

# 金属中自由电子气体的非广延统计研究\*

王参军<sup>1)†</sup> 王晓峰<sup>1)</sup>

1) 云南大学物理系非线性复杂系统中心, 昆明 650091)

2) 宝鸡文理学院物理系, 宝鸡 721007)

(2005 年 3 月 31 日收到, 2005 年 10 月 17 日收到修改稿)

采用分解近似的方法讨论了在 Tsallis 量子统计物理框架中, 金属中自由电子气体的非广延参数  $q$  的热力学统计处理, 计算出了总粒子数、总能量、自由能、热容量等热力学量, 得出结论: 在低温区域,  $q \rightarrow 1$  时, 所有结果都可以回到传统的 Fermi-Dirac 分布, 非广延参数  $q$  控制着系统的非广延程度. 最后, 详细讨论了  $q$  与热容量之间的关系, 并与以前的结果作了比较.

关键词: Tsallis 广义统计, 非广延参数  $q$ , 自由电子气体, Fermi-Dirac 分布

PACC: 0520, 0530F

## 1. 引 言

熵的概念由 R. Clausius 在 1865 年引入热力学, 经过 L. Boltzmann 和 J. W. Gibbs 等人的工作, 成为统计物理学的基石. 以 Boltzmann-Gibbs (B-G) 熵为基础的 B-G 平衡态统计力学, 一个多世纪以来得到了广泛而成功的应用. 然而, B-G 统计力学有其适用范围和局限性. 自然界也存在很多用 B-G 统计力学不能完全描述的系统: 长程相互作用<sup>[1]</sup>、长程微观记忆(例如, 非 Markov 随机过程)<sup>[2,3]</sup>、星系奇异速度<sup>[4,5]</sup>、Lévy 反常扩散<sup>[6]</sup>、一维耗散系统<sup>[7]</sup>等等.

1988 年 Tsallis 提出了非广延熵,

$$S_q = k \frac{1 - \sum p_n^q}{q - 1}, \quad (q \in R). \quad (1)$$

它是建立在 Tsallis 的非广延信息测度的基础之上<sup>[8]</sup>. 其中,  $\{p_n\}$  是标准概率的集合,  $k$  是 Boltzmann 常数(这里  $k = 1$ ).  $q$  是非广延参数, 在  $q \rightarrow 1$  时, 传统的 B-G 统计被包括在内.

直到近几年, 许多工作才显示出这种方法是很有用的. 在某种程度上, 我们认为它能够让热力学统计物理的基本概念更加普及<sup>[9]</sup>. 另外, 还可以为一些实验和观测结果提供理论基础和相关解释, 而这些结果用 B-G 统计却不能解释<sup>[10]</sup>. 也就是说, 在某

种程度上, B-G 统计可能不能产生理想的物理预测. 然而, 与 B-G 统计不同的是 (1) 式有一个自由参数的非零集合, 这以  $q$  表现 ( $q \in R$ ). 这个唯一的参数  $q$  对于  $q = 1$  的偏离决定了系统的非广延程度, 可以扩大 B-G 统计的预测能力.

1995 年以后, 长期困惑我们的非广延参数  $q$  的物理含义才开始被探索. 在这个主题的工作中, 有两个主流, 一方面是对保守动力系统和(低维及高维)非线性耗散系统<sup>[7,11,12]</sup>的探索. 另一方面是积极探讨在可测量的物理系统中估计  $q$  的边界. 非广延统计的应用非常广泛, 比如, 黑体辐射<sup>[13,14]</sup>, Stefan-Boltzmann 常数<sup>[15,16]</sup>, 天体物理<sup>[17]</sup>等等.

在所有工作中, 两种近似方法被应用于量子分布函数: 一种是渐近法 (asymptotic approach, AA<sup>[13]</sup>), 这种方法被应用到许多方面<sup>[13,15]</sup>. 第二种方法是分解法 (factorization approach, FA<sup>[18]</sup>), 文献 [19] 表明, FA 方法随着系统粒子数的增长而不再适用, 使 FA 方法的应用受到一定的限制. 但是, 文献 [20] 的结果表明以前的结果可能不正确, 在系统中存在一个温度区, 在这个区域近似忽略非常重要, 而在其他区域 FA 方法能够被应用, 且不受粒子数的限制. 从 FA 方法的结果出发, 许多物理系统开始被研究. 关于玻色子的研究很多, 而且已经比较成熟, 但是关于费米子的热力学量的普遍表达式仍然是一个没有完全解决的问题, 虽然以前有过相关的讨论, 但是不是很

\* 国家重点基础研究发展计划 (973) 项目 (批准号: G2000077308) 和国家自然科学基金 (批准号: 10565004) 资助的课题.

† E-mail: wcyj7944@163.com

全面,而且计算非常复杂.而且磁场系统、许多表面张力问题等研究也有需要热力学统计物理的非广延公式的迹象.

根据上面的事实,我们研究了费米子在可能是由  $q$  表征的分形时空的普遍量子分布函数,比如,粒子数、能量、自由能、压强、热容量等.一旦这些普遍公式被建立,就能够进一步研究由于分布函数的改变,统计力学的结构如何被影响.最近 Martínez 已经作了类似的工作<sup>[21]</sup>.我们用 FA 方法得出了与他们一致的结果,并且计算非常简单.值得注意的是,对于无相互作用的费米子,分形结构的信息是保留在非广延参数  $q$  中,到目前为止,一般认为  $q$  是与分维和多重分形谱有关联的.在某种程度上,我们研究的是由于分布函数的改变而引起的对一般的热力学量的修正.

## 2. 总粒子数

金属中的自由电子是费米子的一种,所以自由电子气体遵从的是 Fermi-Dirac (F-D) 分布.对于金属中的自由电子(费米子),分形结构的信息是保留在非广延参数  $q$  中.首先写出在非广延统计物理中自由电子(费米子)在各个具有能量  $\epsilon$  的量子态的分布函数,取到  $1-q$  次为<sup>[18]</sup>

$$\bar{n}(q) = \frac{1}{[1 - (1-q)\beta(\epsilon - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} + 1}. \quad (2)$$

上式中  $\beta = 1/kT$ ,  $k$  是玻耳兹曼常数,  $\mu$  是化学势.在  $q \rightarrow 1$  时(2)式就变为传统的 F-D 分布.

在足够大的体积内,可以认为自由电子气体的分布是连续的.因此,在体积  $V$ , 能量介于  $\epsilon$  到  $\epsilon + d\epsilon$  间隔内的电子的态密度为  $4\pi V(2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} / h^3$ <sup>[22]</sup>.

用(2)式给出的粒子分布函数乘以能量间隔  $d\epsilon$  内的态密度,得到在  $d\epsilon$  内的电子数  $dN_q(\epsilon)$ , 将其积分,并令  $C = 4\pi V(2m)^{3/2} / h^3$ , 即得总粒子数

$$\begin{aligned} N_q(\epsilon) &= \int_0^\infty dN_q(\epsilon) \\ &= C \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{[1 - (1-q)\beta(\epsilon - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} + 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

作变换  $x = \beta(\epsilon - \mu)$  (3)式可以改写为

$$N_q(\epsilon) = CkT \int_{-\frac{\mu}{kT}}^\infty \frac{(\mu + kTx)^{1/2}}{[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} + 1} dx. \quad (4)$$

利用积分性质(4)式可以变换为

$$N_q(\epsilon) = C \int_0^\mu \epsilon^{1/2} d\epsilon + CkT\mu^{1/2}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\left[ \left(1 + \frac{kTx}{\mu}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{kTx}{\mu}\right)^{1/2} \right] dx}{[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} + 1}. \quad (5)$$

由于在低温下  $\mu/kT \gg 1$ , 上式右方第二项中,已把积分上限取作  $\infty$ , 而且因为被积函数分母中  $[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}$  因子对积分的主要贡献来自  $x$  的小范围, 可以将被积函数的分子展开为  $x$  的幂级数, 结果如下:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{kTx}{\mu}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{kTx}{\mu}\right)^{1/2} \\ &= \frac{kT}{\mu}x + \frac{1}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^3 x^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式代入(5)式, 可得到

$$\begin{aligned} N_q(\epsilon) &= \frac{2}{3} C\mu^{3/2} + C\mu^{3/2} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 I_q(1) \\ &\quad + C\mu^{3/2} \frac{1}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 I_q(3) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

这里

$$I_q(1) = \int_0^\infty \frac{x}{[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} + 1} dx, \quad (8)$$

$$I_q(3) = \int_0^\infty \frac{x^3}{[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} + 1} dx. \quad (9)$$

这两个积分值经过冗长的计算得出

$$I_q(1) = \frac{\pi^2}{12(2-q)}, \quad (q \neq 1), \quad (10)$$

$$I_q(3) = \frac{\pi^4}{90(4-3q)(3-2q)(2-q)}, \quad (q \neq 1), \quad (11)$$

将(10)(11)式代入(7)式, 即得到最后结果:

$$\begin{aligned} N_q(\epsilon) &= \frac{8\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} \mu^{3/2} \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q} + \frac{\pi^4}{480} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(4-3q)(3-2q)(2-q)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

当  $q \rightarrow 1$  时,  $N_q$  即变为标准的 B-G 统计力学中的粒子总数  $N$ <sup>[22]</sup>:

$$\begin{aligned} N &= \frac{8\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^4}{480} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

## 3. 总能量

现在计算金属中自由电子气体的总能量. 用  $\epsilon$

乘以(3)式,即得到在能量间隔  $d\epsilon$  内的能量  $dU_q(\epsilon)$ ,完成积分就可以得到总能量

$$U_q(\epsilon) = \int_0^\infty dU_q(\epsilon) = C \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{[1 - (1-q)\beta(\epsilon - \mu)]^{\frac{1}{q-1}} + 1}. \quad (14)$$

与计算粒子数的过程类似,做同样的变换(14)式可以改写为

$$U_q(\epsilon) = C \int_0^\mu \epsilon^{3/2} d\epsilon + CkT\mu^{3/2} \times \int_0^\infty \frac{\left(1 + \frac{kTx}{\mu}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{kTx}{\mu}\right)^{3/2}}{[1 - (1-q)x]^{\frac{1}{q-1}} + 1} dx. \quad (15)$$

将被积函数的分子展开为  $x$  的幂级数,

$$\left(1 + \frac{kTx}{\mu}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{kTx}{\mu}\right)^{3/2} = 3 \frac{kT}{\mu} x + \dots, \quad (16)$$

(15)式可以记为

$$U_q(\epsilon) = \frac{2}{5} C\mu^{5/2} + 3C\mu^{5/2} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 I_q(1) + \dots \quad (17)$$

最后的计算结果为

$$U_q(\epsilon) = \frac{8\pi V}{5h^3} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q} + \dots\right]. \quad (18)$$

当  $q \rightarrow 1$  时,  $U_q$  即变为标准的 B-G 统计力学中的能量  $U^{[22]}$ :

$$U = \frac{8\pi V}{5h^3} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 + \dots\right]. \quad (19)$$

## 4. 热 容 量

(12)式和(18)式分别给出了 Tsallis 统计物理框架下金属中自由电子气体的粒子数和能量的表达式.我们采用近似结果来计算热容量,两式分别取前两项,即

$$N_q(\epsilon) = \frac{2}{3} C\mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q}\right], \quad (20)$$

$$U_q(\epsilon) = \frac{2}{5} C\mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q}\right]. \quad (21)$$

从(20)式可以解出化学势  $\mu_q$ :

$$\mu_q = \left(\frac{3N_q}{2C}\right)^{2/3} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q}\right]^{-2/3}. \quad (22)$$

当  $T \rightarrow 0$  (22)式变为

$$\mu(0) = \left(\frac{3N(0)}{2C}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N(0)}{V}\right)^{2/3}. \quad (23)$$

这里  $\mu(0)$  和  $N(0)$  是 B-G 统计力学中,自由电子气体在绝对零度时的热力学量,由于在低温时  $kT/\mu$  非常小,可以用  $kT/\mu(0)$  来代替  $kT/\mu$ ,也就是

$$\mu_q = \mu(0) \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2 \frac{1}{2-q}\right]^{-2/3}. \quad (24)$$

把(24)式代入(21)式,采用 Taylor 展开,作进一步近似处理到

$$U_q = \frac{3}{5} N(0) \mu(0) \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2 \frac{1}{2-q}\right]. \quad (25)$$

由此,得到金属中自由电子气体的热容量  $C_V^q$ :

$$C_V^q = \left(\frac{\partial U_q}{\partial T}\right)_V = N(0) k \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\mu(0)} \frac{1}{2-q}. \quad (26)$$

这个结果与 Martínez<sup>[21]</sup>的结果是一致的,而且在低温下热容量与温度的线性关系仍然成立.与传统的结果<sup>[22]</sup>相比,唯一不同的是多出一项  $1/(2-q)$ .在  $q \rightarrow 1$  时(26)式就可以变为传统的结果.

## 5. 其他热力学量

利用热力学关系式可以很方便的求出压强、自由能、熵等其他热力学量.

非相对论气体压强与内能之间的关系为  $P_q = 2U_q/3V$ ,将(18)式带入,即得金属中自由电子气体的压强

$$P_q = \frac{16}{15} \frac{\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q} + \dots\right]. \quad (27)$$

由关系式  $P_q = -\left(\frac{\partial F_q}{\partial V}\right)_T$  可以得到金属中自由电子气体的自由能为

$$F_q = -\frac{16}{15} \frac{\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2-q} + \dots\right]. \quad (28)$$

利用  $S_q = -\left(\frac{\partial F_q}{\partial T}\right)_V$  可以计算出熵为

$$S_q = \frac{4}{3} \frac{\pi^3 V}{h^3} (2m)^{3/2} \mu^{1/2} k^2 T \frac{1}{2-q} + \dots \quad (29)$$

当  $q \rightarrow 1$  时,上面的结果可以回到传统的 B-G 统计力学结果<sup>[22]</sup>.

### 6. 讨 论

为了更好的理解(26)式的物理意义,表达出非广延参数  $q$  对热容量的影响,可以作出在不同的温度下  $2C_V^q \mu(0) / Nk^2 \pi^2$  作为非广延参数  $q$  的函数图像,如图 1 所示.同时,在非广延参数  $q$  取不同值时,作出  $2C_V^q \mu(0) / Nk^2 \pi^2$  作为温度  $T$  的函数图像,如图 2 所示.由于(26)式取的只是近似公式的前两项,所以下面仅仅讨论  $0 < q < 2$  区域的情况.

从图 1 可以清楚看出在  $0 < q < 2$  区域:

- 1) 当  $q = 2$  (临界值) 时,热容量  $C_V \rightarrow \infty$ ;
- 2) 当  $q$  取值相同时,随着温度的升高,  $C_V \rightarrow \infty$  的速度越快.

图 2 显示了下列现象:

1) 在  $q$  取相同的值时,热容量与温度的线性关系依然成立,但是随着非广延参数  $q$  增大,热容量随温度的变化更剧烈;

2) 从图上看出随着非广延参数  $q \rightarrow 0$ ,热容量之间的差别慢慢消失,即热容量趋于确定的值.

从上面的分析可以得出:在  $0 < q < 2$  区域,低温下热容量与温度的线性关系依然正确,但是非广延参数  $q$  对热容量  $C_V$  有一定的影响,决定热容量的不仅仅是温度,还有非广延参数  $q$ .

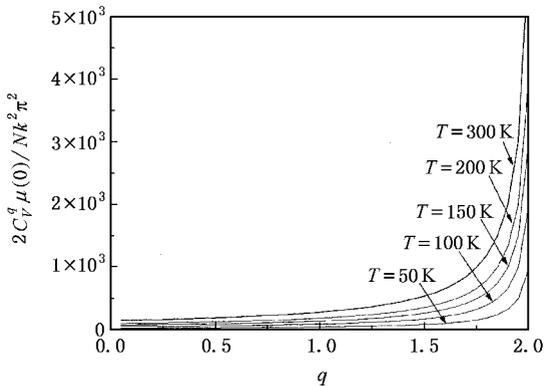


图 1 服从 Tsallis 统计力学的自由电子气体的物理量  $2C_V^q \mu(0) / Nk^2 \pi^2$  作为非广延参数  $q$  的函数.这里取温度  $T$  分别为 300K, 200K, 150K, 100K, 50K.在  $q \rightarrow 2, C_V \rightarrow \infty$

这里需要强调的是,在 Tsallis 统计框架中出现的非广延参数  $q$  的真正物理含义目前还是一个公开问题.因此,用实验来说明非广延性的影响是至关重要的.现在的研究只是局限在具体系统中,在一些

具体系统中,非广延参数  $q$  的物理意义已经有了一些值得注意的结论,例如:已建立了  $q$  与多方指数的关系  $n = 1/2 + 1/(1 - q)^{23}$ ,  $q$  与非平衡等离子体系统<sup>[25]</sup>和自引力长程相互作用系统<sup>[26]</sup>的温度梯度的关系  $(1 - q)m \nabla \Phi = k \nabla T$ ,  $q$  与 Boltzman 格模型的维数<sup>[27]</sup>以及与涨落时空温度场自由度数的联系<sup>[28]</sup>等.值得注意的是,目前在下面三个方面的观测事实能够支持 Tsallis 统计力学:1) 二维纯电子等离子体湍流的亚稳态可以用 Tsallis 最大熵分布很好的描述<sup>[29]</sup>; 2) 经典理想气体 Tsallis  $q$ -分布模型对星系群的描述比其他建立在标准统计力学上的模型要好得多<sup>[30]</sup>; 3) 假定相互作用的粒子有  $q$ -速度分布,以此估算太阳内部的核反应速度,预言的中微子流与观测结果很好地符合,这表明 Tsallis 统计力学可能提供著名的太阳中微子问题的解决方法<sup>[31]</sup>.

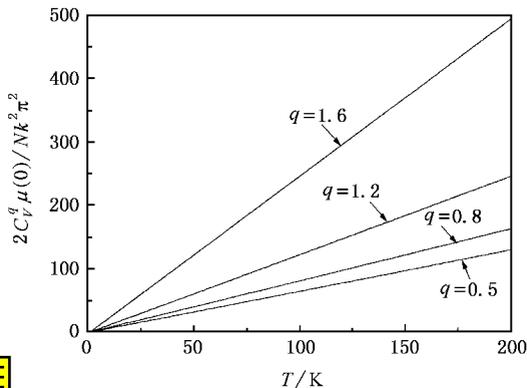


图 2 服从 Tsallis 统计力学的自由电子气体的物理量  $2C_V^q \mu(0) / Nk^2 \pi^2$  作为非广延参数  $T$  的函数.这里  $q$  分别为 0.5, 0.8, 1.2, 1.6

本文在 Tsallis 统计的框架下,用分解近似的方法对金属中自由电子气体的非广延参数  $q$  的热力学统计作了处理,计算出了总能量、总粒子数、自由能、热容量等热力学量.我们希望我们的方法能够很好地被应用到其他统计力学的结构的研究上,并能够导致非广延参数  $q$  的实验证据,这也是本文的目的之一.

作者感谢彭守礼教授和曹克非教授的悉心指导和有益的讨论.

### 附录

在附录中,我们计算本文中(7)式和(17)式中出现的两个积分  $I_q(1)$  和  $I_q(3)$ ,即(8)式和(9)式,我们首先计算  $I_q(1)$ .

先考虑  $q < 1$  的情况. 我们知道  $\Gamma$  函数的定义为  $\Gamma(\alpha)$   
 $= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  ( $\alpha > 0$ ) 作代换  $t = [1 - (1 - q)x]v$ ,  $\alpha =$   
 $1/(1 - q)$  将  $\Gamma$  函数的定义改写, 得到(8)式被积函数分母的

$$\left\{ 1/\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \right\} \int_0^{\infty} v^{1/(1-q)-1} e^{-v} (e^{\epsilon^{(1-q)x}} + 1) dx. \quad (A1)$$

由于  $q < 1$ , 所以条件  $\alpha > 0$  是满足的. 将(A1)式代入(8)式,  
 让  $y = \alpha(1 - q)x$  并利用  $\Gamma$  函数的定义, 重新整理后得到

$$I_q(1) = \frac{\pi^2}{12} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) (1-q) \Gamma\left(\frac{1}{1-q} + 2\right) \right\}, \quad (A2)$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + 2\right) = \int_0^{\infty} v^{\frac{1}{1-q}-1+2} e^{-v} dv, \quad (A3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y}{e^y + 1} dy = \frac{\pi^2}{12}.$$

另一方面, 利用  $\Gamma$  函数的性质可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + 2\right) = \left(\frac{1}{1-q} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{1-q} + 1\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right). \quad (A4)$$

将(A4)式代入(A2)式, 就得到  $I_q(1)$  的结果:

$$I_q(1) = \frac{\pi^2}{12(2-q)} \quad (q < 1). \quad (A5)$$

下面考虑  $q > 1$  的情况.  $\Gamma$  函数的定义为  
 $\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint_c d\epsilon (-t)^{-\alpha} e^{-t}$  ( $\alpha > 0$ ) 作代换  $t = [1 - (1 -$   
 $q)x]v$ ,  $\alpha = q/(q - 1)$  并将  $\Gamma$  函数的定义改写, 得到(8)式  
 在  $q > 1$  时被积函数的分母为

$$\frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right) \oint_c d\epsilon (-v)^{q/(q-1)} e^{-v} (e^{-\epsilon^{(q-1)x}} + 1). \quad (A6)$$

这里  $\alpha = q/(q - 1)$ , 由于  $q > 1$ , 所以条件  $\alpha > 0$  是满足的. 将  
 (A6)式代入(8)式, 应用  $\Gamma$  函数的定义, 并让  $y = \alpha(1 - q)x$ ,  
 进一步整理得

$$I_q(1) = \left\{ \Gamma\left(\frac{q}{q-1} - 2\right) / \Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right) (q-1)^2 \right\} \frac{\pi^2}{12}, \quad (A7)$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{q}{q-1} - 2\right) = 1 / \frac{1}{2\pi} \oint_c (-v)^{[q/(q-1)-2]} e^{-v} dv,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y dy}{e^y + 1} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (A8)$$

利用  $\Gamma$  函数的性质

$$\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right) = \left(\frac{q}{q-1} - 1\right) \left(\frac{q}{q-1} - 2\right) \Gamma\left(\frac{q}{q-1} - 2\right). \quad (A9)$$

将(A9)式代入(A7)式可得

$$I_q(1) = \frac{\pi^2}{12(2-q)} \quad (q > 1). \quad (A10)$$

由(A5)式和(A10)式即导致  $I_q(1)$  的结果为(10)式.

$I_q(3)$  与  $I_q(1)$  的计算过程相同, 不同的是被积函数的分子  
 变为  $x^3$ .

当  $q < 1$  时, 计算结果为

$$I_q(3) = \frac{\pi^4}{90} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) / (1-q) \Gamma\left(\frac{1}{1-q} + 4\right) \right\}, \quad (A11)$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + 4\right) = \int_0^{\infty} v^{\frac{1}{1-q}-1+4} e^{-v} dv, \quad (A12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y + 1} dy = \frac{\pi^4}{90}.$$

根据  $\Gamma$  函数的性质, 得到  $I_q(3)$  在  $q < 1$  时的结果为

$$I_q(3) = \frac{\pi^4}{90(4-3q)(3-2q)(2-q)} \quad (q < 1). \quad (A13)$$

当  $q > 1$  时,

$$I_q(3) = \left\{ \Gamma\left(\frac{q}{q-1} - 4\right) / \Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right) (q-1)^4 \right\} \frac{\pi^4}{90}, \quad (A14)$$

其中

$$\Gamma\left(\frac{q}{q-1} - 4\right) = 1 / \frac{1}{2\pi} \oint_c (-v)^{[q/(q-1)-4]} e^{-v} dv, \quad (A15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y + 1} = \frac{\pi^4}{90}.$$

根据  $\Gamma$  函数的性质(A9)式, 得到  $I_q(3)$  在  $q > 1$  时的结果为

$$I_q(3) = \frac{\pi^4}{90(4-3q)(3-2q)(2-q)} \quad (q > 1). \quad (A16)$$

综合(A13)式和(A16)式的计算, 我们即得到  $I_q(3)$  的积分  
 结果.

- [1] Saslaw W C 1985 *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications* (Berlin: Springer-Verlag)
- [3] Cáceres M O 1999 *Braz. J. Phys.* **29** 125
- [4] Sciama D W 1967 *Phys. Rev. Lett.* **18** 1065
- [5] Bahcall N A, Oh S P 1996 *Astrophys J.* **462** L49

- [6] Montroll E W, Shlesinger M F 1983 *J. Stat. Phys.* **32** 209
- [7] Tsallis C, Plastino A R, Zheng W M 1997 *Chaos, Solitons and Fractals* **8** 885
- [8] Tsallis C 1988 *J. Stat. Phys.* **52** 479
- [9] Plastino A, Plastino A R 1993 *Phys. Lett. A* **177** 177
- [10] Tsallis C, Lévy S V F, de Souza, A M C, Maynard R 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3589

- [ 11 ] Anteneodo C , Tsallis C 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5313
- [ 12 ] Papa A R R , Tsallis C 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3923
- [ 13 ] Tsallis C , Sa Barreto F C , Loh E D 1995 *Phys. Rev. E* **52** 1447
- [ 14 ] Tirmaklı U , Büyükkılıç F , Demirhan D 1997 *Physica A* **240** 657
- [ 15 ] Plastino A R , Plastino A , Vucetich H 1995 *Phys. Lett. A* **207** 42
- [ 16 ] Tirmaklı U , Büyükkılıç F , Demirhan D 1998 *Phys. Lett. A* **245** 62
- [ 17 ] Du J L 2004 *Phys. Lett. A* **320** 347
- [ 18 ] Büyükkılıç F , Demirhan D , Güleç A 1995 *Phys. Lett. A* **197** 209
- [ 19 ] Pennini F , Plastino A , Plastino A R 1995 *Phys. Lett. A* **208** 309
- [ 20 ] Wang Q A , Lé Méhauté A 1997 *Phys. Lett. A* **235** 222
- [ 21 ] Martínez S , Pennini F , Plastino A , Portesi M 2004 *Physica A* **332** 230
- [ 22 ] Huang K 1987 *Statistical Mechanics* ( New York : Wiley )
- [ 23 ] Taruya A , Sakagami M 2002 *Physica A* **307** 185
- [ 24 ] Taruya A , Sakagami M 2003 *Physica A* **318** 387
- [ 25 ] Du J L 2004 *Phys. Lett. A* **329** 262
- [ 26 ] Du Jiulin 2004 *Europhys. Lett.* **67** 893
- [ 27 ] Boghosian B M , Love P J , Coveney P V , Karlin I V , Succi S , Yepez J 2003 *Phys. Rev. E* **68** 025103(R)
- [ 28 ] Beck C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 180601
- [ 29 ] Boghosian B M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4754
- [ 30 ] Lavagno A , Kaniadakis G , Rego Monteiro M , Quarati P , Tsallis C 1998 *Astrophys. Lett. Comm.* **35** 449
- [ 31 ] Kaniadakis G , Lavagno A , Quarati P 1996 *Phys. Lett. B* **369** 308

## Nonextensive thermostistical investigation of free electronic gas in metal<sup>\*</sup>

Wang Can-Jun<sup>1,2,†</sup> Wang Xiao-Feng<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> Center for Nonlinear Complex Systems , Department of Physics , Yunnan University , Kunming 650091 , China )

<sup>2</sup> Department of Physics , Baoji University of Sciences and Arts , Baoji 721007 , China )

( Received 31 March 2005 ; revised manuscript received 17 October 2005 )

### Abstract

The relevant aspects of the  $q$ -thermostistical treatment for the free electronic gas which is an ideal Fermi system are discussed. Thermodynamical quantities of the free electronic gas such as total number of particles , total energy , heat capacity , free energy etc. are calculated within the Tsallis thermo-statistics where the factorization approach is incorporated , and the ensuing statistics is derived. Special attention is paid to heat capacity. The limiting cases of interest are discussed in some detail , namely , low-temperature regimes , and the approximate results pertaining to the case  $q \rightarrow 1$  ( the conventional Fermi-Dirac statistics corresponds to  $q = 1$  ). We also compare our results with previous Tsallis ' works.

**Keywords :** Tsallis ' generalized statistics , nonextensive index  $q$  , free electronic gas , Fermi-Dirac distribution function

**PACC :** 0520 , 0530F

<sup>\*</sup> Project supported by the Special Funds for Major State Basic Research Projects of China ( the " 973 " Program ) ( Grant No. G2000077308 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10565004 ).

<sup>†</sup> E-mail : wcj7944@163.com