

协调多时次差分格式的数值试验*

张立新^{1)†} 高新全²⁾ 李建平¹⁾

1) 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

2) 中国气象局气候研究开放实验室, 国家气候中心, 北京 100081)

(2005 年 7 月 20 日收到, 2005 年 11 月 1 日收到修改稿)

在一个简化气候模式的混沌态上, 针对影响实际预报准确度的多种因素, 将协调多时次差分格式与提为时间演变的变分同化进行了全面的比较. 结果发现协调多时次差分格式可以有效地纠正模式误差, 尤为独特之处在于其还可以有效地纠正微分方程本身不完善所造成的误差, 而这一点正是变分同化所不及的.

关键词: 协调多时次差分格式, 变分同化, 全局数值试验, 混沌

PACC: 9260X

1. 引言

文献 [1] 提出, 针对求解常微分方程的各种数值算法可以建立与之相协调的多时次差分格式 (HMTDS), 同时还提出了一种改进的最小二乘法来拟合自忆系数, 以期在实际计算过程中既可以改善计算效果, 也可使其计算稳定性得以保障.

若将求解常微分方程的任一算法写为

$$u_m = u_{m-1} + F_{m-1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

则与其相对应的 p 阶 HMTDS 有如下形式:

$$\begin{aligned} u_{m+1} = & \beta_0(m)u_m + \beta_{-1}(m)u_{m-1} \\ & + \dots + \beta_{-p}(m)u_{m-p} + \theta_0(m)F_m \\ & + \theta_{-1}(m)F_{m-1} + \dots + \theta_{-p}(m)F_{m-p}, \quad (2) \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} \theta_0(m) = & \beta_0(m) + \beta_{-1}(m) + \dots + \beta_{-p}(m) = 1, \\ \theta_{-1}(m) = & \beta_{-1}(m) + \beta_{-2}(m) + \dots + \beta_{-p}(m), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\theta_{-p}(m) = \beta_{-p}(m).$$

这里 $\beta_i(m)$ ($i = 0, -1, \dots, -p$) 为自忆系数.

协调性是指, 若 HMTDS 以原始算法生成的时间序列为初始场, 则其数值解与原始算法的数值解将完全一致. 改进的最小二乘法是指, 将 HMTDS 中自忆系数的拟合提为一个极小问题, 结合初猜值的谨

慎选取和矩阵预处理技术来确保其计算稳定性和计算效果.

要检验 HMTDS 的计算效果, 我们需要与其他同样考虑了历史资料使用的方法进行比较. 在气象预报实践中造成预报误差的原因主要有两个: 初值误差和模式的不准确, 因此初值的形成是数值预报的重要组成部分. 目前在该领域的主流方法是以最优控制技术的共轭方程理论为基础的变分同化 (VAR)^[2-5] 和以统计估计理论为基础的集合 Kalman 滤波同化方法^[6-9]. 尽管集合 Kalman 滤波考虑了模式误差, 但由于其计算、分析和传播协方差矩阵的计算成本过于巨大, 它还不是气象同化领域中的主流方法, 目前普遍认为最有前景的是四维变分同化. 然而 VAR 是在假定数值模式是准确无误差的前提下进行的, 而且需要模式约束, 在业务应用中存在一系列难题: 伴随方法虽然很好地解决了目标函数求梯度的问题, 但其编码过程繁杂枯燥, 同化系统的建立需要较长的周期, 物理过程的某些不连续变量所造成的“on-off”问题^[10] 也成为伴随程序建立的一个障碍, 更重要的是梯度的计算也需要花费巨大的计算量. 目前也只有少数几个发达国家在业务中初步采用了此方法, 所以在气象同化领域, 如何充分考虑模式误差和降低计算代价成为研究的热点问题. 在本文中, 将 HMTDS 与提为时间演变的 VAR 进行比较, 一方面可以对其计算效能做出客观的评价, 另一方

* 国家重点基础研究发展规划 (批准号: 2005CB321703, 2004CB418300) 和国家杰出青年科学基金 (批准号: 40325015) 资助的课题.

† E-mail: zhanglixin101@sohu.com

面也试图开辟一条符合中国国情的气象同化之路。

同时,为了进一步发展多时刻预报理论并提高其实际应用效果,对其作深入的研究是必要的。制约复杂气候系统预报水平提高的因素是多方面的^[11],正如以上所述模式误差和观测误差是主要的两个方面。观测误差总是存在的,模式误差又包括微分方程的误差、数值模式的误差等。由于对支配气候系统的物理规律认识有限,微分方程本身也往往存在误差,而与其对应的数值模式又不可避免地存在着计算误差,且对一些物理过程的参数化也常常是不精确的。尽管多时刻模式在实际的大气预报中已经有了一些应用^[12-15],但我们还不很清楚其究竟主要从哪个方面使预报水平得以提高,哪个方面是最主要的,而这一点无论对理论研究还是对实际应用都有着重大的意义。针对各种多时刻计算格式对计算误差的纠正,已经有一系列的工作^[16-20]表明其具有相当显著的效果。在一个简化气候模式的混沌态上,本文用数值试验全面考察了 HMTDS 对观测误差、参数误差和微分方程误差的纠正作用,同时也检验了 HMTDS 的计算稳定性。

值得一提的是,非线性系统对各种误差的极端敏感是显见的,然而有一个方面却常常被忽视,即在同样性质、大小相同的误差前提下,用同一种预报方法对同一个模式的不同初始场进行预报,预报效果却往往有着很大的差异。因而对一种预报方法的评价仅从一个或几个个例来看是不能得出正确结论的。本文还说明了进行全局数值试验的必要性,这也正是作者以一个高度简化的模型来做数值试验的原因,因为实际的预报模式太过复杂,只能由长时间预报经验的积累才能做到这一点,而这显然不利于理论研究。

2. 数值试验的设计

2.1. 简化气候模式及其算法

本文数值试验采用的简化气候模式^[21]可写为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - \sigma_1(x_2^2 + x_3^2) + b_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ &\quad + \sigma_1x_1x_2 - \sigma_2x_1x_3 + b_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

$$+ \sigma_2x_1x_2 + \sigma_1x_1x_3 + b_3, \quad (4)$$

式中, x_1, x_2, x_3 为模式变量。模式系数是由描述耗散作用的物理参数 μ, γ, K_D 决定的。文献 [22—24] 曾用此模式作过不同方面的理论研究。

数值试验中,将(4)式作为精确的微分方程,取 $\mu = -2.397783 \times 10^8, \gamma = 1100.565, K_D = 9.6075780$ 作为精确的物理参数,取 $\mu = -2.5 \times 10^8, \gamma = 1200, K_D = 10$ 作为有误差的物理参数(两种参数的取值均可保证模式积分的混沌性质)将

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{13}x_3 - \sigma_1(x_2^2 + x_3^2) + b_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \sigma_1x_1x_2 \\ &\quad - \sigma_2x_1x_3 + b_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \sigma_2x_1x_2 \\ &\quad + \sigma_1x_1x_3 + b_3 \end{aligned} \quad (5)$$

作为有误差的微分方程,此微分方程与(4)式相比缺失了 $a_{12}x_2$ 和 $a_{21}x_1$ 两个线性项。

数值试验采用的原始算法为 1963 年 Lorenz^[25] 使用的差分格式,即 2 阶显式龙格-库塔算法(下面称其为单时次差分格式),积分步长 $h = 0.1$ h。

2.2. 初始场的选取

本文中的数值试验采用模拟研究^[26],也就是给定初值,用精确的微分方程与精确的物理参数以原始算法向前积分数日,并把积分结果作为大气的真值(下面称其为基态);“观测”数据则是按一定的间隔从这个基态上抽取(有时还要加上一定的扰动误差)。使用同样的“观测”采用不同的方法做预报,通过与基态的比较来显示不同方法的预报精度差异。记基态变量为 x_1, x_2, x_3 ,预报变量为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$,文中采用均方根误差

$$R = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x}_i)^2}$$

来表征这一差异, R 值越小(大)表示预报效果越好(差)。

值得注意的是,区别于一般的单时次预报模式,不论是 VAR 还是 HMTDS 都需要用到多个过去时刻的观测资料。然而观测间隔的选择和使用的观测资料的长短都会对 VAR 和 HMTDS 的效果产生影响,而且 HMTDS 还需要用到更长的回溯时段中的观测资料来拟合自忆系数,回溯时段的选取也直接影响

着它的计算效果,这就给数值试验带来很大的困难.

考虑到本文只是定性地比较预报方法的不同,因而在数值试验中我们取定观测间隔 $\delta T = 10 h$,回溯时段 $L = 1000 h$,由数值试验来确定最优回溯阶 p 的取值.这里的回溯阶,对 VAR 而言是指用了 p 个独立的观测资料,对 HMTDS 而言是指起报时用了 p 个独立的观测资料.

2.3. 数值试验的类别

本文共进行 6 组数值试验.

试验 1 微分方程和物理参数都是精确的而观测有误差,观测误差是在由基态获得的观测序列上叠加均值为 0、方差为 0.1 的正态扰动生成的.

此时的 VAR 是要修正初始场来改进预报效果,可表示为求如下函数的约束极小问题:

$$J(X(-p)) = \sum_{m=0}^{-p} (X(m) - X^{ob}(m))^2, \quad (6)$$

式中,

$$X(m) = (x_1(m), x_2(m), x_3(m))^T$$

为时刻 m 的预报值,

$$X^{ob}(m) = (x_1^{ob}(m), x_2^{ob}(m), x_3^{ob}(m))^T$$

为时刻 m 的观测值.以 $X^{ob}(-p)$ 为初猜值修正 $-p$ 时刻的观测.约束条件为精确物理参数对应的方程(4).

试验 2 微分方程和物理参数都是精确的而观测有误差,观测误差是在由基态获得的观测序列上叠加均值为 0、方差为 0.01 的正态扰动生成的.

试验 3 微分方程和观测都是精确的而物理参数有误差.

此时的 VAR 是通过修正参数来改进预报效果,可表示为求如下函数的约束极小问题:

$$J(\mu, \gamma, K_D) = \sum_{m=0}^{-p} (X(m) - X^{ob}(m))^2. \quad (7)$$

以有误差的物理参数为初猜值和方程(4)为约束条件对其进行修正.

试验 4 观测和物理参数都是精确的而微分方程是不精确的.

此时的 VAR 仍将这误差视为参数的误差,可表示为求如下函数的约束极小问题:

$$J(\mu, \gamma, K_D) = \sum_{m=0}^{-p} (X(m) - X^{ob}(m))^2. \quad (8)$$

以精确的物理参数为初猜值和方程(5)为约束条件对其进行修正.

试验 5 微分方程、物理参数和观测都是不精

确的,观测误差是在由基态获得的观测序列上叠加均值为 0、方差为 0.1 的正态扰动生成的.

此时的 VAR 是通过同时修正参数和初始场来改进预报效果,可表示为求如下函数的约束极小问题:

$$J(\mu, \gamma, K_D, X(-p)) = \sum_{m=0}^{-p} (X(m) - X^{ob}(m))^2. \quad (9)$$

以有误差的物理参数和 $X^{ob}(-p)$ 为初猜值,以方程(5)为约束条件对其进行修正.

试验 6 微分方程、物理参数和观测都是不精确的,观测误差是在由基态获得的观测序列上叠加均值为 0、方差为 0.01 的正态扰动生成的.

在以上数值试验中,VAR 和改进的最小二乘法采用的下降算法均为变尺度算法^[27].

3. 全局数值试验的必要性

为说明在同样性质、大小一致的误差前提下,用同一种预报方法对同一个非线性模式的不同初始场进行预报效果往往有着很大的差异,我们可以先对一些个例做数值试验.

不妨选取初值 A 为 $x_1^0 = -1.5548, x_2^0 = -0.3745, x_3^0 = -0.0126$,初值 B 为 $x_1^0 = -1.9373, x_2^0 = -0.4530, x_3^0 = -0.4344$,均积分 5200 步,剔除前 3000 步的适应期,以第 4000 步为当前时刻的观测场.初值 A 和初值 B 生成的基态分别称为基态 a 和基态 b ,进行试验 1 和试验 4,其中回溯阶 p 取为 10,预报时间为 5 d.

图 1 给出了对试验 1 的个例分析.对于同一个扰动样本,由图 1(a)可见,对于基态 a VAR 的效果十分明显,而 HMTDS 在前 3 d 也有明显的效果,但后 2 d 基本没有什么改善.由图 1(b)可见,对于基态 b VAR 对预报几乎没有什么改善,而 HMTDS 却一直有着明显的优势.再考虑对基态 a 叠加另一个均值方差一致的扰动样本,由图 1(c)可见,VAR 在前 2 d 有明显的效果,而 HMTDS 在后 2 d 才显示了优势.

图 2 给出了对试验 4 的个例分析.由图 2(a)可见,对基态 a VAR 和 HMTDS 均没有什么效果,而且有些时段的预报还不如单时次差分格式.由图 2(b)可见,对基态 b VAR 仍没有什么效果,而 HMTDS 在预报初期有一定的效果但是在中间时段还不如单时次差分格式.

由以上分析可知,即使是同一个预报方法在同

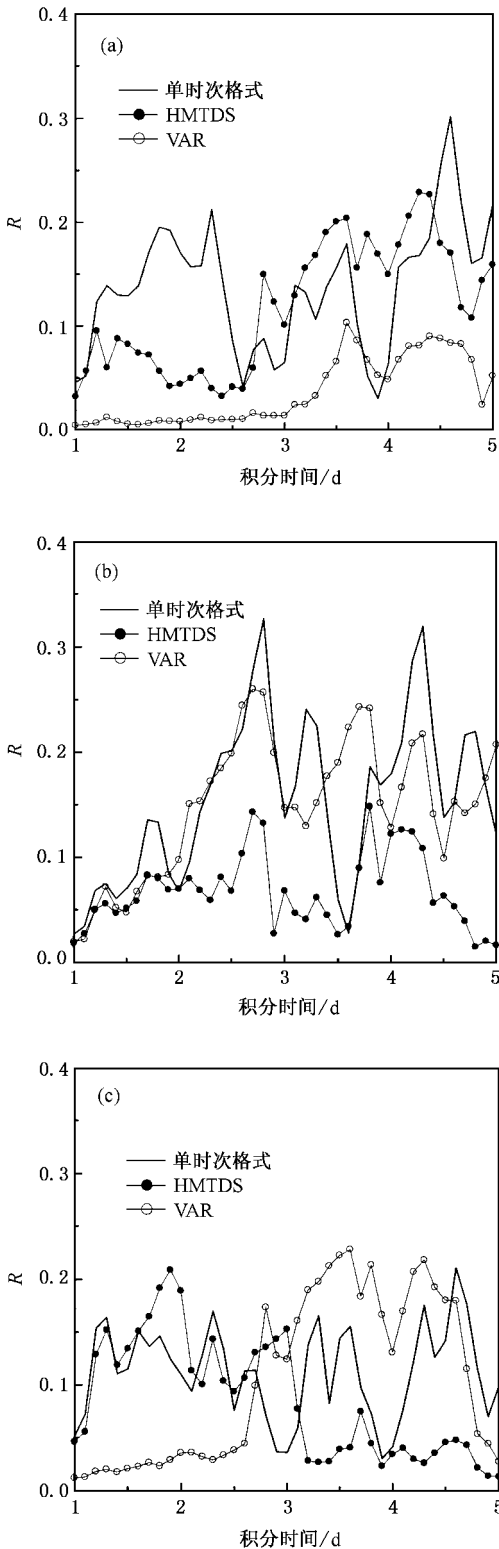


图1 试验1的个例分析 (a)使用扰动样本1对基态 a 的预报 (b)使用扰动样本1对基态 b 的预报 (c)使用扰动样本2对基态 a 的预报

样的误差条件下,针对不同个例的预报其效果也有着很大的差异.因此,仅仅从一些个例试验难以确定

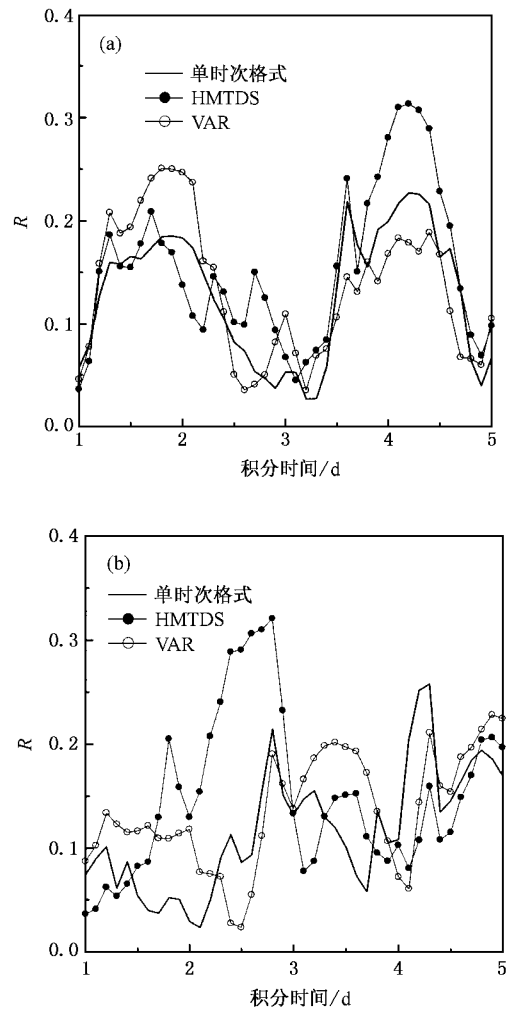


图2 试验4的个例分析 (a)对基态 a 的预报 (b)对基态 b 的预报

不同预报方法的优劣,只有从大量的个例试验中找出其统计特征,才有可能对不同的预报方法做出正确的评价,更有助于我们对问题的理解.

4. 全局数值试验及结果分析

4.1. 样本和统计量的选取

考虑到本文采用的简化气候模式,若给以精确的微分方程和精确的物理参数,则任给初值由原始算法积分总要进入一个稳定的混沌吸引子上,这个吸引子在相空间中是有限的,即

$$\begin{aligned} x_1 &\in [-2.8870, -0.9010], \\ x_2 &\in [-1.8692, 0.4867], \\ x_3 &\in [-1.023, 1.8551]. \end{aligned} \quad (10)$$

因此,可在该范围内均匀选取 1000 个初值,由这些初值可生成 1000 条基态,以这些基态的第 4000 步为当前时刻.对每一种方法每一个基态均进行上述的 6 组试验,并计算预报的均方根误差.我们记 $R_i(m)$ ($i=1, 2, \dots, 1000; m=1, 2, \dots$) 表示在某一组试验中用某一方法对第 i 个基态进行预报在时刻 m 的均方根误差.定义

$$\bar{R} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} R_i(m),$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (R_i(m) - \bar{R})^2}$$

分别为这一方法在此组试验中的平均误差和与其对应的均方根误差.

平均误差越低说明这一方法就越好,但同时我们也应注意其对应的均方根误差,因为均方根误差刻画了这一方法对不同基态的敏感程度,均方根误差越小说明这一方法的普适性越好.

需要说明的是,在试验 1、试验 2、试验 5、试验 6 中不同的基态所加的正态扰动样本只是数量级相同的,不同的基态对应不同的扰动误差样本.6 组试验的预报时段均取为 10 d.

4.2. 最优回溯阶的确定

在做全局数值试验时,我们可以方便地根据平均误差是否还能下降来确定 VAR 和 HMTDS 的最优回溯阶.表 1 给出了 6 组试验中由平均误差确定的 HMTDS 和 VAR 的最优回溯阶.下面的数值试验均是在取最优回溯阶的条件下进行的.

表 1 HMTDS 和 VAR 的最优回溯阶

	试验 1	试验 2	试验 3	试验 4	试验 5	试验 6
HMTDS	10	10	20	20	10	20
VAR	30	40	10	20	20	40

4.3. 数值试验结果及分析

为有一个直观的印象,本文除了给出全局性的平均误差及其对应的均方根误差曲线外,还对每组实验均给出 HMTDS 和 VAR 对同一个基态的预报个例,给出其积分的时间序列以及与之对应的预报均方根误差曲线,对此个例的预报效果不再作具体分析.同时也给出与此个例对应的 HMTDS 自忆系数的变化曲线(分别为与变量 x_1 对应的 $\beta_0, \beta_{-p/2}, \beta_{-p}$),以便下面进行分析.

图 3 为试验 1 的全局分析结果.由图 3(c)可见, HMTDS 只在 2 d 内对预报有一定的改善而 VAR 的优势却是巨大的,不仅其平均误差几乎在整个预报时段内都能保持比较优势,而且 3 d 内还保持了较低的均方根误差.值得注意的是,不论哪种方法都会在一定的预报时段后平均误差达到饱和,均方根误差也趋于平稳.

图 4 为试验 2 的全局分析结果.由图 4(c)可见, HMTDS 对预报的改善仍然是小幅度的,但与试验 1 相比可以在更长的时段内保持对单时次差分格式的优势,而且其均方根误差也比单时次差分格式要略小一些. VAR 的优势仍是巨大的.

图 5 为试验 3 的全局分析结果.由图 5(c)可见, HMTDS 大幅度改善了预报效果,可以在整个预报时段内保持对单时次差分格式的绝对优势,且均方根误差也比其小了许多. VAR 的优势却是无可比拟的,分析表明这是因为在没有其他误差的情况下它几乎能反演出完全精确的物理参数.

图 6 为试验 4 的全局分析结果.由图 6(c)可见, HMTDS 不仅在将近 3 d 的时段内保持了对单时次差分格式的优势而且比 VAR 更大幅度改善了预报效果,在预报的初期其还具有更小的均方根误差,但是在接近 3 d 时 HMTDS 的效果有些变差. VAR 可以在 3 d 之内保持对单时次差分格式的优势,虽然改善的幅度不是很大但也是明显的.

图 7 为试验 5 的全局分析结果.由图 7(c)可见, HMTDS 不仅没有显示出任何优势反而在 3 d 内使预报变得更差,而 VAR 却仍可以对预报进行改善,并且在平均误差达到饱和前的 4 d 内一直保持其优势,尽管不是很大的幅度却也是明显的,而且其预报初期具有较小的均方根误差.

图 8 为试验 6 的全局分析结果.由图 8(c)可见, HMTDS 在长达 8 d 的时段内保持着明显的优势且其均方根误差也在此时段内比另外两种方法略小一些.然而 VAR 仅在 2 d 与 3 d 间对预报有些许改善,在其他时段内几乎没有什么效果.

综合以上 6 组试验,可以看出 HMTDS 对主要由观测误差引起的预报障碍不能有效地加以克服.这是容易理解的,因为对于白噪声的正态扰动是谈不上什么记忆的,但其仍能对预报效果有小幅提高,很可能是因为 HMTDS 是同时使用多个初始场起报,对观测误差有一定的滤波作用.而 HMTDS 对于模式误差却可以较为显著地纠正.若观测误差较之于模式误

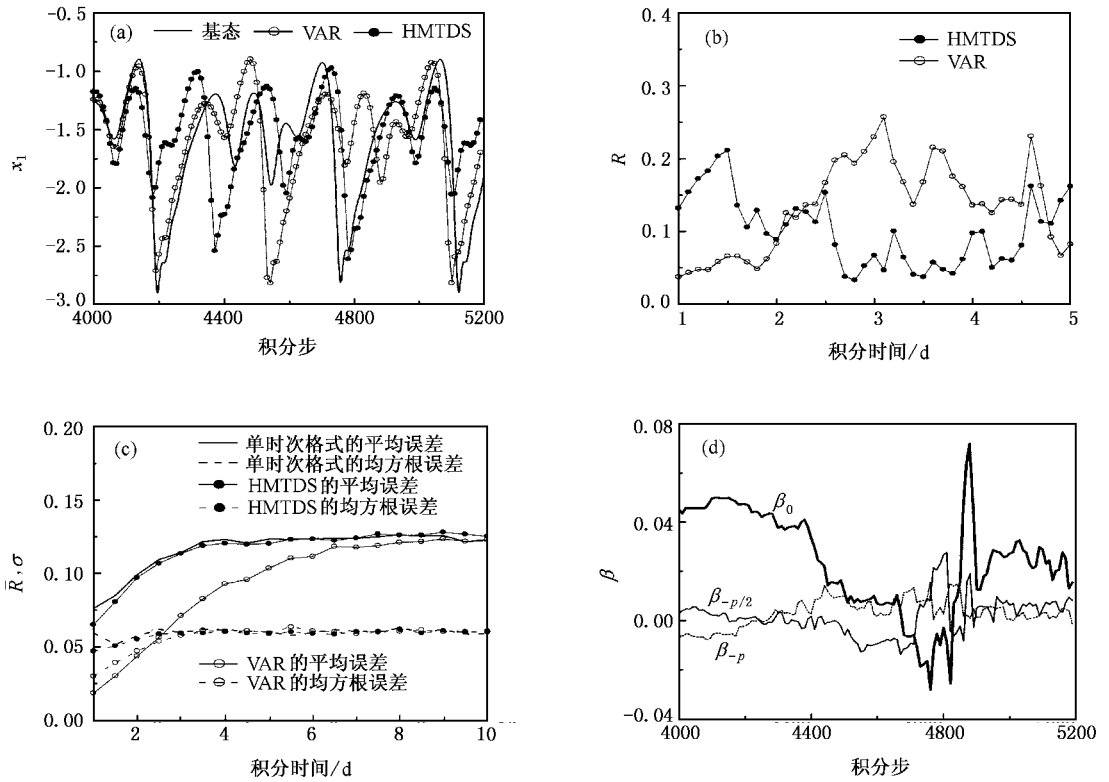


图3 试验1的全局分析 (a)个例的积分时间序列 (b)个例的均方根误差 (c)全局结果 (d)个例自忆系数随积分时间的变化

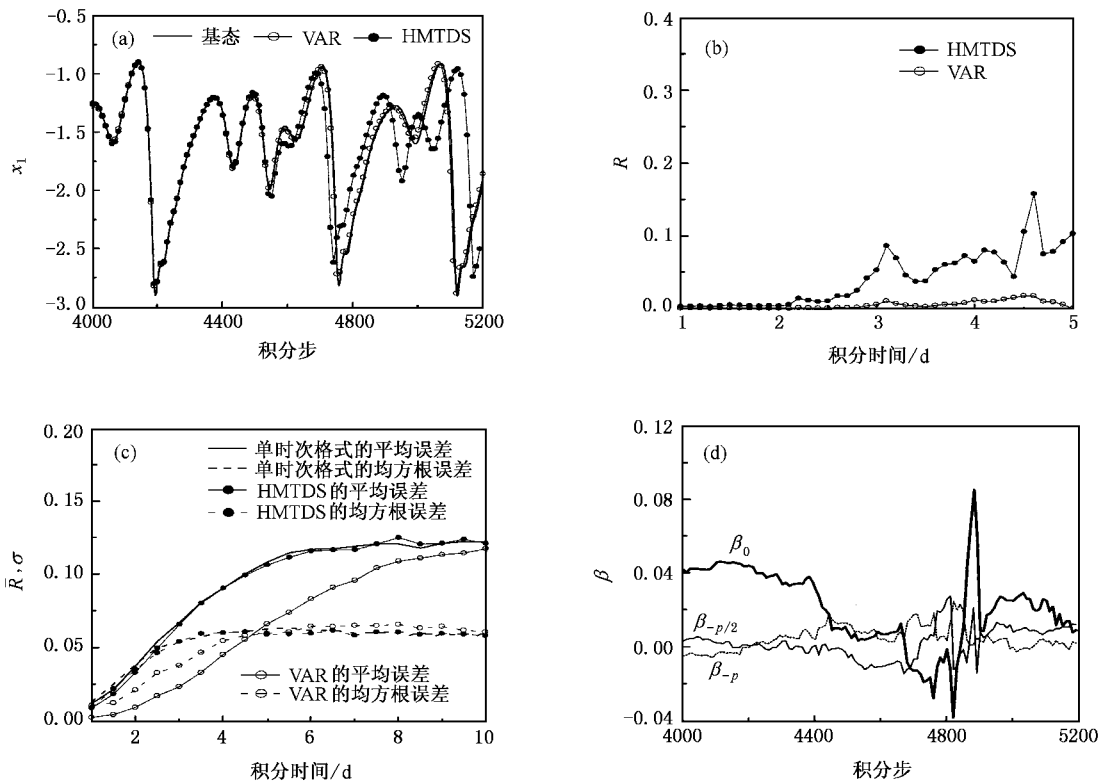


图4 试验2的全局分析 (a)个例的积分时间序列 (b)个例的均方根误差 (c)全局结果 (d)个例自忆系数随积分时间的变化

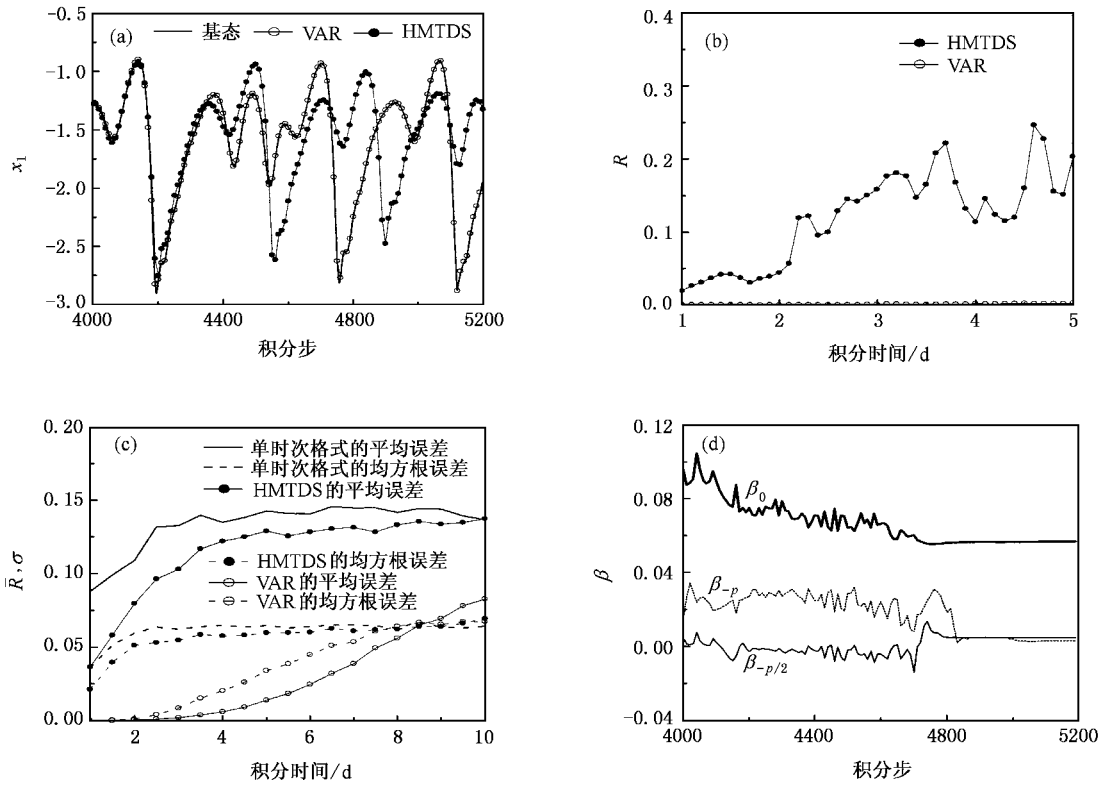


图5 试验3的全局分析 (a)个例的积分时间序列 (b)个例的均方根误差 (c)全局结果 (d)个例自忆系数随积分时间的变化

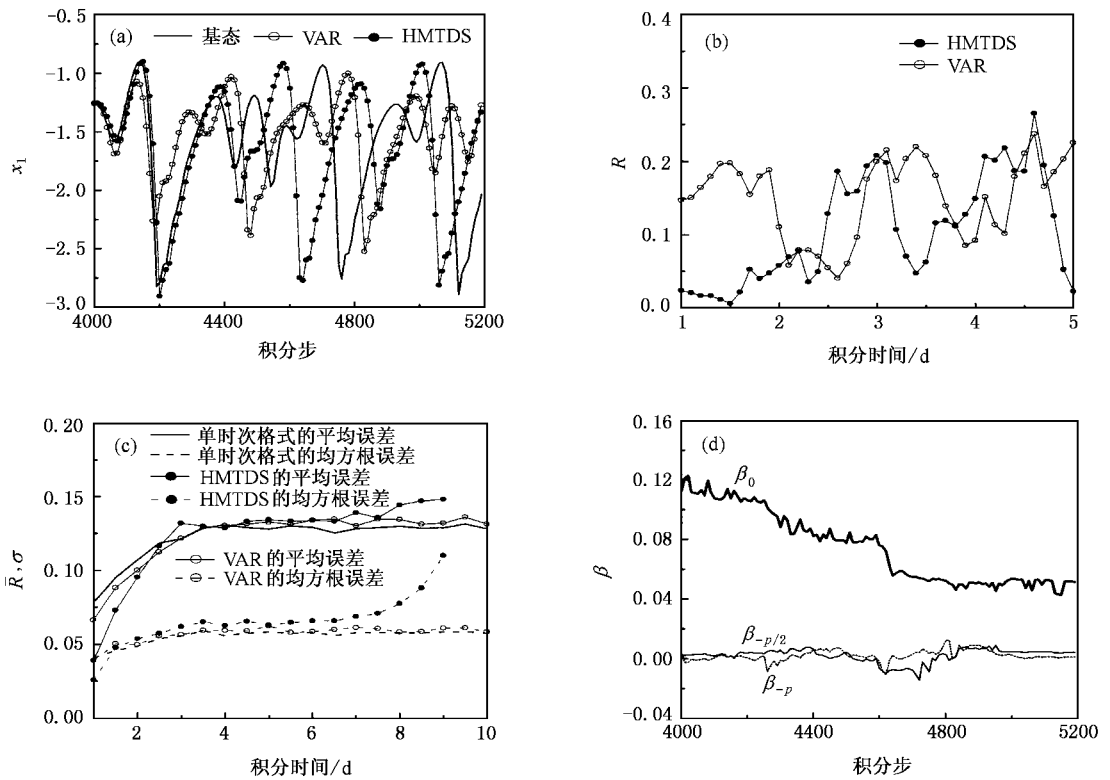


图6 试验4的全局分析 (a)个例的积分时间序列 (b)个例的均方根误差 (c)全局结果 (d)个例自忆系数随积分时间的变化

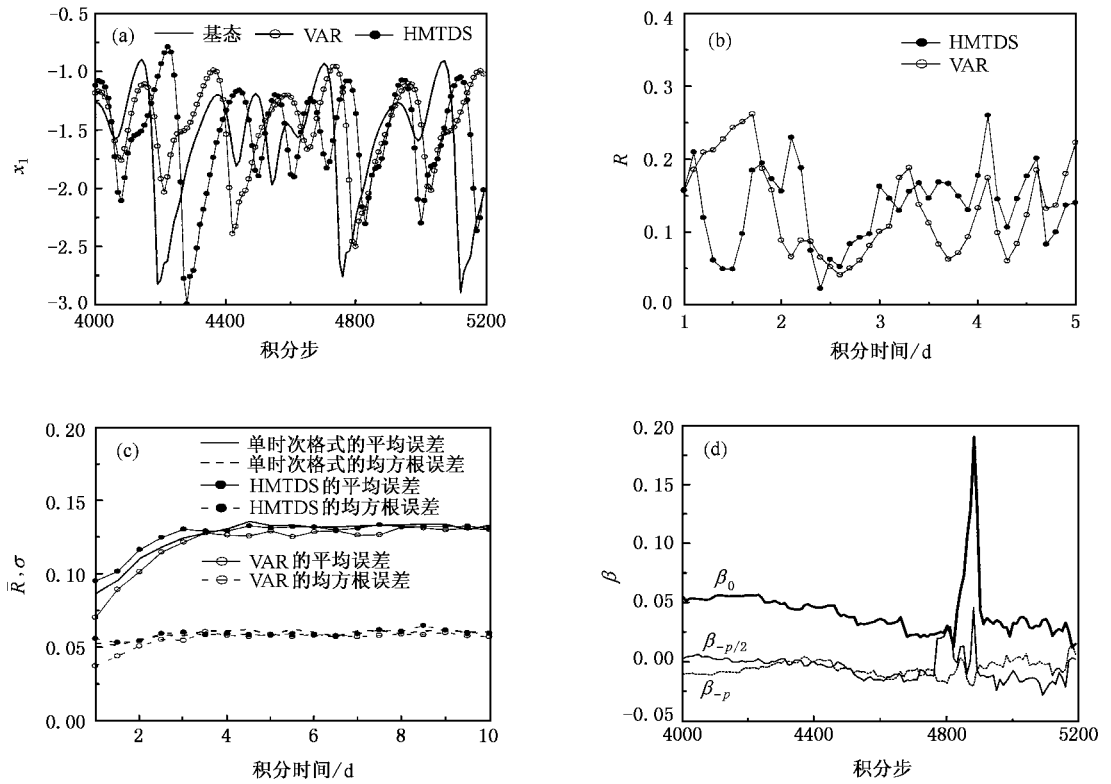


图7 试验5的全局分析 (a)个例的积分时间序列 (b)个例的均方根误差 (c)全局结果 (d)个例自忆系数随积分时间的变化

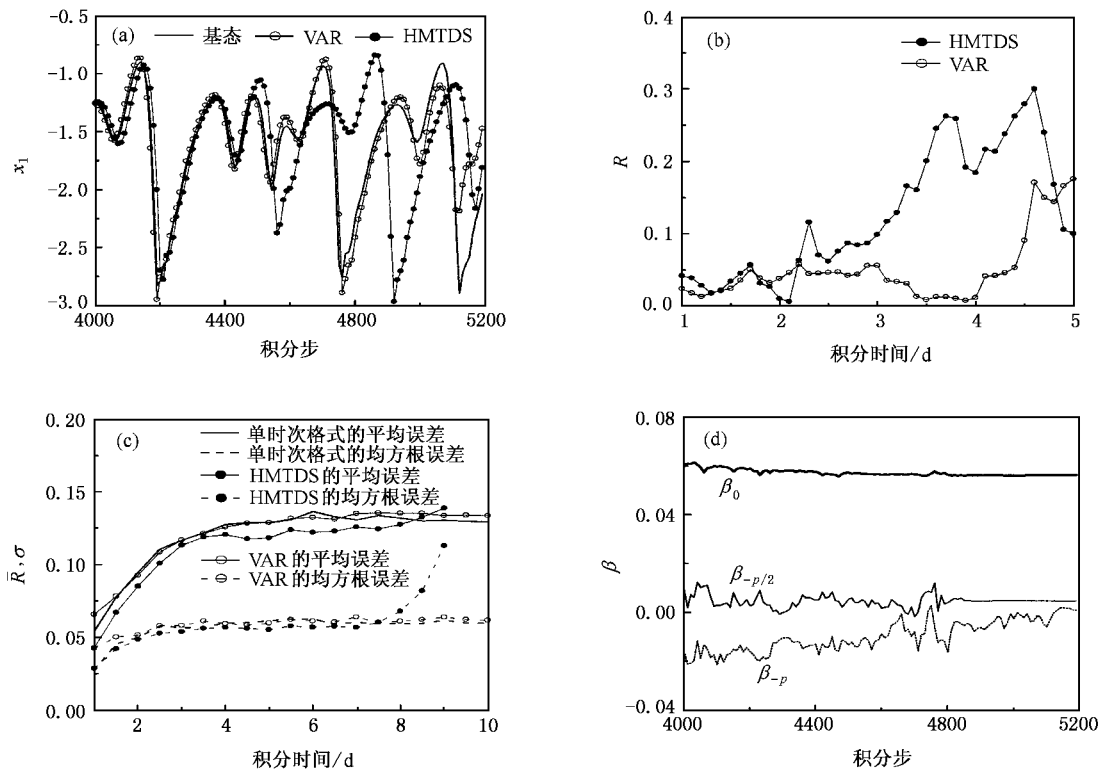


图8 试验6的全局分析 (a)个例的积分时间序列 (b)个例的均方根误差 (c)全局结果 (d)个例自忆系数随积分时间的变化

差变得更为重要时, HMTDS 的效果有可能会变差, 若观测误差较小, 其对模式误差的纠正使用就显现出来, 这一点可以清楚地从 6 组试验的对比中看到. 与此相反, VAR 却可以对初始场做出显著的改善且对模式参数误差的纠正也有着极为明显的效果. 但是 VAR 是在假定原始模式无误差的前提下来做的, 因而若存在相对较大的微分方程本身的误差或几种模式误差都有时, 它对预报的改进就要大打折扣, HMTDS 反而更能发挥作用.

图 3(d)—图 8(d) 给出了自忆系数的变化曲线, 由图可见自忆系数随积分时间是不断变化的, 形式也是丰富多彩的, 这充分体现了 HMTDS 的自适应特点, 可能也正因为此才使其具有较好的预报效果. 另一方面, 大致可看到越靠近当前时刻的自忆系数其值也越大, 但并不尽然. 如图 5(d) 中 β_{-p} 在较长的时段内都比 $\beta_{-p/2}$ 还大, 但 β_0 的优势一直都很明显, 这体现了当前初始场的重要性. 最后我们还看到, 由于在改进的最小二乘法中初猜值是谨慎选取的, 最后拟合获得的自忆系数变化量级也在其附近, 没有出现绝对值过大的自忆系数, 从而可以有效地保证其计算的稳定. 若考虑到并没有对拟合后的自忆系数进行标准化, 这一点不仅显得更为重要也从另一个侧面佐证了最小二乘法改进的必要性.

4.4. 对协调多时次差分格式计算稳定性的考察

HMTDS 的计算稳定性也可通过以上的数值试验加以考察. 表 2 给出了其在 6 组试验中出现不稳定(亦即计算出现溢出)的基态数 N . 从全局来看至少在 10 d 的预报时段内其计算不稳定问题是可以忽略的, 这有力地证明了构造相协调的多时次差分格式结合改进的最小二乘法可以大幅提高计算的稳定性. 但同样需要注意的是, 在试验 4 和试验 6 中, 预报后期一些少量的基态还是出现了计算的不稳定, 因为从图 6(c) 和图 8(c) 中可见预报后期的平均误差和均方根误差都是急剧增长的. 不过从全局看,

HMTDS 的计算稳定性是有保障的.

表 2 HMTDS 计算不稳定的基态数 N

	试验 1	试验 2	试验 3	试验 4	试验 5	试验 6
N	0	0	1	7	0	3

5. 结 论

通过与 VAR 的比较, 我们注意到 HMTDS 有优势也有劣势. 对于真实的系统而言, 只有在充分考虑影响其预报效果的主要因素的基础上才能正确选取适当的方法来应用. 若能将 VAR 与 HMTDS 相结合, 譬如考虑先对回溯时段的观测场进行分段初始化再使用 HMTDS 进行预报, 可能会有更好的效果.

考虑到描述复杂气候系统的数值模式往往也相当复杂, VAR 也面临着一些挑战. 正如引言所述, 一是变量维数众多会导致下降算法产生困难, 另外伴随模式的构造也还有不少技术问题, 同时复杂的原始模式会使 VAR 由于极其耗费机时而不能得到实际的应用. 然而 HMTDS 却不存在这个问题, 因为就常微分方程组而言, 用来拟合自忆系数的最小二乘矩阵的大小仅仅与回溯阶有关. 这是因为它的不同方程之间所对应的自忆系数是相互独立的, 方程个数的增加也只是增加了同一时间自忆系数的拟合次数, 不会造成算法上太大的困难. 而且对于少变量的目标函数, 还有更好的优化算法^[28], 譬如遗传算法、混沌优化算法等. 这样就可能使最小二乘的效果进一步提高, 带动 HMTDS 预报水平的提高. 不过由于在每一积分步都要拟合自忆系数会大大增加运算时间, 但考虑到大量的矩阵与向量运算是 HMTDS 计算的主要特点, 而并行算法又特别适宜于处理此类问题, 在实际应用中这是可以解决的.

由于本文是在一个简化模型上来进行数值模拟研究的, 其所得结论的局限性是显然的. HMTDS 在真实系统中的计算效能到底怎样, 还需要在实际的具体问题中加以严格的检验.

[1] Zhang L X, Qian W H, Gao X Q et al 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3465 (in Chinese) [张立新、钱维宏、高新全等 2005 物理学报 **54** 3465]

[2] Lewis J M, Derber J C 1985 *Tellus* **37** A 309

[3] Le Dimet F X, Talagrand O 1986 *Tellus* **38** A 97

[4] Gao J D, Chou J F 1994 *Acta Meteor. Sin.* **52** 129 (in Chinese) [郜吉东、丑纪范 1994 气象学报 **52** 129]

[5] Fan X G, Chou J F 1999 *Chin. J. Atmos. Sci.* **23** 543 (in Chinese) [范新岗、丑纪范 1999 大气科学 **23** 543]

[6] Kalman R E 1960 *Trans. AMSE D: J. Basic Eng.* **82** D 35

- [7] Burgers G , van Leeuwen P G , Evensen G 1998 *Mon. Wea. Rev.* **126** 1719
- [8] Houtekamer P L , Mitchell H L 1998 *Mon. Wea. Rev.* **126** 796
- [9] Mitchell H L , Houtekamer P L , Pellerin G 2002 *Mon. Wea. Rev.* **130** 2791
- [10] Mu M , Wang J F 2003 *J. Atmos. Sci.* **60** 2010
- [11] Chou J F , Xu M 2001 *Chin. Sci. Bull.* **46** 1497
- [12] Gu X Q 1998 *Chin. Sci. Bull.* **43** 1692
- [13] Cao H X , Gu X Q 2001 *Prog. Nat. Sci.* **11** 309 (in Chinese) [曹鸿兴、谷湘潜 2001 自然科学进展 **11** 309]
- [14] Feng G L , Cao H X , Dong W J *et al* 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 701
- [15] Feng G L , Jia X J 2004 *Chin. Phys.* **13** 413
- [16] Gu X Q , Kang H W , Cao H X *et al* 2001 *Prog. Nat. Sci.* **11** 393
- [17] Gu X Q , You X T , Zhu H *et al* 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 833
- [18] Feng G L , Cao H X , Dong W J *et al* 2001 *Chin. Phys.* **10** 1004
- [19] Feng G L 2002 *Acta Mech. Sin.* **18** 53
- [20] Feng G L , Dong W J 2003 *Chin. Phys.* **12** 1076
- [21] Guo B R , Fang X G , Zhang H L *et al* 1996 *Nonlinear Characters of Climate System and Prediction Theory* (Beijing : Meteorological Press) p11 (in Chinese) [郭秉荣、范新岗、张红亮等 1996 气候系统的非线性特征及其预测理论(北京 :气象出版社)第 11 页]
- [22] Zhang H L , Fang X G , Chou J F 1998 *Theor. Appl. Climatol.* **61** 103
- [23] Gao X Q , Feng G L , Dong W J *et al* 2003 *Acta Mech. Sin.* **19** 134
- [24] Feng G L , Dai X G , Wang A H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606]
- [25] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [26] Charney J , Halem M , Jastrow R 1969 *J. Atmos. Sci.* **26** 1160
- [27] Chen B L 2003 *Theory and Methods of Optimization* (Beijing : Tsinghua University Press) p372 (in Chinese) [陈宝林 2003 最优化理论与算法(北京 :清华大学出版社)第 372 页]
- [28] Wang D G , Liu Y X , Li S C 2003 *Adv. Mech.* **33** 166 (in Chinese) [王登刚、刘迎曦、李守臣 2003 力学进展 **33** 166]

Numerical experiments on a harmonized multi-time difference scheme *

Zhang Li-Xin^{1)†} Gao Xin-Quan²⁾ Li Jian-Ping¹⁾

1) *National Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics , Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China*

2) *Laboratory for Climate Studies of China Meteorological Administration , National Climate Center , Beijing 100081 , China*

(Received 20 July 2005 ; revised manuscript received 1 November 2005)

Abstract

Numerical experiments are performed on the chaotic movement of a simplified climate model. Considering various factors related to the predictability , we numerically compare the harmonized multi-time difference scheme (HMTDS) with the variational assimilation. It is shown that the HMTDS corrects remarkably the model bias , especially the differential equation bias , which is just the drawback of the variational assimilation.

Keywords : harmonized multi-time difference scheme , variational assimilation , global numerical experiment , chaos

PACC : 9260X

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2005CB321703 , 2004CB418300) and the National Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 40325015).

† E-mail : zhanglixin101@sohu.com