P$  和  $Q$  由原子约化密度算符  $\rho_a$  的矩阵元确定,

$$P = \rho_{11}\rho_{22} + \rho_{11}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{33} \\ + \rho_{22}\rho_{44} + \rho_{33}\rho_{44} \\ - (\rho_{12}\rho_{21} + \rho_{13}\rho_{31} + \rho_{14}\rho_{41} + \rho_{23}\rho_{32} \\ + \rho_{24}\rho_{42} + \rho_{34}\rho_{43}), \quad (25)$$

$$Q = -\rho_{11}\rho_{22}\rho_{33} - \rho_{11}\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{11}\rho_{33}\rho_{44} \\ - \rho_{22}\rho_{33}\rho_{44} + \rho_{11}\rho_{23}\rho_{32} + \rho_{11}\rho_{24}\rho_{42} \\ + \rho_{11}\rho_{34}\rho_{43} + \rho_{22}\rho_{13}\rho_{31} + \rho_{22}\rho_{14}\rho_{41} \\ + \rho_{22}\rho_{34}\rho_{43} + \rho_{33}\rho_{12}\rho_{21} + \rho_{33}\rho_{14}\rho_{41} \\ + \rho_{33}\rho_{24}\rho_{42} + \rho_{44}\rho_{12}\rho_{21} + \rho_{44}\rho_{13}\rho_{31} \\ + \rho_{44}\rho_{23}\rho_{32} - \rho_{12}\rho_{23}\rho_{31} - \rho_{12}\rho_{24}\rho_{41} \\ - \rho_{13}\rho_{21}\rho_{32} - \rho_{13}\rho_{34}\rho_{41} - \rho_{14}\rho_{21}\rho_{42} \\ - \rho_{14}\rho_{31}\rho_{43} - \rho_{23}\rho_{34}\rho_{42} - \rho_{24}\rho_{32}\rho_{43}. \quad (26)$$

解方程 (24) 得到原子约化密度矩阵的本征值为

$$\lambda_1 = 0, \quad (27)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{6} \left[ 2 - \frac{2 \cdot 2^{1/3}(3P-1)}{\zeta} + 2^{2/3}\zeta \right], \quad (28)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6} \left[ 2 + \frac{\chi-2}{\zeta} 2^{1/3}(3P-1) + (-2)^{2/3}\zeta \right], \quad (29)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{6} \left[ 2 - \frac{\chi-1}{\zeta} 2^{1/3}(3P-1) - (-1)^{1/3} 2^{2/3}\zeta \right], \quad (30)$$

其中

$$\zeta = [2 - 9P - 27Q \\ + \sqrt{4(3P-1)^2 + (-2 + 9P + 27Q)^2}]^{1/3}. \quad (31)$$

为了揭示双原子初始纠缠度对场熵时间演化特性的影响, 分别选取不同的  $E_a(0)$  值(对应不同的  $\sqrt{\gamma}$  值)对 (23) 式作数值计算, 得到如图 2 所示的结果.

从图 2 可以看出, 单模光场在与双原子系统相

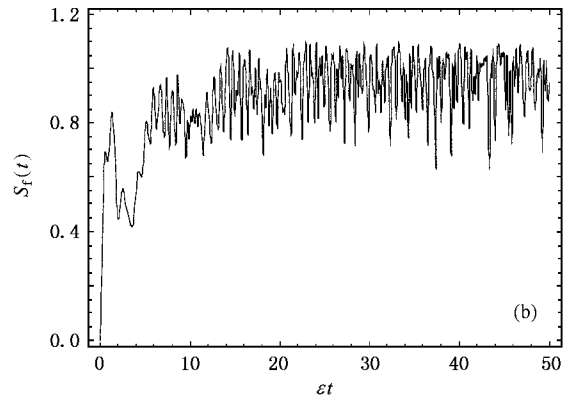
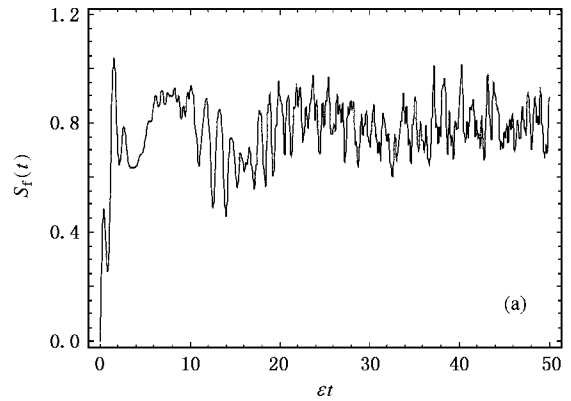


图 2 场熵  $S_f(t)$  的时间演化规律 ( $n_0 = 5, \epsilon = 1$ ) (a)  $E_a = 0$ , (b)  $E_a = 0.6931$

互作用时, 双原子初始纠缠度  $E_a(0)$  对场熵演化的影响主要表现为场熵的平均值随双原子初始纠缠度  $E_a(0)$  的取值不同而不同. 当双原子系统的初始状态为可分离态(对应于  $E_a(0) = 0$ )时, 场熵的平均值较小; 而当双原子系统的初始状态为纠缠态(如  $E_a(0) = 0.6931$ )时, 场熵的平均值则较大. 我们知道, 在光场-原子相互作用系统中, 场熵值的大小表征光场-原子纠缠的程度. 场熵演化行为的上述特点表明: 对于光场-双原子相互作用系统, 光场-原子纠缠与原子-原子纠缠是相互关联的, 而且这种关联是正的关联. 这意味着, 若双原子系统初始纠缠度大, 则光场-原子纠缠度也大; 反之亦然.

图 3 给出了双原子初始纠缠度取最大值而初始光场平均光子数不同时场熵  $S_f(t)$  的时间演化规律.

从图 3 可以看出, 当初始光场较弱(初始平均光子数  $n_0$  较小)时, 在与双原子系统相互作用过程中, 场熵随时间的演化呈不规则的振荡, 如图 3(a) 所示. 当初始光场增强(初始平均光子数  $n_0$  增大)时,

场熵随时间的演化逐渐表现出较规则的振荡,如图 3(b)~(d)所示. 对于光场-原子相互作用系统, 场熵演化呈不规则振荡是单光子过程的基本特征, 而场熵演化呈规则振荡则是双光子过程的基本特征. 上

述结果表明: 当初始光场较弱时, 光场-原子之间的相互作用主要表现为单光子跃迁过程; 当初始光场较强时, 光场-原子之间的相互作用则主要表现为双光子跃迁过程.

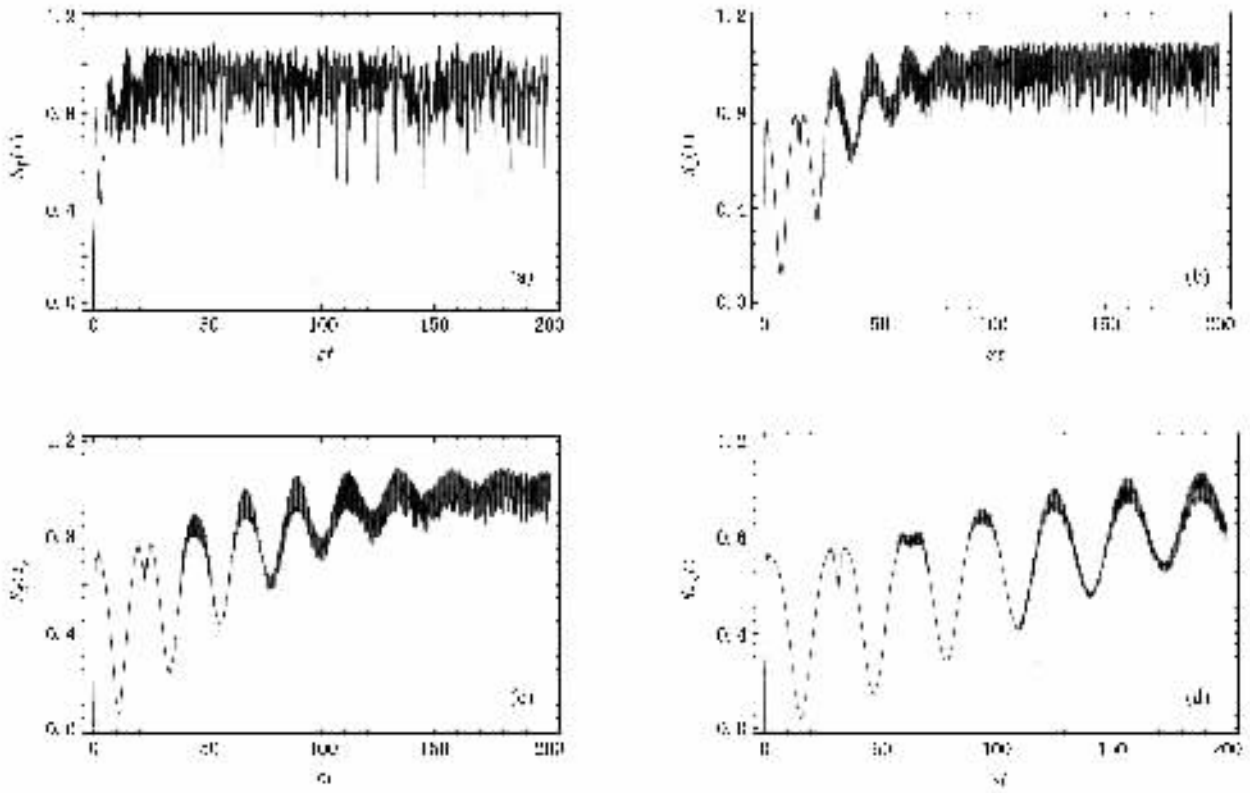


图 3 场熵  $S_F(t)$  的时间演化规律( $\sqrt{\gamma}=\sqrt{2}/2, E_a=0.6931, \epsilon=1$ ) (a)  $n_0=5$  (b)  $n_0=25$  (c)  $n_0=50$  (d)  $n_0=100$

## 4. 结 论

采用全量子理论和数值计算方法, 研究了单模光场与纠缠双原子相互作用系统场熵的演化特性, 着重讨论了双原子系统初始纠缠度和初始光场强度对场熵演化行为的影响.

1) 光场-双原子相互作用系统中光场-原子纠缠与原子-原子纠缠是相互关联的. 双原子系统初始纠

缠度大时场熵的平均值也较大, 从而光场-原子纠缠度也大; 双原子系统初始纠缠度小时, 场熵的平均值也较小, 从而光场-原子的纠缠度也小.

2) 初始光场强度主要影响场熵演化的振荡特性. 当初始光场强度较弱时, 场熵随时间的演化呈不规则的振荡, 光场-原子之间的相互作用主要表现为单光子跃迁过程; 当初始光场强度较强时, 场熵随时间的演化表现为较规则的振荡, 光场-原子之间的相互作用则主要表现为双光子跃迁过程.

- [1] Phoenix S J D, Knight P L 1988 *Ann. Phys.* **186** 381  
 [2] Phoenix S J D, Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023  
 [3] Fang M F, Zhou G H 1994 *Phys. Lett. A* **184** 397  
 [4] Fang M F, Zhou P 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 570 (in Chinese) [方卯发、周 鹏 1994 物理学报 **43** 570]  
 [5] Fang M F, Liu X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 435 (in Chinese) [方卯发、刘 翔 2000 物理学报 **49** 435]

- [6] Ao S M, Zhou S L, Zeng G J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 52 (in Chinese) [敖胜美、周石伦、曾高坚 2001 物理学报 **50** 52]  
 [7] Huang C J, Zhou M, Li J F et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 805 (in Chinese) [黄春佳、周 明、厉江帆等 2002 物理学报 **51** 805]  
 [8] Huang C J, He H Y, Li J F et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1049 (in Chinese) [黄春佳、贺慧勇、厉江帆等 2002 物理学报 **51** 1049]

- [ 9 ] Zhang L H , Li G X , Gan Z W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1168 ( in Chinese ) [ 张立辉、李高翔、甘仲惟 2003 *物理学报* **52** 1168 ]
- [ 10 ] Araki H , Lieb E 1970 *Commun. Math. Phys.* **18** 160
- [ 11 ] Bennett C H , DiVincenzo D P , Smolin J A *et al* 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824

## Entropy evolution of field interacting with two entangled-atoms<sup>\*</sup>

Huang Chun-Jia He Hui-Yong Zhou Ming Fang Jia-Yuan Huang Zu-Hong

( *Department of Physics and Electronic Science , Changsha University of Science and Technology , Changsha 410076 , China* )

( Received 21 April 2005 ; revised manuscript received 2 September 2005 )

### Abstract

The entropy evolution of the field interacting with two entangled-atoms are studied by means of quantum theory. Using the numerical method , the influence of the entanglement of atoms and the intensity of field on the entropy evolution of the field is discussed. The results show that the entanglement of atoms affects the mean-value of field entropy and the intensity of field affects the oscillation properties of field entropy evolution.

**Keywords** : single-mode field , two entangled-atoms , field entropy evolution

**PACC** : 4250

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Foundation of Education Department of Hunan Province , China ( Grant Nos. 03A003 03C064 04C0121 ).