

左手材料薄板波导中模式之间的正交关系*

张高明 彭景翠† 翦知渐 黄小益

(湖南大学应用物理系,长沙 410082)

(2005 年 11 月 30 日收到 2006 年 1 月 25 日收到修改稿)

基于电磁场理论,采用直接计算的方法证明了左手材料薄板波导中各个模式是相互正交的,即不同传播模之间、传播模与辐射模以及不同辐射模之间是相互正交的.这为研究左手材料薄板波导中的模式耦合奠定了基础.

关键词:左手材料,薄板波导,模式,正交关系

PACC: 4270F, 4280L, 4225B

1. 引言

自然界中绝大部分材料的介电常数 $\epsilon > 0$, 且磁导率 $\mu > 0$, 电磁波在其中传播时, 电磁波的电场 E 、磁场 H 和波矢 k 形成一个右手螺旋关系, 故这类材料被称为右手材料. 有少部分材料在某些状态下, 其介电常数 $\epsilon < 0$, 但磁导率 $\mu > 0$, 如等离子体及位于特定频段的部分金属. 1968 年, 前苏联科学家 Veselago^[1] 从理论上分析了介电常数 $\epsilon < 0$, 且磁导率 $\mu < 0$ 的左手材料, 发现左手材料因具有负折射率而会表现出很多奇特的性质, 如反多普勒效应 (inverse Doppler effect) 反切连科夫辐射 (reversed Cherenkov radiation). 介电常数 $\epsilon < 0$, 且磁导率 $\mu < 0$ 的材料之所以被称为左手材料, 是因为电磁波在其中传播时, 电磁波的电场 E 、磁场 H 和波矢 k 形成一个左手螺旋关系. 人们尚未在自然界中发现过左手材料. 近来, 已有实验报道^[2-5] 成功制备了左手材料, 这引起了各国相关研究人员的极大兴趣^[6-10]. 左手材料是一种人工复合结构材料, 其特性由结构单元的几何形状及其空间图案分布决定, 而不是取决于其组成, 因而对于特定的几何形状和空间图案分布, 其有效介电常数 ϵ_{eff} 和磁导率 μ_{eff} 可能小于零.

Pendry^[11] 对左手材料的进一步研究表明: 一个无损耗的左手材料薄板可以实现对物体的完美成像. 这样的透镜被称为完美透镜, 它突破了传统透镜的最大分辨率受制于电磁波波长的局限. Pendry 的这一理论成果尽管引起了较广泛的争议^[12, 13], 但对

此类材料的负折射率解读却很好地与已有的实验数据相符^[2-5].

右手材料薄板波导中的传播模只有快波这一种模式, 文献 [14] 证明了右手材料薄板波导中的传播模和辐射模具有正交关系. 文献 [15] 研究了左手材料薄板波导中的传播模, 发现其传播模分为快波和慢波两种模式. 本文证明了左手材料薄板波导中的各个模式之间是相互正交的, 即不同传播模之间、传播模与辐射模以及不同辐射模之间是相互正交的.

2. 传播模和辐射模

2.1. 传播模

考虑图 1 所示的左手材料 ($\epsilon_1 < 0, \mu_1 < 0$) 薄板波导, 其包覆材料为右手材料 ($\epsilon_2 > 0, \mu_2 > 0$). 根据镜像对称 (σ_x) 和极化方式 (TM, TE), 波导中的传播模和辐射模可以分为四类. 本文只考虑 TE 极化模.

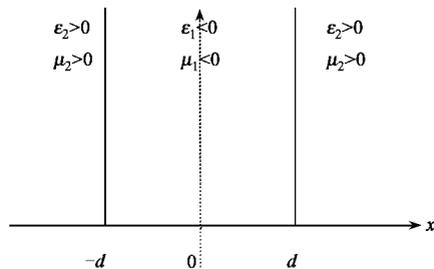


图 1 左手材料薄板波导示意图

* 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20030532008)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jcpeng 381@ yahoo. com. cn

2.1.1. 快波偶模

首先,给出快波偶模的电场表达式.

在区域 $|x| \leq d$,

$$E_{1y} = A_{1e} \cos(k_{1f} x) \exp(i\beta_f z - i\omega t); \quad (1a)$$

在区域 $|x| \geq d$,

$$E_{2y} = A_{1e} \cos(k_{1f} d) \exp[-\kappa_2(|x| - d)] \times \exp(i\beta_f z - i\omega t). \quad (1b)$$

这里,

$$k_{1f}^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1}{c^2} - \beta_f^2 > 0,$$

$$\kappa_{2f}^2 = \beta_f^2 - \frac{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2}{c^2} > 0.$$

将(1)式中的 $\cos(kx)$ 改为 $\sin(kx)$,即可得到快波奇模的电场表达式.

由(1)式可得到快波模的如下色散关系:

$$\kappa_{2f} = \pm \frac{\mu_2}{\mu_1} k_{1f} \tan^{\pm 1}(k_{1f} d). \quad (2)$$

在偶模情况下(2)式取“+”号;在奇模情况下(2)式取“-”号.

因(1)式解的相速度 $v_p = \omega/\beta_f$ ($\beta_f < \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$)

要大于在各向同性介质(ϵ_1, μ_1)中相应的相速度,所以将它们称为快波.

2.1.2. 慢波奇模

下面给出慢波奇模的电场表达式.

在区域 $|x| \leq d$,

$$E_{1y} = A_{s0} \sin(\kappa_{1s} x) \exp(i\beta_s z - i\omega t); \quad (3a)$$

在区域 $|x| \geq d$,

$$E_{2y} = A_{s0} \sin(\kappa_{1s} d) \exp[-\kappa_{2s}(|x| - d)] \times \exp(i\beta_s z - i\omega t). \quad (3b)$$

这里,

$$\kappa_{1s}^2 = \beta_s^2 - \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1}{c^2} > 0,$$

$$\kappa_{2s}^2 = \beta_s^2 - \frac{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2}{c^2} > 0.$$

将(3)式中的 $\sin(\kappa_{1s} x)$ 改为 $\cosh(\kappa_{1s} x)$,即可得到慢波偶模的电场表达式.

由(3)式可得到慢波模的如下色散关系:

$$\kappa_{2s} = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \kappa_{1s} \tanh^{\pm 1}(\kappa_{1s} d). \quad (4)$$

在偶模情况下(4)式取“+”号;在奇模情况下(4)式取“-”号.

因(3)式解的相速度 $v_p = \omega/\beta_s$ ($\beta_s > \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$)

要小于在各向同性介质(ϵ_1, μ_1)中相应的相速度,所以将它们称为慢波.

2.2. 辐射模

对辐射模,我们仅给出辐射偶模的电场表达式.

在区域 $|x| \leq d$,

$$E_{1y} = C_e \cos(\sigma x) \exp(i\beta_r z - i\omega t); \quad (5a)$$

在区域 $|x| \geq d$,

$$E_{2y} = [D_e \exp(-i\rho|x|) + F_e \exp(i\rho|x|)] \times \exp(i\beta_r z - i\omega t). \quad (5b)$$

这里,

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1}{c^2} - \beta_r^2,$$

$$\rho^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2}{c^2} - \beta_r^2,$$

$$D_e = \frac{C_e}{2} \exp(i\rho d) \left[\cos \sigma d - i \frac{\sigma}{\rho} \frac{\mu_2}{\mu_1} \sin \sigma d \right] = \bar{D}_e C_e,$$

$$F_e = D_e^*.$$

3. 模式正交性的表达式

对于图1所示的薄板波导,文献[14]证明了右手材料薄板波导中的模式之间具有下列正交关系:

$$\frac{\beta_\nu}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\nu y} E_{\mu y}^* dx = P \delta_{\nu\mu}, \quad (6)$$

式中 β_ν 为模式 ν 的传播常数, $E_{\nu y}$ 和 $E_{\mu y}$ 分别为模式 ν 和 μ 的电场表达式, P 为模式的传播功率, μ_0 为真空中的磁导率(已经假设右手材料薄板波导中的波导层和包覆层的磁导率都为 μ_0).

本文将证明左手材料薄板波导中的模式之间具有如下正交关系:

$$\frac{\beta_\nu}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} E_{\nu y} E_{\mu y}^* dx = P \delta_{\nu\mu}. \quad (7)$$

(7)式等号左端可展开为

$$\frac{\beta_\nu}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} E_{\nu y} E_{\mu y}^* dx = \frac{\beta_\nu}{2\omega} I_1 + \frac{\beta_\nu}{2\omega} I_2,$$

其中,

$$I_1 = \int_{-d}^d \frac{1}{\mu_1} E_{\nu y} E_{\mu y}^* dx,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{-d} \frac{1}{\mu_2} E_{\nu y} E_{\mu y}^* dx + \int_d^{\infty} \frac{1}{\mu_2} E_{\nu y} E_{\mu y}^* dx. \quad (8)$$

由电磁场理论可知,左手材料薄板波导中一个传播模的功率为

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (E_v \times H_v^*)_z dx$$

$$= \frac{\beta_v}{\omega\mu_1} \int_0^d |E_{vy}|^2 dx + \frac{\beta_v}{\omega\mu_2} \int_d^{\infty} |E_{vy}|^2 dx. \quad (9)$$

因此,结合(7)和(9)式,只要证明对于不同的传播模式 E_{vy} 和 E_{vy}' , $I_1 + I_2 = 0$, 就证明了左手材料薄板波导中的模式之间也具有正交关系. 下面将逐个证明左手材料薄板波导中的模式之间的正交关系.

4. 模式正交性的证明

4.1. 快波奇模和慢波奇模之间的正交性

对于快波奇模和慢波奇模,将其电场表达式代入(8)式,可得

$$I_1 = \int_{-d}^d \frac{1}{\mu_1} E_{vy} E_{vy}'^* dx = 2 \int_0^d \frac{A_{f0} A_{s0}}{\mu_1} \times \sin(k_{1f} x) \sin(\kappa_{1s} x) dx$$

$$= \frac{2A_{f0} A_{s0}}{\mu_1} \frac{1}{\beta_s^2 - \beta_f^2} [\kappa_{1s} \sin(k_{1f} d) \cosh(\kappa_{1s} d) - k_{1f} \cos(k_{1f} d) \sinh(\kappa_{1s} d)], \quad (10a)$$

$$I_2 = 2 \int_d^{\infty} \frac{A_{f0} A_{s0}}{\mu_2} \sin(k_{1f} d) \sin(\kappa_{1s} d) \times \exp[-(\kappa_{2f} + \kappa_{2s})(x - d)] dx$$

$$= \frac{2A_{f0} A_{s0} (\kappa_{2f} - \kappa_{2s}) \sin(k_{1f} d) \sin(\kappa_{1s} d)}{\mu_2 (\beta_f^2 - \beta_s^2)}. \quad (10b)$$

由色散关系(2)和(4)式可知,

$$\frac{\kappa_{2f} \sin(k_{1f} d)}{\mu_2} = -\frac{k_{1f} \cos(k_{1f} d)}{\mu_1}, \quad (11)$$

$$\frac{\kappa_{2s} \sin(\kappa_{1s} d)}{\mu_2} = -\frac{\kappa_{1s} \cosh(\kappa_{1s} d)}{\mu_1}.$$

将(11)式代入(10b)式,可得

$$I_2 = \frac{2A_{f0} A_{s0}}{\mu_1} \frac{1}{\beta_f^2 - \beta_s^2} [\kappa_{1s} \sin(k_{1f} d) \cosh(\kappa_{1s} d) - k_{1f} \cos(k_{1f} d) \sinh(\kappa_{1s} d)]$$

$$= -I_1. \quad (12)$$

(12)式证明了快波奇模和慢波奇模之间的正交性.

4.2. 快波奇模和慢波偶模之间的正交性

对于快波奇模和慢波偶模,将其电场表达式代

入(8)式,可得

$$I_1 = \int_{-d}^d \frac{A_{f0} A_{se}}{\mu_1} \sin(k_{1f} x) \cosh(\kappa_{1s} x) dx = 0.$$

这是因为 $\sin(k_{1f} x) \cosh(\kappa_{1s} x)$ 是奇函数. 同理, $I_2 = 0$. 由函数的奇偶性容易证明奇模和偶模之间的正交性. 下面的证明中不再考虑这种情形.

4.3. 慢波偶模和辐射偶模之间的正交性

对于慢波偶模和辐射偶模,将其电场表达式代入(8)式,可得

$$I_2 = 2 \int_d^{\infty} \frac{A_{se}}{\mu_2} \cosh(\kappa_{1s} d) \exp[-\kappa_{2s}(x - d)] \times [D_e \exp(-i\rho x) + F_e \exp(i\rho x)] dx$$

$$= \frac{2A_{se} C_e}{\beta_s^2 - \beta_r^2} \left[\frac{\kappa_{2s} \cosh(\kappa_{1s} d)}{\mu_2} \cos\sigma d - \frac{\sigma}{\mu_1} \sin\sigma d \cosh(\kappa_{1s} d) \right]. \quad (13a)$$

由色散关系(4)式,可知

$$\frac{\kappa_{2s} \cosh(\kappa_{1s} d)}{\mu_2} = -\frac{\kappa_{1s} \sinh(\kappa_{1s} d)}{\mu_1}. \quad (14)$$

将(14)式代入(13a)式,可得

$$I_2 = \frac{-2A_{se} C_e}{\beta_s^2 - \beta_r^2} \left[\frac{\kappa_{1s} \sinh(\kappa_{1s} d)}{\mu_1} \cos\sigma d + \frac{\sigma}{\mu_1} \sin\sigma d \cosh(\kappa_{1s} d) \right]. \quad (13b)$$

根据(8)式,有

$$I_1 = 2 \int_0^d \frac{A_{se} C_e}{\mu_1} \cosh(\kappa_{1s} x) \cos\sigma x dx$$

$$= \frac{2A_{se} C_e}{\beta_s^2 - \beta_r^2} \left[\frac{\kappa_{1s} \sinh(\kappa_{1s} d)}{\mu_1} \cos\sigma d + \frac{\sigma}{\mu_1} \sin\sigma d \cosh(\kappa_{1s} d) \right]$$

$$= -I_2. \quad (15)$$

(15)式证明了慢波偶模和辐射偶模之间的正交性.

4.4. 辐射偶模之间的正交性

对于辐射偶模和辐射偶模,将其电场表达式代入(8)式,可得

$$I_1 = 2C_e C_e'^* \int_0^d \frac{1}{\mu_1} \cos\sigma x \cos\sigma' x dx, \quad (16)$$

$$I_2 = 2 \int_d^{\infty} \frac{1}{\mu_2} [D_e \exp(-i\rho x) + F_e \exp(i\rho x)]$$

$$\times [D_e^{*'} \exp(i\rho'x) + F_e^{*'} \exp(-i\rho'x)] dx. \quad (17)$$

利用如下关系式:

$$\sigma^2 - \sigma'^2 = \rho^2 - \rho'^2 = \beta'^2 - \beta^2, \quad (18)$$

可得

$$\begin{aligned} I_2 + I_1 = & C_e C_e^{*'} \left[\frac{1}{\mu_2} (\cos\sigma d \cos\sigma' d \right. \\ & + \frac{\sigma\sigma'}{\rho\rho'} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \sin\sigma d \sin\sigma' d) \frac{\sin(\rho - \rho')(\infty - d)}{\rho - \rho'} \\ & + \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\sigma}{\rho} \sin\sigma d \cos\sigma' d - \frac{\sigma'}{\rho'} \cos\sigma d \sin\sigma' d \right) \\ & \times \frac{\cos(\rho - \rho')(\infty - d)}{\rho - \rho'} \\ & + \frac{1}{\mu_2} (\cos\sigma d \cos\sigma' d - \frac{\sigma\sigma'}{\rho\rho'} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \sin\sigma d \sin\sigma' d) \\ & \times \frac{\sin(\rho + \rho')(\infty - d)}{\rho + \rho'} \\ & + \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\sigma}{\rho} \sin\sigma d \cos\sigma' d + \frac{\sigma'}{\rho'} \cos\sigma d \sin\sigma' d \right) \\ & \left. \times \frac{\cos(\rho + \rho')(\infty - d)}{\rho + \rho'} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

应用类似文献 [14] 的方法, 可得

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \frac{\pi C_e^2}{\mu_2} \left(\cos^2 \sigma d \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sigma^2}{\rho^2} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \sin^2 \sigma d \right) \delta(\rho - \rho'). \quad (20) \end{aligned}$$

(20) 式证明了辐射偶模之间的正交性.

5. 结 论

基于电磁场理论, 采用直接计算的方法逐个证明了左手材料薄板波导中的快波奇模和慢波奇模、奇模和偶模、慢波偶模和辐射偶模以及辐射偶模之间的正交性. 即左手材料薄板波导中的各个模式之间是相互正交的. 本文的工作扩展了已有文献的结果. 利用左手材料薄板波导中的各个模式之间的正交性, 可以研究左手材料薄板波导表面缺陷所引起模式之间的耦合以及传播模式的损耗. 这将另文报道.

- [1] Veselago V G 1968 *Sov. Phys. Usp.* **10** 509
- [2] Smith D R, Padilla W J, Vier D C et al 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184
- [3] Shelby R A, Smith D R, Nemat-Nasser S C et al 2001 *Appl. Phys. Lett.* **78** 489
- [4] Shelby R A, Smith D R, Schutz S 2001 *Science* **292** 77
- [5] Shelby R A 2001 *Ph. D. Thesis* (San Diego: University of California)
- [6] Parazzoli C G, Gregor R B, Li K et al 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 107401
- [7] Foteinopoulou S, Economou E N, Soucoulies C M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 107402
- [8] Ziolkowski R W, Heyman E 2001 *Phys. Rev. E* **64** 056625
- [9] Shi H Y, Jiang Y Y, Sun X D et al 2005 *Chin. Phys.* **14** 1571
- [10] Luo C R, Kang L, Zhao Q et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1607 (in Chinese) [罗春荣, 康雷, 赵乾等 2005 物理学报 **54** 1607]
- [11] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966
- [12] Garcia N, Nieto-Vesperinas M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 207403
- [13] Valanju P M, Walser R M, Valanju A P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 187401
- [14] Marcuse D 1982 *Light Transmission Optics* (2nd ed) (New York: Van Nostrand Reinhold Company)
- [15] Ilya V S, Andrey A S, Yuri S K 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057602

Orthogonality relations among modes in left-handed materials slab waveguide^{*}

Zhang Gao-Ming Peng Jing-Cui[†] Jian Zhi-Jian Huang Xiao-Yi

(*Department of Applied Physics , Hunan University , Changsha 410082 ,China*)

(Received 30 November 2005 ; revised manuscript received 25 January 2006)

Abstract

Based on the electromagnetic theory and by adopting the method of direct calculation , this paper proves that the modes of left-handed materials slab waveguide are orthogonal among each other , i. e. the fast waves , the slow waves , and the radiation modes are orthogonal among each other. This work provides a basis to study modes conversion in left-handed materials slab waveguide.

Keywords : left-handed materials , slab waveguide , modes , orthogonality relations

PACC : 4270F , 4280L , 4225B

^{*} Project supported by the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20030532008).

[†] Corresponding author. E-mail : jcpeng 381 @ yahoo . com . cn