

带状螺旋线研究中的坐标变换*

肖 刘¹⁾²⁾ 苏小保¹⁾ 刘濮鲲^{1)†}

1) 中国科学院电子学研究所 北京 100080)

2) 中国科学院研究生院 北京 100049)

(2005 年 8 月 31 日收到, 2005 年 11 月 15 日收到修改稿)

分析了带状螺旋线行波管中电磁场分量在柱坐标系下的 Floquet 形式, 证明适当的坐标变换是电磁场分量写成变量分离形式的充分条件. 螺旋带平面展开后, 应用坐标变换得到的电磁场分量变量分离形式是去除面电流分布假设的理论基础. 计算并分析了一个典型结构的色散和耦合阻抗, 计算结果与实验结果有很好的致一致.

关键词: 螺旋带, 坐标变换, 色散, 耦合阻抗

PACC: 1120F, 4110F, 5235H, 4110H

1. 引言

螺旋线行波管由于其具有高功率、高增益、高效率 and 宽频带的特性, 在电子对抗和通讯等领域具有广泛的应用^[1]. 行波管冷测参数是大信号计算的基础^[2], 而如何快速准确地获得这些参数是行波管优化设计的前提. 获得冷测参数的方法主要有三种: 参数化代码计算^[3]、软件模拟^[4]和实验测量. 参数化代码的特点是计算速度快, 但由于其理论模型中引入了一系列的简化假设, 因而和实验结果必然存在一定的差距. 软件模拟的特点是可以计算复杂的慢波结构, 但全频段的计算耗时较长, 在行波管的优化设计中失去了应有的作用.

行波管色散和耦合阻抗的理论分析由来已久, 理论模型有螺旋导电面模型^[5,6]和螺旋带模型^[7]. 然而这些分析通常建立在螺旋线面电流分布的假设上. Chermine 等人用 Chebyshev 多项式展开螺旋带上的面电流, 求解了螺旋带的色散和耦合阻抗, 在理论上舍弃了面电流密度的假设^[8]. 在该理论中, 螺旋带平面展开后通过坐标变换, 在新的坐标系统中将电磁场分量表示为变量分离的形式是成功去除面电流密度假设的理论基础. 然而, Chermine 等人在文献 [8] 中指出将电磁场分量写成了变量分离的形式仅仅是为了方便, 这相当于为了去除螺旋带面电流假设引

入了一个新的假设.

国内的相关工作主要是该方法的具体应用. 他们在该方法的基础上考虑了有限厚度的螺旋带对螺旋带色散特性和耦合阻抗的影响, 并将介质的径向分层理论程序化^[9,10].

本文通过详细研究理论分析中的坐标变换, 证明了将电磁场分量写成变量分离的形式是适当坐标变换的必然结果, 不是人为的假设. 结合实例分析了典型的螺旋线行波管慢波结构, 研究表明, 理论计算结果与实验数据有很好的致一致性.

2. 基本理论

2.1. 坐标变换

均匀螺旋带具有轴向周期性和螺旋对称性, 所有的电磁场分量满足如下的 Floquet 形式:

$$F(r, \theta, z) = e^{-j\beta z} \sum_n F_n(r) e^{jn(\theta - K_H z)}, \quad (1)$$

其中 $K_H = 2\pi/P$, P 为螺距, $F_n(r)$ 为电磁场分量 $F(r, \theta, z)$ 第 n 次空间谐波幅值, β 为纵向传播因子. 此处省略了因子 $e^{-j\omega t}$.

(1) 式左右两边同乘以 $e^{j\beta z}$, 并令 $\varphi = K_H z - \theta$, 有

$$F(r, \theta, z) e^{j\beta z} = \sum_n F_n(r) e^{jn(\theta - K_H z)}$$

* 国家杰出青年科学基金(批准号 60125104)资助的课题.

† E-mail: pkliu@mail.ie.ac.cn

$$= \sum_n F_n(r) e^{-jn\varphi} = F(r, \varphi). \quad (2)$$

显然 (2) 式是一个典型的傅里叶级数展开形式, 相应的傅里叶变换为

$$F_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) e^{jn\varphi} d\varphi. \quad (3)$$

(3) 式的表达形式已经很简单, 但积分变量 φ 却是自变量 θ 和 z 的复合变量. 将螺旋带沿轴线切开并在平面上展开后 (如图 1 所示), 可以看到复合变量 φ 的特殊物理意义.

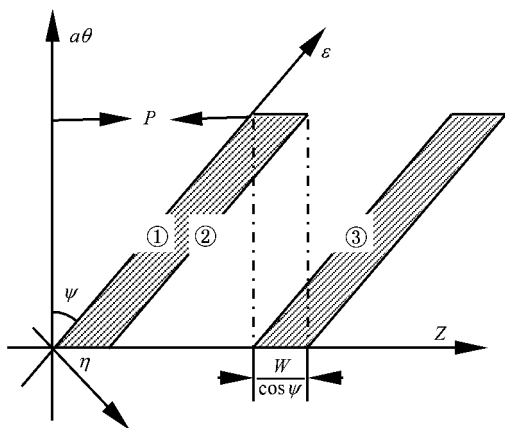


图 1 螺旋线的平面展开示意图

螺旋带平面展开后, 在 $(z, a\theta)$ 平面上形成一系列边长分别为 $\frac{W}{\cos\psi}$ 和 $\frac{2\pi a}{\cos\psi}$ 的平行四边形. 其中, W 为螺旋带的宽度, a 为螺旋带的半径, ψ 为螺旋角.

图 1 中, 通过原点标识为 ① 的斜线在 $(z, a\theta)$ 坐标平面里可以写成如下的形式:

$$a\theta = z \cdot \operatorname{ctg}\psi = z \frac{2\pi a}{P} \quad \text{或}$$

$$\theta - \frac{2\pi}{P}z = \theta - K_H z = 0. \quad (4)$$

将与线 ① 平行的斜线 (螺旋方向的线) 写成一般性的形式

$$\varphi = -(\theta - K_H z) = \text{constant}. \quad (5)$$

(5) 式表明, 物理量 φ 的特殊意义是其为常量时在 $(z, a\theta)$ 坐标平面上代表的是一条沿螺旋方向的直线.

图 1 中, 一个纵向周期内的特征斜线分别标识为 ①, ② 和 ③, 其表达式分别为

$$\varphi = 0, \frac{W}{a\sin\psi}, 2\pi. \quad (6)$$

由此可见 (3) 式中的积分是沿着垂直于螺旋方向进行的.

将坐标平面 $(z, a\theta)$ 绕原点顺时针旋转一个螺旋角 ψ , 建立新的坐标平面 (ε, η)

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ a\theta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

由坐标变换关系式 (7) 可知

$$\eta/a\sin\psi = \frac{\operatorname{ctg}\psi}{a}z - \theta = K_H z - \theta = \varphi. \quad (8)$$

因此, 在新的坐标平面上用坐标变量 η 取代复合变量 φ , 在螺旋带上 ($r = a$) (2) 式中左端可以表示为 $F(a, \varepsilon, \eta) e^{j(\beta\cos\psi + \varepsilon\sin\psi)}$. 这样 (3) 式可以表述成如下形式:

$$F_n(a) = \frac{1}{2\pi a\sin\psi} e^{j\beta\sin\psi} \int_0^{2\pi a\sin\psi} F(a, \varepsilon, \eta) \times e^{j\eta\beta\cos\psi} e^{jn\frac{\eta}{a\sin\psi}} d\eta. \quad (9)$$

考虑到径向位置变化, 将 (9) 式写成更一般的形式

$$F_n(r) = \frac{1}{2\pi r\sin\psi} e^{j\beta\sin\psi} \int_0^{2\pi r\sin\psi} F(r, \varepsilon, \eta) \times e^{j\eta\beta\cos\psi} e^{jn\frac{\eta}{r\sin\psi}} d\eta. \quad (10)$$

显然, 如果 (10) 式中的电磁场分量 $F(r, \varepsilon, \eta)$ 不含因子 $e^{-j\beta\sin\psi}$, 通过积分 (10) 式右边必然是变量 r 和 ε 的函数, 与 (10) 式左边仅是 r 的函数矛盾. 所以采用坐标系统 (r, ε, η) , 令 $F(r, \varepsilon, \eta) = e^{-j\beta\sin\psi} F(r, \eta)$ 不仅是为了方便, 而且是保证 (10) 式成立的必要条件. 反之, 选用坐标系统 (r, ε, η) 是场分量写成变量分离形式的充分条件.

应用场分量变量分离的表达形式, 在螺旋带处 ($r = a$) (9) 式简化为

$$F_n(a) = \frac{1}{2\pi a\sin\psi} \int_0^{2\pi a\sin\psi} F(\eta) e^{j\eta\beta\cos\psi} e^{jn\frac{\eta}{a\sin\psi}} d\eta. \quad (11)$$

(11) 式是螺旋带处电磁场分量第 n 次空间谐波的幅值.

在坐标系统 (r, ε, η) 中, 由坐标变换关系式 (7) 在螺旋带上 (1) 式可以写为

$$F(a, \varepsilon, \eta) = e^{-j(\beta\cos\psi + \varepsilon\sin\psi)} \sum_n F_n(r) e^{-jn\frac{\eta}{a\sin\psi}}. \quad (12)$$

(12) 式左右两边同乘以因子 $e^{j\beta\sin\psi}$, 则可以写成如下形式:

$$F(\eta) = F(a, \eta) = e^{j\beta\sin\psi} F(a, \varepsilon, \eta) = \sum_n F_n(a) e^{-j\eta(\beta\cos\psi + \frac{n}{a\sin\psi})}. \quad (13a)$$

将(11)式代入上式有

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi a \sin\psi} \sum_n e^{-j\eta(\beta \cos\psi + \frac{n}{a \sin\psi})} \times \int_0^{2\pi a \sin\psi} F(\eta') e^{j\eta'(\beta \cos\psi + \frac{n}{a \sin\psi})} d\eta' \quad (13b)$$

由(6)式和(8)式可知,一个纵向周期内的特征斜线①、②和③在坐标系\$(r, \varepsilon, \eta)\$中可以表示为

$$\eta = 0, W, 2\pi a \sin\psi. \quad (14)$$

由此可见(13b)式中的积分若仅在螺旋带上进行,则积分上限应改为螺旋带的宽度\$W\$.采用 Chebyshev 多项式展开的方法来去除通常的面电流分布假设时,由于 Chebyshev 多项式的定义域为\$[-1, 1]\$,必须将积分上限和下限分别变换为\$1\$和\$-1\$.

引入如下的坐标变换:

$$s = \frac{2\eta}{W} - 1, \quad (15)$$

电磁场分量的表达式(13a)和(13b)改写为

$$F(s) = \sum_n F_n(a) e^{-j\alpha_n(s+1)} = \frac{(W/2)}{2\pi a \sin\psi} \sum_n \int_{-1}^1 F(s') e^{-j\alpha_n(s-s')} ds' \quad -1 < s < 1, \quad (16)$$

$$\text{其中 } \alpha_n = \frac{W}{2} \left[\frac{n}{a \sin\psi} + \beta \cos\psi \right].$$

应用导纳矩阵\$Y_n\$表示电场和磁场的相互关系.通过坐标变换,将柱坐标系中的电磁场分量转换到\$(r, \varepsilon, \eta)\$坐标系中.则螺旋带处的边界条件用电场统一表示为

$$\begin{pmatrix} E_\xi(s) \\ E_\eta(s) \end{pmatrix} = \frac{(W/2)}{2\pi a \sin\psi} \sum_n \int_{-1}^1 ds' e^{-j\alpha_n(s-s')} \tilde{Z}_n \begin{pmatrix} J_\xi(s') \\ J_\eta(s') \end{pmatrix} = 0 \quad -1 < s < 1, \quad (17)$$

其中

$$\tilde{Z}_n = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} Z_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix},$$

$$Z_n = (Y_n^{(1)} - Y_n^{(2)})^{-1}.$$

2.2. 色散关系

将面电流沿螺旋方向及垂直方向分别采用第一和第二类 Chebyshev 多项式进行展开后,代入边界条件(17),获得如下的矩阵表达式:

$$\begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & \cdots \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & \cdots \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\xi 0} \\ J_{\eta 0} \\ J_{\xi 1} \\ J_{\eta 1} \\ \cdots \end{pmatrix} = MJ = 0, \quad (18)$$

其中,\$J_{\xi l}\$和\$J_{\eta l}\$是 Chebyshev 多项式的展开系数,

$$M_{ll'} = (-1)^{j+l'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} J_l(\alpha_n) & 0 \\ 0 & \frac{l+1}{\alpha_n} J_{l+1}(\alpha_n) \end{pmatrix} \times \tilde{Z}_n \begin{pmatrix} J_{l'}(\alpha_n) & 0 \\ 0 & \frac{l'+1}{\alpha_n} J_{l'+1}(\alpha_n) \end{pmatrix}.$$

式中\$J_l(\alpha_n)\$为\$l\$阶第一类贝塞尔函数.给定频率\$\omega\$时,由系数矩阵\$M\$的行列式等于零可以确定相应的第\$n\$次空间谐波的纵向传播因子\$\beta_n\$,从而获得行波管螺旋线的色散关系.矩阵\$M\$确定后,由于其行列式等于零,用(18)式直接求解 Chebyshev 多项式展开的系数\$J_{\xi l}\$和\$J_{\eta l}\$将是一个不定形式的方程组.在具体的计算过程中,将某个系数设置为\$1\$,则其余的系数相继确定.这一处理虽然影响面电流和电场空间谐波的大小,但是从耦合阻抗的定义可以看到,它对耦合阻抗的计算没有影响.

2.3. 耦合阻抗

第\$n\$次空间谐波的耦合阻抗定义如下:

$$K_n(r) = \frac{|E_{zn}^{(1)}(r)|^2}{2\beta_n^2 P_r}, \quad (19)$$

其中\$E_{zn}^{(1)}(r)\$为第一层中\$n\$次空间谐波的电场纵向分量,\$P_r\$为纵向功率流.由耦合阻抗的定义式(19)可知,分子和分母均是电场和磁场的平方形式,故电场和磁场同时乘以某个复因子(19)式的大小不会发生变化.

系数\$J_{\xi l}\$和\$J_{\eta l}\$求解后,螺旋带处的电场分量按下式计算:

$$\begin{pmatrix} E_{\xi n} \\ E_{\eta n} \end{pmatrix} = \frac{W}{4a \sin\psi} \sum_{l=0}^{\infty} J^l \tilde{Z}_n \begin{pmatrix} J_l(\alpha_n) J_{\xi l} \\ \frac{l+1}{\alpha_n} J_{l+1}(\alpha_n) J_{\eta l} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

进行坐标反变换,求得柱坐标系下电场的纵向和角向分量,螺旋带内外的磁场分量通过导纳矩阵来表示.

3. 计算结果与分析

基于上述理论进行介质的径向分层处理,将有限厚度的螺旋线等效成中央存在一无限薄螺旋带的等厚真空层.由于有两个无穷参量:空间谐波次数 n 和面电流密度的 Chebyshev 多项式展开式的项数 l ,

表 1 螺旋带行波管的结构参量^[11](长度单位: mm)

螺旋带 内半径	螺旋带 外半径	金属筒 内半径	螺旋带 宽度	螺距	介质杆 条数	介质杆 宽度	介质杆 高度	相对介 电常数
1.340	1.590	2.920	0.890	1.540	3	0.680	1.330	5.2

首先选取面电流密度 Chebyshev 多项式的最高项数 l_{\max} 为 1,不进行介质的径向分层,但考虑空间谐波次数对行波管色散和耦合阻抗的影响.当最高空间谐波次数 n_{\max} 分别为 2,3,4,6 和 8 时,计算结

为了保证无穷级数(27)式收敛,必须选用最大空间谐波次数 n_{\max} 使 $\alpha_{n_{\max}} \gg (\frac{l_{\max}}{2})^2$ ^[8].在该结构中, $n_{\max} \geq 2l_{\max}$ 能很好地满足上述条件.本文在计算时,参数 n 和 l 以及介质分层的数目 l_n 均根据计算结果的收敛情况进行选取.一个典型的螺旋带行波管结构参量如表 1 所示.

果如图 2 所示.由图可见,当 n_{\max} 分别为 6 和 8 时,色散和耦合阻抗的最大相对偏差不超过 0.01%.因此,在以下的计算中最高空间谐波次数 n_{\max} 均取为 6.

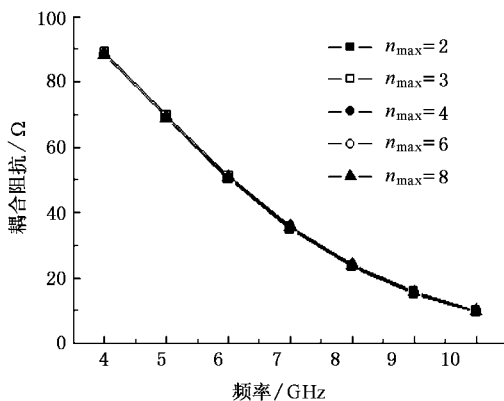
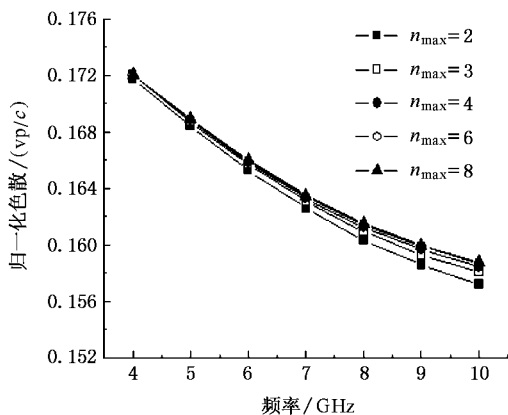


图 2 n_{\max} 为 2,3,4,6 和 8 时的色散和耦合阻抗曲线

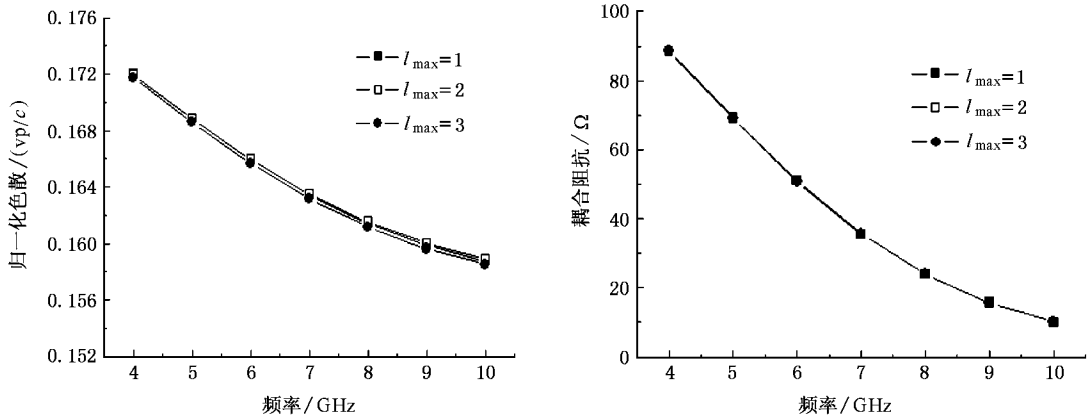
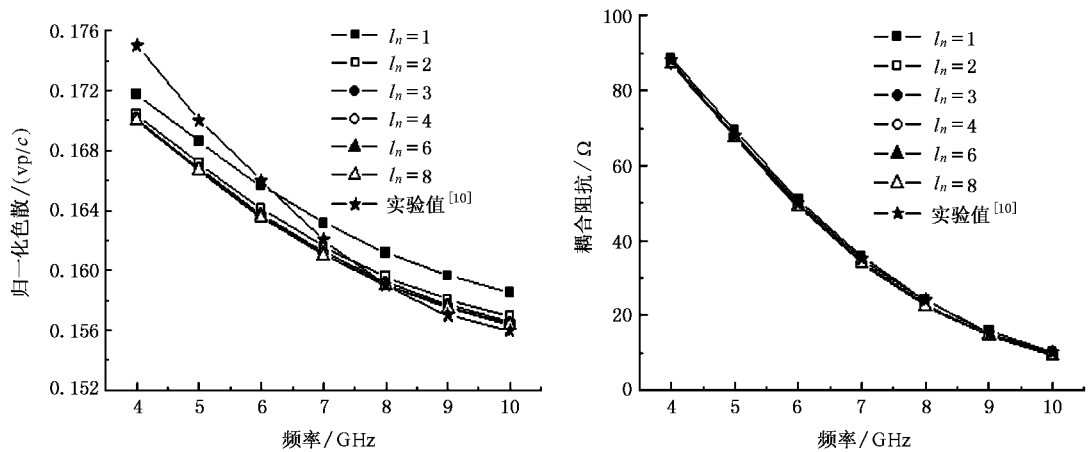
考虑面电流 Chebyshev 多项式展开的次数对行波管色散和耦合阻抗的影响.当 Chebyshev 多项式展开的最高次数 l_{\max} 分别为 1,2 和 3 时,计算结果如图 3 所示.由图可见, l_{\max} 分别为 2 和 3 时,色散和耦合阻抗曲线最大相对偏差不超过 0.01%.因此,在此螺旋带慢波结构的计算中 l_{\max} 可以选为 3.

4. 结 论

色散和耦合阻抗是行波管大信号计算的基础,应用大信号代码可以进行快速的优化设计.螺旋带平面展开后应用坐标变换得到电磁场分量变量分离的形式,它是去除螺旋带模型中面电流分布假设的理论基础.本文详细分析了螺旋带理论研究中的坐标变换,证明了适当的坐标变换是电磁场分量可以写成变量分离形式的充分条件.在坐标变换的基础上给出了行波管色散和耦合阻抗的计算方法.

考虑介质的径向分层对行波管色散和耦合阻抗的影响.当介质的径向层数 l_n 分别为 1,2,3,4,6 和 8 时,计算结果如图 4 所示.由图可见, l_n 分别为 6 和 8 时,色散和耦合阻抗的最大相对偏差也已经不超过 0.01%.取径向层数为 6 时的计算结果与实验结果进行比较,色散和耦合阻抗的最大相对误差分别为 2.9% 和 7.5%,可见此方法有相当的计算精度.

进行介质的径向分层处理后,考虑螺旋线的厚度,即有限厚度的螺旋线被等效成中央一无限薄螺旋带的等厚真空层.据此编写了计算程序,依据计算

图 3 l_{\max} 为 1 2 和 3 时的色散和耦合阻抗曲线图 4 l_n 为 1 2 3 4 6 和 8 时的色散和耦合阻抗曲线

结果的收敛性选取无穷参数的最大值,计算结果与实验结果有很好的一致.该方法可以为行波管的优

化设计提供快速和可靠的参数.

- [1] Abe D K, Levush B Antonsen Jr. T M *et al* 2002 *IEEE Transactions on Plasma Science* **30** 1053
- [2] Li B, Yang Z H 2003 *Chin. Phys.* **12** 1235
- [3] Antonsen Jr. T M, Mondelli A A Levush B *et al* 1999 *Proceedings of the IEEE* **87** 804
- [4] Kory C L, Dayton J A 1998 *IEEE Transactions on Electron Devices* **45** 966
- [5] Pierce J R 1950 *Traveling wave tubes* (Princeton Nj:Van Nostrand)
- [6] Xie H Q, Li C Y, Yan Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **58** 2227 [谢鸿全、李承跃、鄢扬等 2003 物理学报 **58** 2227]
- [7] Sensiper S 1951 *Electromagnetic wave propagation on helical*

conductors (USA:Dept of Electrical Engineering MIT)

- [8] Chermine D, Antonsen Jr. T M Levush B 1999 *IEEE Transactions on Electron Devices* **46** 1472
- [9] Duan Z Y, Gong Y B, Wang W X *et al* 2002 *High Power Laser and Particle Beams* **14** 905 (in Chinese) [段兆云、宫玉彬、王文祥等 2002 强激光与粒子束 **14** 905]
- [10] Duan Z Y, Gong Y B, Wang W X *et al* 2004 *Acta Electronica Sinica* **32** 108 (in Chinese) [段兆云、宫玉彬、王文祥等 2004 电子学报 **32** 108]
- [11] D'Agostino S, Emma F, Paoloni C 1998 *IEEE Transactions on Electron Devices* **45** 1605

Coordinate transformation in the study of tape helix^{*}

Xiao Liu^{1,2)} Su Xiao-Bao¹⁾ Liu Pu-Kun¹⁾

¹⁾ *Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

²⁾ *Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*

(Received 31 August 2005 ; revised manuscript received 15 November 2005)

Abstract

The Floquet form of electromagnetic field in travelling wave tubes with tape helix is analyzed in the cylindrical coordinates frame. The study showed that appropriate coordinate transformation is the sufficient condition for separation of variables of electromagnetic field. The separation of variables under the coordinate transformation is the basis of the theory in which the assumption about the surface current density distribution of the tape is avoided. The dispersion and coupling impedance of a typical structure are calculated. The computed and measured results agree with high accuracy.

Keywords : tape helix , coordinate transformation , dispersion , coupling impedance

PACC : 1120F , 4110F , 5235H , 4110H

^{*} Project supported by the National Science Found for Distinguished Young Scholars of China (Grant No.60125104).