第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1774-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55, No.4, April, 2006

有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态的振幅平方压缩*

孟祥国　王继锁

（聊城大学物理科学与信息工程学院，聊城　252059）

（2005 年 4 月 20 日收到；2005 年 12 月 6 日收到修改稿）

构造出了有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态，讨论了它们的正交归一完备性和振幅平方压缩效应. 研究表明，在此空间中 Roy 型奇偶非线性相干态是归一完备的，但不具有正交性；当复参数相位角 θ 满足一定条件时它们存在振幅平方压缩效应，同时导出了压缩条件与参数 s，r 以及函数 $f(n)$ 之间的关系. 最后借助于数值计算，发现对于 5 维（或 7 维）Hilbert 空间中 Roy 型偶（或奇）非线性相干态，当参数 θ 和 Lamb-Dike 参数 η 取某一给定值时，在参数 r 变化的不同取值范围内，它们均可以呈现振幅平方压缩效应.

关键词：有限维 Hilbert 空间，Roy 型非线性相干态，奇偶非线性相干态，振幅平方压缩

PACC：4250，0365

1. 引　　言

最近，人们对于被称之为 f 相干态的非线性相干态作了大量研究[1—6]. 2000 年，Roy 等[7,8] 利用 f 相干态定义了一种新的非线性相干态（本文称之为 Roy 型非线性相干态），并证明了它是 f 振子湮没算符 $B = a\frac{1}{f(N)}$ 的本征态（其中 $f(N)$ 为数算符 $N = a^+a$ 的非负函数），同时研究了该非线性相干态的压缩、反聚束效应和 Pegg-Barnett 量子相位等非经典特性. 2002 年，文献[9]对 Roy 型非线性相干态进行反对称（对称）组合，提出了一种新的奇偶非线性相干态（本文称之为 Roy 型奇偶非线性相干态），并且研究了它们的压缩、振幅平方压缩和反聚束效应等量子统计性质. 研究结果表明，该奇偶非线性相干态与通常的奇偶相干态存在很大差异，各种非经典特性呈现与否与参数 r 的取值范围有关. 本文在文献[9]的基础之上，首先将 Roy 型奇偶非线性相干态推广到有限维 Hilbert 空间，构造出了有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态，并且研究了它们的正交归一完备性和振幅平方压缩效应. 研究表明，在此空间中 Roy 型奇偶非线性相干态仅具有归一性和完备性；当复参数相位角 θ 满足一定条件时该奇偶非线性相干态存在振幅平方压缩效应，同时给出了压缩条件与参数 s，r 以及函数 $f(n)$ 的关系；并借助数值计算，发现对于参数 $s = 2$（或 $s = 3$），$\theta = 0$ 以及 Lamb-Dike 参数 $\eta^2 = 0.7$ 时，在参数 r 变化的某些取值范围内，$2s+1 = 5$（或 $2s+1 = 7$）维 Hilbert 空间中 Roy 型偶（或奇）非线性相干态可呈现振幅平方压缩效应.

2. 有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态

2.1. Roy 型奇偶非线性相干态

考虑到下面行文的方便，我们首先回顾一下有关 Roy 型非线性相干态的定义和一些结论. 由文献[7，8]所定义的 f 型谐振子一种新的湮没和产生算符为

$$B = a\frac{1}{f(N)},\quad B^+ = \frac{1}{f(N)}a^+. \tag{1}$$

与非线性相干态 $|\alpha, f\rangle$ 的定义[10] 类似，文献[7，8]

* 国家自然科学基金（批准号：10574060）和山东省自然科学基金（批准号：Y2004A09）资助的课题.

还定义了一种新的非线性相干态 $|\beta,f\rangle$(称之为 Roy 型非线性相干态)为 f 型谐振子湮没算符 $B=a\frac{1}{f(N)}$ 的本征态,即

$$B|\beta,f\rangle=\beta|\beta,f\rangle,\tag{2}$$

式中 $\beta=r\exp(\mathrm{i}\theta)$ 为复参数. 在 Fock 表象中,Roy 型非线性相干态可表示为

$$|\beta,f\rangle=N_f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n f(n)!}{\sqrt{n!}}|n\rangle,\tag{3}$$

$$N_f=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\beta|^{2n}[f(n)!]^2}{n!}\right\}^{-1/2}\tag{4}$$

其中 $f(n)!=f(n)f(n-1)\cdots f(1)f(0),f(0)=1$.

与用算符 A^2(其中 $A=af(N)$)的两个正交归一本征态线性叠加构成奇偶非线性相干态的方法[1]相类似,文献[9]定义了一种新的奇偶非线性相干态(称之为 Roy 型奇偶非线性相干态),即由算符 B^2 的两个正交归一本征态线性叠加构成奇偶非线性相干态

$$|\beta,f\rangle_{\pm}=N_{\pm}(|\beta,f\rangle\pm|-\beta,f\rangle),\tag{5}$$

式中"+"," − "分别对应于 Roy 型偶、奇非线性相干态,$N_{\pm}$ 为归一化系数,

$$N_{\pm}=\left\{2\pm 2N_f^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-|\beta|^2)^n[f(n)!]^2}{n!}\right\}^{-1/2}.\tag{6}$$

在 Fock 表象中,Roy 型奇偶非线性相干态可表示为

$$|\beta,f\rangle_{\pm}=N_{\pm}N_f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\beta^n\pm(-\beta)^n]f(n)!}{\sqrt{n!}}|n\rangle.\tag{7}$$

由(3)式知,若选取不同的函数 $f(n)$,Roy 型非线性相干态将会有不同的表现形式,在本文中我们取函数 $f(n)$ 为描述囚禁离子运动时使用的形式[11],

$$f(n)=\mathrm{L}_n^1(\eta^2)[(n+1)\mathrm{L}_n^0(\eta^2)]^{-1}.\tag{8}$$

式中,η 为 Lamb-Dike 参数,$\mathrm{L}_n^m(x)$ 为缔合 Laguerre 多项式.

2.2. 有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态

按照文献[12,13]的方法,引入 $(2s+1)$ 维 Hilbert 空间 $\Omega_{2s+1}=\{|n\rangle,n=0,1,2,\cdots,2s\}$,其中 s 为任意正整数. 在这个 Ω_{2s+1} 空间中,谐振子的湮没算符 a、产生算符 a^+ 以及粒子数算符 N 分别定义为

$$a=\sum_{n=0}^{2s-1}\sqrt{n+1}|n\rangle\langle n+1|,$$

$$a^+=\sum_{n=0}^{2s-1}\sqrt{n+1}|n+1\rangle\langle n|,$$

$$N=a^+a=\sum_{n=0}^{2s}\sqrt{n}|n\rangle\langle n|.\tag{9}$$

并且容易证明 a 和 a^+ 满足下列对易关系:

$$\begin{aligned}&[a,a^+]=1-(2s+1)|2s\rangle\langle 2s|,\\&[N,a]=-a,\\&[N,a^+]=a^+.\end{aligned}\tag{10}$$

若把湮没、产生算符作用在 Fock 态上,可得关系式

$$\begin{aligned}&a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle,\\&a|0\rangle=0,\\&a^+|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\\&a^+|2s\rangle=0.\end{aligned}\tag{11}$$

定义有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态

$$|\beta,f;s\rangle_{\pm}=N_{\pm}(r,2s)[F(r,2s)]^{-1/2}\times\sum_{n=0}^{2s}\frac{[\beta^n\pm(-\beta)^n]f(n)!}{\sqrt{n!}}|n\rangle,\tag{12}$$

式中

$$N_{\pm}(r,2s)=\left\{2\pm 2[F(r,2s)]^{-1}\times\sum_{n=0}^{2s}\frac{(-|\beta|^2)^n[f(n)!]^2}{n!}\right\}^{-1/2},\tag{13}$$

$$F(r,2s)=\sum_{n=0}^{2s}\frac{r^{2n}[f(n)!]^2}{n!}.\tag{14}$$

显然,由(12)—(14)式知,若令 $\eta=0$,则 $f(n)=1$,这时(12)式所定义的奇偶非线性相干态 $|\beta,f;s\rangle_{\pm}$ 分别过渡到此空间中有限维谐振子的奇偶相干态[14];若令 $s\to\infty$,则此 Roy 型奇偶非线性相干态 $|\beta,f;s\rangle_{\pm}$ 又将分别过渡到通常的 Roy 型奇偶非线性相干态[9].

易于证明,有限维 Hilbert 空间两个 Roy 型奇偶非线性相干态的内积为

$$\begin{aligned}&{}_{\pm}\langle\beta,f;s|\beta',f;s\rangle_{\pm}\\&=N_{\pm}(r,2s)N_{\pm}(r',2s)\\&\quad\times[F(r,2s)F(r',2s)]^{-1/2}\\&\quad\times\sum_{n,m=0}^{2s}\frac{[\beta^{*n}\pm(-\beta^*)^n][\beta'^m\pm(-\beta')^m]f(n)!f(m)!}{\sqrt{n!m!}}\\&\quad\times\langle n|m\rangle\\&=N_{\pm}(r,2s)N_{\pm}(r',2s)\\&\quad\times[F(r,2s)F(r',2s)]^{-1/2}\\&\quad\times\sum_{n=0}^{2s}\frac{[\beta^{*n}\pm(-\beta^*)^n][\beta'^n\pm(-\beta')^n][f(n)!]^2}{n!}.\end{aligned}\tag{15}$$

在 $\beta'=\beta$ 的情况下，${}_{\pm}\langle\beta,f;s|\beta',f;s\rangle_{\pm}=1$，即该 Roy 型奇偶非线性相干态是归一化的；如果 $\beta'\neq\beta$，则(15)式不为零，说明该 Roy 型奇偶非线性相干态是非正交的. 这与文献[9]给出的 Roy 型奇偶非线性相干态的正交性质是不同的. 尽管如此，我们可以采用密度算符的方法证明这种奇偶非线性相干态具有完备性. 由(12)式可求得在有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态 $|\beta,f;s\rangle_{\pm}$ 中出现态 $|n\rangle$ 的概率为

$$\begin{aligned}P_n(r,f;s)&=|\langle n|\beta,f;s\rangle_{\pm}|^2\\&=[N_{\pm}(r,2s)]^2[F(r,2s)]^{-1}\\&\quad\times\frac{|[\beta^n\pm(-\beta)^n]|^2[f(n)!]^2}{n!}.\end{aligned}\tag{16}$$

定义态 $|\beta,f;s\rangle_{\pm}$ 的密度算符 ρ_n 为

$$\rho_n=\sum_{n=0}^{2s}P_n(f;s)|n\rangle\langle n|,\tag{17}$$

式中，

$$P_n(f;s)=\iint P_n(r,f;s)\mathrm{d}^2\beta,$$

$$\mathrm{d}^2\beta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

因此有

$$\begin{aligned}\rho_n&=\sum_{n=0}^{2s}\frac{2\pi[1\pm(-1)^n]^2[f(n)!]^2}{n!}\\&\quad\times\int_0^{\infty}\mathrm{d}r[N_{\pm}(r,2s)]^2[F(r,2s)]^{-1}r^{2n+1}|n\rangle\langle n|.\end{aligned}\tag{18}$$

下面证明有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态的完备性公式

$$\rho_n^{-1}\iint\mathrm{d}^2\beta|\beta,f;s\rangle_{\pm\ \pm}\langle\beta,f;s|=1\tag{19}$$

成立. 具体证明过程如下：

$$\begin{aligned}&\iint\mathrm{d}^2\beta|\beta,f;s\rangle_{\pm\ \pm}\langle\beta,f;s|\\&=\sum_{n,m=0}^{2s}\frac{f(n)!f(m)!}{\sqrt{n!m!}}|n\rangle\langle m|\times\iint\mathrm{d}^2\beta N_{\pm}(r,2s)N'_{\pm}\\&\quad\times(r,2s)[F(r,2s)F'(r,2s)]^{-1/2}\\&\quad\times[\beta^n\pm(-\beta)^n][\beta^{*m}\pm(-\beta^*)^m]\\&=\sum_{n=0}^{2s}\frac{2\pi[1\pm(-1)^n]^2[f(n)!]^2}{n!}\\&\quad\times\int_0^{\infty}\mathrm{d}r[N_{\pm}(r,2s)]^2[F(r,2s)]^{-1}r^{2n+1}|n\rangle\langle n|\\&=\rho_n.\end{aligned}\tag{20}$$

由上述推导可见，该奇偶非线性相干态的完备性公式成立，所以说这些 Roy 型奇偶非线性相干态能够构成一个完备的有限维 Hilbert 空间.

3. 振幅平方压缩

类似于单模光场振幅平方压缩的定义，定义 Hilbert 空间中 Roy 型奇偶非线性相干态光场的两个正交复振幅平方分量即两个可测量算符[9,15]

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{1}{2}(a^2+a^{+2}),\\x_2&=\frac{1}{2\mathrm{i}}(a^2-a^{+2}).\end{aligned}\tag{21}$$

它们满足如下对易关系和不确定关系：

$$\begin{aligned}[x_1,x_2]&=\frac{\mathrm{i}}{2}(a^2a^{+2}-a^{+2}a^2),\\\langle(\Delta x_1)^2\rangle\langle(\Delta x_2)^2\rangle&\geqslant\frac{1}{4}|\langle[x_1,x_2]\rangle|^2.\end{aligned}\tag{22}$$

定义

$$\begin{aligned}\Delta X_1&=\langle(\Delta x_1)^2\rangle-\frac{1}{2}|\langle[x_1,x_2]\rangle|\\&=\frac{1}{4}[\langle a^4+a^{+4}\rangle+2\langle a^{+2}a^2\rangle\\&\quad-\langle a^2+a^{+2}\rangle^2],\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\Delta X_2&=\langle(\Delta x_2)^2\rangle-\frac{1}{2}|\langle[x_1,x_2]\rangle|\\&=-\frac{1}{4}[\langle a^4+a^{+4}\rangle-2\langle a^{+2}a^2\rangle\\&\quad-\langle a^2-a^{+2}\rangle^2].\end{aligned}\tag{24}$$

如果 $\Delta X_i<0(i=1,2)$成立，则称该 Roy 型奇偶非线性相干态光场在 $x_i(i=1,2)$分量上存在振幅平方压缩. 利用(11)式，经过计算可分别求得在态矢(12)式下，下面有关算符的态平均值分别为

$$\begin{aligned}&{}_{\pm}\langle a^2+a^{+2}\rangle_{\pm}\\&=2r^2[N_{\pm}(r,2s)]^2[F(r,2s)]^{-1}\\&\quad\times\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^n\pm(-\beta)^n|^2f(n)!f(n+2)!}{n!}\cos2\theta,\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}&{}_{\pm}\langle a^2-a^{+2}\rangle_{\pm}\\&=\mathrm{i}2r^2[N_{\pm}(r,2s)]^2[F(r,2s)]^{-1}\\&\quad\times\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^n\pm(-\beta)^n|^2f(n)!f(n+2)!}{n!}\sin2\theta,\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&{}_{\pm}\langle a^4+a^{+4}\rangle_{\pm}\\&=2r^4[N_{\pm}(r,2s)]^2[F(r,2s)]^{-1}\\&\quad\times\sum_{n=0}^{2s-4}\frac{|\beta^n\pm(-\beta)^n|^2f(n)!f(n+4)!}{n!}\cos4\theta,\end{aligned}\tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
&{}_{\pm}\langle a^{+2}a^{2}\rangle_{\pm}\\
&=r^{4}[N_{\pm}(r,2s)]^{2}[F(r,2s)]^{-1}\\
&\quad\times\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}[f(n+2)!]^{2}}{n!}.
\end{aligned}\tag{28}
$$

将(25)—(28)式代入(23),(24)式，可分别得到

$$
\begin{aligned}
\Delta X_{1}=&\frac{1}{2}r^{4}[N_{\pm}(r,2s)]^{4}[F(r,2s)]^{-2}\\
&\times\Big\{[N_{\pm}(r,2s)]^{-2}F(r,2s)\\
&\times\sum_{n=0}^{2s-4}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+4)!}{n!}\\
&\times\cos4\theta+[N_{\pm}(r,2s)]^{-2}F(r,2s)\\
&\times\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}[f(n+2)!]^{2}}{n!}\\
&-2\Big[\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+2)!}{n!}\Big]^{2}\\
&\times\cos^{2}2\theta\Big\},
\end{aligned}\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta X_{2}=&\frac{1}{2}r^{4}[N_{\pm}(r,2s)]^{4}[F(r,2s)]^{-2}\\
&\times\Big\{-[N_{\pm}(r,2s)]^{-2}F(r,2s)\\
&\times\sum_{n=0}^{2s-4}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+4)!}{n!}\\
&\times\cos4\theta+[N_{\pm}(r,2s)]^{-2}F(r,2s)\\
&\times\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}[f(n+2)!]^{2}}{n!}\\
&-2\Big[\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+2)!}{n!}\Big]^{2}\\
&\times\sin^{2}2\theta\Big\}.
\end{aligned}\tag{30}
$$

由(29),(30)式知，只需将 ΔX_1 中的 θ 用 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 代替，即可得到 ΔX_2. 因此，在下面的讨论中我们只考虑该 Roy 型奇偶非线性相干态光场在 x_1 分量上的振幅平方压缩情况.

若使有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态光场在 x_1 分量上存在振幅平方压缩，即 $\Delta X_1<0$ 成立，则由(29)式知，只需满足

$$
\frac{\sum_{n=0}^{2s}\frac{2[1\pm(-1)^{n}]r^{2n}[f(n)!]^{2}}{n!}\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}[f(n+2)!]^{2}}{n!}-\Big[\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+2)!}{n!}\Big]^{2}}{\Big[\sum_{n=0}^{2s-2}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+2)!}{n!}\Big]^{2}-\sum_{n=0}^{2s}\frac{2[1\pm(-1)^{n}]r^{2n}[f(n)!]^{2}}{n!}\sum_{n=0}^{2s-4}\frac{|\beta^{n}\pm(-\beta)^{n}|^{2}f(n)!f(n+4)!}{n!}}<\cos4\theta.
$$

此即为该光场态在 x_1 分量上存在振幅平方压缩的条件.

下面就两种特殊情况下 Roy 型奇偶非线性相干态光场在 x_1 分量上存在振幅平方压缩的条件进行讨论.

情形 1　当 $s=2$ 即 Hilbert 空间维数为 $2s+1=5$ 时，对于 Roy 型偶非线性相干态光场，只存在 n 为偶数的项，n 为奇数的项为零. 若令 $n=2m$，则其振幅平方压缩的条件为

$$
\cos4\theta>\frac{\sum_{m=0}^{2}\frac{4r^{4m}[f(2m)!]^{2}}{(2m)!}\sum_{m=0}^{1}\frac{4r^{4m}[f(2m+2)!]^{2}}{(2m)!}-\Big[\sum_{m=0}^{1}\frac{4r^{4m}f(2m)!f(2m+2)!}{(2m)!}\Big]^{2}}{\Big[\sum_{m=0}^{1}\frac{4r^{4m}f(2m)!f(2m+2)!}{(2m)!}\Big]^{2}-\sum_{m=0}^{2}\frac{4r^{4m}[f(2m)!]^{2}}{(2m)!}4f(4)!}.\tag{31}
$$

对(31)式进行整理并将不等式右端简记为 y_+，则得其振幅平方压缩条件为

$$
y_{+}=\frac{Ar^{4}+Br^{8}+Cr^{12}}{D+Er^{4}+Fr^{8}}<\cos4\theta,\tag{32}
$$

式中系数分别为

$$
\begin{aligned}
A&=8[f(2)!]^{4}+8[f(4)!]^{2}-16[f(2)!]^{2}f(4)!,\\
B&=\frac{2}{3}[f(2)!f(4)!]^{2},\\
C&=\frac{1}{3}[f(4)!]^{4},\\
D&=16[f(2)!]^{2}-16f(4)!,
\end{aligned}
$$

$$E = 8[f(2)!]^2 f(4)!,$$

$$F = 4[f(2)!f(4)!]^2 - \frac{2}{3}[f(4)!]^3.$$

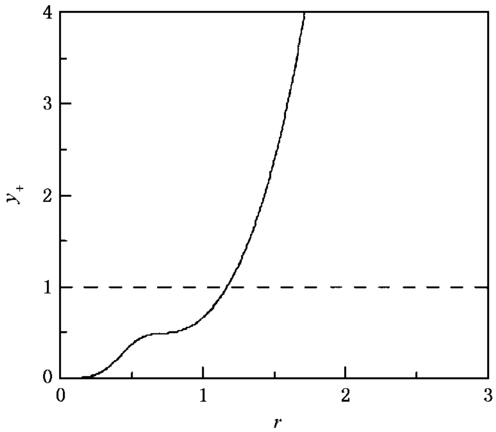

图1 当 $s=2$，$\eta^2=0.7$ 时在5维 Hilbert 空间中函数 y_+ 随参数 r 的变化曲线

利用压缩条件(32)式及其相应的系数表达式，在取 Lamb-Dike 参数 $\eta^2=0.7$ 和复参数相位角 $\theta=0$ 时，借助于数值计算，可以得到在5维的 Hilbert 空间中函数 y_+ 随参数 r 的变化曲线如图1所示.

由图1可以看出，对于参数 s，θ 和 Lamb-Dike 参数 η 的某一给定值，在 r 的某些取值范围内，对于5维 Hilbert 空间 Roy 型偶非线性相干态在 x_1 分量上可呈现振幅平方压缩效应. 例如，若取 $s=2$，$\theta=0$ 且 $\eta^2=0.7$，则此 Roy 型偶非线性相干态在 $0\leqslant r\leqslant 1.155$ 范围内，$y_+<1$，即 r 在此取值范围内，在5维的 Hilbert 空间中 Roy 型偶非线性相干态可呈现振幅平方压缩效应.

情形2 当 $s=3$ 即 Hilbert 空间维数为 $2s+1=7$ 时，对于 Roy 型奇非线性相干态光场，只存在 n 为奇数的项，n 为偶数的项为零. 若令 $n=2m+1$，则其振幅平方压缩的条件为

$$\cos 4\theta > \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{2}\frac{4r^{4m+2}[f(2m+1)!]^2}{(2m+1)!}\sum_{m=0}^{1}\frac{4r^{4m+2}[f(2m+3)!]^2}{(2m+1)!} - \left[\sum_{m=0}^{1}\frac{4r^{4m+2}f(2m+1)!f(2m+3)!}{(2m+1)!}\right]^2}{\displaystyle\left[\sum_{m=0}^{1}\frac{4r^{4m+2}f(2m+1)!f(2m+3)!}{(2m+1)!}\right]^2 - \sum_{m=0}^{2}\frac{4r^{4m+2}[f(2m+1)!]^2}{(2m+1)!}4r^2 f(1)!f(5)!}. \tag{33}$$

对(33)式进行整理并将不等式右端简记为 y_-，则得其振幅平方压缩条件为

$$y_- = \frac{Ar^4 + Br^8 + Cr^{12}}{D + Er^4 + Fr^8} < \cos 4\theta, \tag{34}$$

式中系数分别为

$$A = \frac{8}{3}[f(1)!f(5)!]^2 + \frac{8}{3}[f(3)!]^4 - \frac{16}{3}f(1)![f(3)!]^2 f(5)!,$$

$$B = \frac{2}{15}[f(3)!f(5)!]^2,$$

$$C = \frac{1}{45}[f(5)!]^4,$$

$$D = 16[f(1)!f(3)!]^2 - 16[f(1)!]^3 f(5)!,$$

$$E = \frac{8}{3}f(1)![f(3)!]^2 f(5)!,$$

$$F = \frac{4}{9}[f(3)!f(5)!]^2 - \frac{2}{15}f(1)![f(5)!]^3.$$

利用压缩条件(34)式及其相应的系数表达式，在取 Lamb-Dike 参数 $\eta^2=0.7$ 和复参数相位角 $\theta=0$ 时，借助于数值计算，可以得到在7维 Hilbert 空间中函数 y_- 随参数 r 的变化曲线如图2所示.

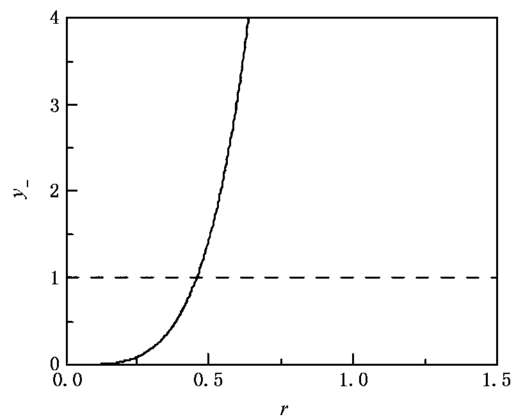

图2 当 $s=3$，$\eta^2=0.7$ 时在7维 Hilbert 空间中函数 y_- 随参数 r 的变化曲线

由图2可以看出，对于参数 s，θ 和 Lamb-Dike 参数 η 的某一给定值，在 r 的某些取值范围内，对于7维 Hilbert 空间 Roy 型奇非线性相干态在 x_1 分量上可呈现振幅平方压缩效应. 例如，若取 $s=3$，$\theta=0$ 且 $\eta^2=0.7$，则此 Roy 型奇非线性相干态在 $0\leqslant r\leqslant 0.458$ 时，$y_-<1$，即 r 在此取值范围内，在7维 Hilbert 空间中 Roy 型奇非线性相干态可呈现振幅平

方压缩效应.

由于通常的奇偶相干态均不存在振幅平方压缩效应[16]，而当参数 $\theta = 0$ 且 $\eta^2 = 0.7$ 时，通常的 Roy 型奇、偶非线性相干态分别在 $0 < r < 1.5196$，$0 < r < 0.5135$ 范围内可呈现振幅平方压缩效应[9]. 由此可见，由(12)式所定义的这种有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态，表现出的振幅平方压缩特性与通常的奇偶相干态、通常的 Roy 型奇偶非线性相干态相比是截然不同的.

4. 结　　论

本文在文献[9]的基础上，首先将 Roy 型奇偶非线性相干态推广到有限维 Hilbert 空间，构造出了有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态，并且讨论了它们的正交归一完备性和振幅平方压缩效应. 结果表明，在此空间中 Roy 型奇偶非线性相干态是归一完备的，但不具有正交性；当复参数相位角 θ 满足一定条件时该奇偶非线性相干态存在振幅平方压缩效应，同时导出了压缩条件与参数 s，r 以及函数 $f(n)$ 之间的关系. 最后讨论了两种特殊情况下，有限维 Hilbert 空间 Roy 型奇偶非线性相干态在 x_1 分量上存在振幅平方压缩效应的条件，并借助数值计算，发现对于参数 s，θ 和 Lamb-Dike 参数 η 的某一给定值，在参数 r 变化的不同取值范围内，它们均可以呈现振幅平方压缩效应，而这种非经典特性与通常的奇偶相干态、通常的 Roy 型奇偶非线性相干态相比是截然不同的.

[1] Mancini S 1997 *Phys*. *Lett*. A **233** 291

[2] Sivakumar S 1998 *Phys*. *Lett*. A **250** 257

[3] Sivakumar S 2000 *J*. *Opt*. *B*：*Quantum Semiclass*. *Opt*. **2** R61

[4] Wang J S，Feng J，Liu T K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1983 (in Chinese)［王继锁、冯　健、刘堂昆等 2002 物理学报 **51** 1983］

[5] Wang J S，Liu T K，Feng J *et al* 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3729 (in Chinese)［王继锁、刘堂昆、冯　健等 2004 物理学报 **53** 3729］

[6] Wang J S，Feng J，Gao Y F *et al* 2003 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **42** 89

[7] Roy B，Roy P 2000 *J*. *Opt*. *B*：*Quantum Semiclass*. *Opt*. **2** 65

[8] Roy B，Roy P 2000 *J*. *Opt*. *B*：*Quantum Semiclass*. *Opt*. **2** 505

[9] Wang J S，Feng J，Liu T K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2509 (in Chinese)［王继锁、冯　健、刘堂昆等 2002 物理学报 **51** 2509］

[10] Man'ko V I，Marmo G，Sudarshan E C G *et al* 1997 *Phys*. *Scr*. **55** 528

[11] de Matos Filho R L，Vogel W 1996 *Phys*. *Rev*. A **54** 4560

[12] Zhu C X 1999 *Acta Opt*. *Sin*. **19** 441 (in Chinese)［朱从旭 1999 光学学报 **19** 441］

[13] Bužek V，Vidiella-Barramco A，Knight P L 1992 *Phys*. *Rev*. A **45** 6570

[14] Zhu C X，Deng H G 2000 *Acta Photon*. *Sin*. **29** 872 (in Chinese)［朱从旭、邓宏贵 2000 光子学报 **29** 872］

[15] Lu D M 2003 *High Energy Phys*. *Nucl*. *Phys*. **27** 966 (in Chinese)［卢道明 2003 高能物理与核物理 **27** 966］

[16] Xia Y J，Guo G C 1989 *Phys*. *Lett*. A **136** 281

Amplitude-squared squeezing of Roy-type even and odd nonlinear coherent states in a finite-dimensional Hilbert space*

Meng Xiang-Guo Wang Ji-Suo

(*School of Physical Science and Information Engineering, Liaocheng University, Liaocheng* 252059, *China*)

(Received 20 April 2005; revised manuscript received 6 December 2005)

Abstract

The Roy-type even and odd nonlinear coherent states in a finite-dimensional Hilbert space are constructed. Their amplitude-squared squeezing effect, orthonormalized property, unitary property and completeness relations are discussed. The results reveal the existence of unitary property, completeness relations and non-orthonormalized property. There exists the amplitude-squared squeezing effect for the Roy-type even and odd nonlinear coherent states when the phase θ of parameter β meets the fixed condition. The relations between conditions of squeezing effect and parameters s, r and function $f(n)$ are given. Finally using the numerical method, it is found that in some different ranges of r, the amplitude-squared squeezing effect exists in Roy-type even and odd nonlinear coherent states field in a finite-dimensional Hilbert space when the parameters s, θ and Lamb-Dike parameter η are given as the fixed value.

Keywords: finite-dimensional Hilbert space, Roy-type nonlinear coherent states, even and odd nonlinear coherent states, amplitude-squared squeezing

PACC: 4250, 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10574060) and the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y2004A09).