第 55 卷 第 5 期 2006 年 5 月
1000-3290/2006/55(05)/2158-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.5, May, 2006

光子的态矢量函数

姚志欣[†] 潘佰良 陈 钢 钟建伟
(浙江大学物理系, 杭州 310027)
(2005 年 7 月 18 日收到; 2005 年 8 月 26 日收到修改稿)

从广义 Schrödinger 方程出发,在三个充分必要的量子化条件规范下,得到了一个新颖的光子一维态矢量函数,除了光子的能量和动量特征以外,它还包含有光子的角动量属性,完整地描述了光子作为量子力学中相对论自由粒子的行为.对一维光子态矢量函数的分析不仅定义了描述光子行为的微观参量——概率幅和相位,而且将这些微观参量与光束的宏观偏振联系了起来,具体剖析了一个人们一直感到困惑的偏振问题,得到了圆满的解释.

关键词: 光子态矢量函数, 概率幅, 相位, 偏振
PACC: 1480A, 0365, 4250, 4225J

1. 引 言

众所周知,在量子力学体系中任何微观粒子的运动规律都遵循广义的 Schrödinger 方程,也就是量子力学中的运动方程[1]

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{r}) = \hat{H}\psi(t,\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

其中 $\psi(t,\boldsymbol{r})$是描述粒子系统状态的复函数,通常称作态函数(state function[2]), 习惯上也称作波函数; $\hat{H}$ 是粒子系统的量子 Hamilton 算符,亦即能量算符 $\hat{E}$[3]. 方程 (1) 的形式还意味着代表时间演化的一阶微分运算符号 $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}=\hat{H}=\hat{E}$ 等同于能量算符.光子作为一类特殊的微观自由粒子,其能量 E 和动量 $\boldsymbol{p}$ 满足相对论关系式 $E=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{p}$,用能量算符 $\hat{E}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$、动量算符 $\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$ 进行该关系式的替换,并作用到用 Dirac 符号表示的态矢量 $|\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r})\rangle$上去,就得到了光子的运动方程,简称光子方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r})\rangle = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{c}\cdot\nabla|\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r})\rangle. \tag{2}$$

文献[4] 曾给出过该光子方程的一维形式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{c}\cdot\frac{\partial}{\partial z}|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle. \tag{3}$$

如果在(3)式的两边同时消去公因子 $\mathrm{i}\hbar$,即为一维光波方程[4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(t,z) = -c\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{A}(t,z). \tag{4}$$

光波方程 (4) 的解就是通常的电磁矢势 $\boldsymbol{A}(t,z)$, 理论上应该是一个定义在真实的物理空间中的实矢量函数,在 Coulomb 规范变换(gauge transformation)下,可以用来描述作为无源电磁场的光波的全部经典行为[5]. 光子方程 (3) 的解$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle$理论上应该是一个定义在抽象的 Hilbert 空间里的复矢量函数,正如下面指出的那样,在三个充分必要的量子化条件规范下,可以用来描述光子全部的量子行为,我们将其称作光子的态矢量函数.注意到运动方程 (4) 和 (3) 的数学形式是完全一样的,不仅表明光波方程和光子方程是同一个方程,所以光波的电磁矢势 $\boldsymbol{A}(t,z)$和光子的态矢量函数$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle$遵循完全相同的时间演化规律,而且表明光波的电磁矢势 $\boldsymbol{A}(t,z)$ 可以表现为仅仅是光子的态矢量函数$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle$的实部, 即 $\boldsymbol{A}(t,z)\equiv\mathrm{Re}|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle$. 正因为如此, Hilbert 抽象空间里的复矢量函数$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle$包含有较真实空间里的实矢量函数 $\boldsymbol{A}(t,z)$更为完整的信息.

一维光子态矢量函数作为一维光子方程的解,文献中经常给出的形式是

$$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle = \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是与一维空间变量 Z 方向垂直的单位矢量.态矢量函数满足归一化条件

$$\langle\boldsymbol{A}(t,z)||\boldsymbol{A}(t,z)\rangle = [\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}]^{*}\cdot[\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}] = 1. \tag{6}$$

† E-mail: Yaozx@zju.edu.cn

经典物理学认为，包括 Newton 方程在内的任何一个运动方程，都是时间演化规律的一般性反映，若要通过求解运动方程得到对某个具体问题的认识，则需要附加初始条件. 我们认为，这个判断同样适用于量子物理学，若要通过求解广义 Schrödinger 方程得到某种微观粒子的态函数，同样必须附加条件. 但是在抽象的 Hilbert 空间中并不存在任何经典意义的初始条件，所以可以认为其附加条件表现为量子化条件. (5)式那样的光子态矢量函数的量子化条件具体表现为它必须同时满足光子的能量本征值方程和光子的动量本征值方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle=\hbar\omega|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle, \tag{7}$$

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle=\hbar\kappa|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle. \tag{8}$$

其所描述的光子具有能量本征值 $E=\hbar\omega$ 和动量本征值 $p_z=\hbar\kappa$. 注意到方程 (7) 和 (8) 的左边有虚数符号 i 而右边没有，所以量子化条件要求 $|A(t,z)\rangle$ 必须为复函数，否则方程式 (7) 和 (8) 无解. 换句话说，态矢量函数必须为复函数与运动方程本身并没有直接关系，而是量子化条件的必然结果.

本文的关键是 对于光子的态矢量函数，仅有光子的能量本征值方程和光子的动量本征值方程作为量子化条件虽然是必要的，但却是不够充分的，还必须附加第三个量子化必要条件，那就是光子的角动量本征值方程(组). 为此我们构造了这样的一个满足三个量子化条件的光子一维态矢量函数，它可以完整地描述光子的全部行为，除了能量和动量的特征之外，尤其是先前欠缺的角动量属性.

进一步的分析表明，宏观上光波的偏振现象是微观上光子角动量属性的表现，实际中最常见的五种光的偏振态，即自然光、线偏振光、部分偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光[6] 都可以统一由所得到的光子一维态矢量函数的实部表示，并具体表示为角动量本征值分别是 $S_{z+}=+\hbar$ 和 $S_{z-}=-\hbar$[7] 的 2 类光子的概率幅(probability amplitude[8])之间和相位之间的关系.

利用光子的一维态矢量函数可以方便地处理一些疑难的光学问题，作为实例，本文解析表达了一个基本的经验事实 :自然光通过任何取向线偏振片后不仅成为该取向的线偏振光，而且由此得到的任何取向线偏振光的强度都是初始自然光强度的二分之一. 此外，经典光学中熟知的 Malus 定律[9] 也找到了满意的量子力学根据.

2. 光子的一维态矢量函数及其分析

我们构造的光子一维态矢量函数在右手直角坐标系里的一般表达式是

$$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sigma_{+}^{(1)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}+\sigma_{-}^{(1)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}, \tag{9}$$

其中

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}=|\boldsymbol{A}_{+}(t,z)\rangle \tag{10a}$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}=|\boldsymbol{A}_{-}(t,z)\rangle \tag{10b}$$

是光子的一对本征态矢量函数，除了各自仍然具有能量本征值 $E=\hbar\omega$ 和动量本征值 $p_z=\hbar\kappa$ 之外，它们还是光子的自旋 (spin) 角动量算符 $\hat{S}_z=\hbar\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix}$[10] 的一对本征态矢量函数，直接验算可以得到

$$\hat{S}_z|\boldsymbol{A}_{+}(t,z)\rangle=+\hbar|\boldsymbol{A}_{+}(t,z)\rangle, \tag{11a}$$

$$\hat{S}_z|\boldsymbol{A}_{-}(t,z)\rangle=-\hbar|\boldsymbol{A}_{-}(t,z)\rangle. \tag{11b}$$

故其描述的光子具有自旋角动量本征值分别是 $S_{z+}=+\hbar$ 和 $S_{z-}=-\hbar$. $|A_{+}(t,z)\rangle$和$|A_{-}(t,z)\rangle$本身是归一的$\langle A_{+}(t,z)||A_{+}(t,z)\rangle=\langle A_{-}(t,z)||A_{-}(t,z)\rangle=1$，相互之间满足量子力学对本征态矢量的正交性要求$\langle A_{+}(t,z)||A_{-}(t,z)\rangle=\langle A_{-}(t,z)||A_{+}(t,z)\rangle=0$. 这里$\langle A_{+}(t,z)|\equiv|A_{+}(t,z)\rangle^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})\cdot\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{j})\cdot e^{+i(\omega t-\kappa z)}$ 是 (10a)式 $|A_{+}(t,z)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}$ 的 Hermitian 伴随(adjoint[2])，$\langle A_{-}(t,z)|$的定义与此类似. 正如前文所述，光波的电磁矢势可以表现为仅仅是光子态矢量函数的实部，所以

$$\boldsymbol{A}_{+}(t,z)=\mathrm{Re}|\boldsymbol{A}_{+}(t,z)\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{i}\cos(\omega t-\kappa z)+\boldsymbol{j}\sin(\omega t-\kappa z)]. \tag{12a}$$

按照经典光学中的相关规定，在右手坐标系中，当光

沿着 Z 轴的正方向 k 传播时，正对着光源观察，(12a)式显然代表一个矢量的逆时针圆周运动，如果把它当成光矢量，那么按照习惯称作左旋圆偏振(left-circularly polarized[9])光. 同理

$$A_-(t,z)=\mathrm{Re}|A_-(t,z)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{i}\cos(\omega t-\kappa z)-\boldsymbol{j}\sin(\omega t-\kappa z)] \tag{12b}$$

表示右旋圆偏振光. 由于方程式(12a)和(11a)的相关表示，故将 $S_{z+}=+\hbar$ 的光子称作左旋光子(left-spin photons)，相应的将 $S_{z-}=-\hbar$ 的光子称作右旋光子(right-spin photons). 光子的一维态矢量函数的一般表达式(9)同样满足归一化条件

$$\langle A(t,z)||A(t,z)\rangle=[\sigma_+^{(1)}]^2+[\sigma_-^{(1)}]^2=1. \tag{13}$$

清楚表明了其中的实系数 $\sigma_+^{(1)}$ 是左旋光子的概率幅，$\sigma_-^{(1)}$ 是右旋光子的概率幅，α 和 β 则是它们各自的相位因子. (9)式通常并不是光子角动量算符的本征态矢量函数，其角动量算符的期望值是

$$\bar{S}_z=\langle A(t,z)\mid\hat{S}_z\mid A(t,z)\rangle=\hbar[(\sigma_+^{(1)})^2-(\sigma_-^{(1)})^2]. \tag{14}$$

经过简单数学运算可以直接给出(9)式的实部，自然就成为一维电磁矢势 $A(t,z)$ 的一般表达式. 这完全是由于一维光波方程(4)与一维光子方程(3)是同一个方程，故上面的推导实际上是通过求解在充分必要的量子化条件(7,8,11a 和 11b)规范下的一维光子方程(3)，进而得到的一维光波方程(4)的普遍解

$$\begin{aligned}A(t,z)&=\mathrm{Re}|A(t,z)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sigma_+^{(1)}\cos(\omega t-\kappa z-\alpha)+\sigma_-^{(1)}\cos(\omega t-\kappa z-\beta)\\ \sigma_+^{(1)}\sin(\omega t-\kappa z-\alpha)-\sigma_-^{(1)}\sin(\omega t-\kappa z-\beta)\end{bmatrix}\\&\equiv\frac{\sigma_+^{(1)}}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{i}\cos(\omega t-\kappa z-\alpha)+\boldsymbol{j}\sin(\omega t-\kappa z-\alpha)]\\&\quad+\frac{\sigma_-^{(1)}}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{i}\cos(\omega t-\kappa z-\beta)-\boldsymbol{j}\sin(\omega t-\kappa z-\beta)].\end{aligned} \tag{15}$$

当 $\sigma_+^{(1)}=1$ 而 $\sigma_-^{(1)}=0$ 时，(14)式给出 $\bar{S}_{z+}=+\hbar$，即全部都是左旋光子，而(15)式则给出

$$A_+(t,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{i}\cos(\omega t-\kappa z-\alpha)+\boldsymbol{j}\sin(\omega t-\kappa z-\alpha)]. \tag{16a}$$

除去一个在这里无关紧要的相位因子 α，(16a)式与(12a)式是一样的，同样表示左旋圆偏振光；当 $\sigma_+^{(1)}=0$ 而 $\sigma_-^{(1)}=1$ 时，(14)式给出 $\bar{S}_{z-}=-\hbar$，即全部都是右旋光子，而(15)式则给出

$$A_-(t,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{i}\cos(\omega t-\kappa z-\beta)-\boldsymbol{j}\sin(\omega t-\kappa z-\beta)]. \tag{16b}$$

除去一个在这里无关紧要的相位因子 β，(16b)式与(12b)式是一样的，同样表示右旋圆偏振光；当 $\sigma_+^{(1)}=\sigma_-^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即左旋光子与右旋光子的概率幅相等、它们的概率各为二分之一时，(14)式给出 $\bar{S}_{z0}=0$，即该态矢量函数描述的光子自旋角动量期望值为零，且与相位因子的取值无关，而(15)式则给出

$$\begin{aligned}A_0(t,z)&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\cos(\omega t-\kappa z-\alpha)+\cos(\omega t-\kappa z-\beta)\\ \sin(\omega t-\kappa z-\alpha)-\sin(\omega t-\kappa z-\beta)\end{bmatrix}\\&=\cos\left(\omega t-\kappa z-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\\&\quad\cdot\left[\boldsymbol{i}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+\boldsymbol{j}\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{16c}$$

如果左旋光子与右旋光子的相位差$(\beta-\alpha)$是一个常数，那么(16c)式表示线偏振光，其与 X 轴之间的偏振角是 $\phi=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$；如果$(\beta-\alpha)$在取值范围内均匀分布，那么(16c)式表示自然光. 当 $\sigma_+^{(1)}$ 和 $\sigma_-^{(1)}$ 取 $0,1,\sqrt{2}/2$ 以外的其他值时，如果$(\beta-\alpha)$是一个常数，那么(15)式表示椭圆偏振光；如果$(\beta-\alpha)$在取值范围内均匀分布，那么(15)式表示部分偏振光.

总而言之，(15)式从光子态矢量函数的角度，赋予了电磁矢势定量的物理解释：任何光波都是左旋圆偏振光波与右旋圆偏振光波的线性叠加；或者换句话说，任何光束都是由左旋光子与右旋光子组成的，当它们的概率幅之间和相位之间取不同的关系时，宏观上表现为不同的偏振态.

3. 用光子态矢量函数剖析一个典型的光学难题

有一个人们非常熟悉的光学现象:当一束自然光通过一块理想的线偏振片后,它不仅转换成线偏振光,而且透射光的强度是初始自然光强度的二分之一.问题当然不在于透射光的线偏振性,而在于其二分之一的强度与线偏振片的取向无关.如果设想该线偏振片在不停地旋转,那么透射光的强度将不因为旋转而产生任何变化.经典光学认为这是由于自然光可以看成是 2 束振幅相等的、振动方向互相垂直的、沿着同一方向传播的不相干的线偏振光的缘故[5,9].但是经过认真分析就可以判断,所阐述的理由既没有充分的依据,也不能令人信服地回答所提出的问题,关键在于迄今为止文献中还没有对此给出过严格的解析表达式.利用光子的一维态矢量函数、它的实部表示的一维电磁矢势、以及偏振光学中熟知的数学工具,这个问题可以轻而易举地解决.

对照偏振光学中关于偏振光的描述,不难发现在(10a)和(10b)式给出的一对光子一维本征态矢量函数中,形式上包含有一对 Jones 矢量[11],即

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{L}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{j}),\\
|\boldsymbol{R}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\mathrm{i}\cdot\boldsymbol{j}).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Jones 矢量由于包含有虚数符号,不能直接代表真实空间的任何物理矢量,在偏振光学中只是作为一种数学工具,用于描述偏振光现象.我们在形式上借用的同时,赋予它量子力学 Hilbert 空间里态矢量的内涵,直接验算表明,(17)式恰好就是光子自旋角动量算符的一对本征态矢量

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_z|\boldsymbol{L}\rangle &= +\hbar|\boldsymbol{L}\rangle,\\
\hat{S}_z|\boldsymbol{R}\rangle &= -\hbar|\boldsymbol{R}\rangle.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

其本征值分别是 $S_{z+}=+\hbar$ 和 $S_{z-}=-\hbar$.由此可以得出推论:原本在偏振光学中表示偏振器件对 Jones 矢量作用的 Jones 矩阵,形式上自然就成为量子力学中偏振器件对一维光子态矢量函数的量子作用算符.这样就可以借用偏振光学中的相关表示,直接得到极化取向为 θ 的线偏振片的量子作用算符[7]

$$
\hat{P}_\theta = \begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}. \tag{19}
$$

按照量子力学理论的矩阵形式,透过该线偏振片后的一维光子态矢量函数应该是

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}_\theta(t,z)\rangle &= \hat{P}_\theta|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}\cdot\left[\sigma_+^{(1)}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta)}\right.\\
&\quad\left.+\sigma_-^{(1)}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\theta)}\right]\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

该态矢量函数的实部就是宏观上代表透射光的电磁矢势

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_\theta(t,z) &= \mathrm{Re}|\boldsymbol{A}_\theta(t,z)\rangle\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sigma_+^{(1)}\cos(\omega t-\kappa z-\theta-\alpha)\right.\\
&\quad\left.+\sigma_-^{(1)}\cos(\omega t-\kappa z+\theta-\beta)\right]\\
&\quad\cdot(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

(21)式清楚表明包括自然光在内的任何形态的光束,通过线偏振片后都成为与该线偏振片有相同取向的线偏振光.该线偏振光的相对强度 χ_θ,也就是光子透过线偏振片的概率,按照量子力学法则,应该等于该态矢量函数 $|\boldsymbol{A}_\theta(t,z)\rangle$ 与其 Hermitian 伴随 $|\boldsymbol{A}_\theta(t,z)\rangle^\dagger\equiv\langle\boldsymbol{A}_\theta(t,z)|$ 的内积(inner product[2]),容易表示为

$$
\begin{aligned}
\chi_\theta &= \langle\boldsymbol{A}_\theta(t,z)||\boldsymbol{A}_\theta(t,z)\rangle\\
&= \frac{1}{2}\left\{1+2\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(1)}\left[\cos(\beta-\alpha)\cdot\cos(2\theta)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\sin(\beta-\alpha)\cdot\sin(2\theta)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

如果入射光是线偏振光,即 $\sigma_+^{(1)}=\sigma_-^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\phi$ 是它的偏振角,由(22)式可以直接得到

$$
\begin{aligned}
\chi_\theta^{\mathrm{Linearly}} &= \cos^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}-\theta\right)\\
&= \cos^2(\phi-\theta).
\end{aligned}
\tag{23a}
$$

这就是经典光学中著名的 Malus 定律[9];如果入射光是自然光,仍然有 $\sigma_+^{(1)}=\sigma_-^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,但偏振角 $\phi=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ 均匀分布,由(22)式可以得到

$$
\begin{aligned}
\chi_\theta^{\mathrm{Natural}} &= \frac{1}{2}\left\{1+\left[\overline{\cos(\beta-\alpha)}\cdot\cos(2\theta)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\overline{\sin(\beta-\alpha)}\cdot\sin(2\theta)\right]\right\}\\
&\equiv \frac{1}{2},
\end{aligned}
\tag{23b}
$$

其中上划线指对偏振角 $\phi=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ 取平均,故有

$$\overline{\cos(\beta-\alpha)}=\overline{\cos(2\phi)}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\phi)\cdot\mathrm{d}\phi=0 \text{ 和}$$

$$\overline{\sin(\beta-\alpha)}=\overline{\sin(2\phi)}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2\phi)\cdot\mathrm{d}\phi=0.$$

(23b) 式清楚地表明,当自然光通过任何取向的线偏振片后,所得到线偏振光的强度都是初始自然光强度的二分之一.

我们还可以将该问题作进一步的延伸,将关系式 (20) 中的 θ 用($\theta+\pi/2$)替代,就得到了透过偏振取向($\theta+\pi/2$)线偏振片后的一维光子态矢量函数

$$|\boldsymbol{A}_{\theta+\pi/2}(t,z)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\kappa z)}\cdot[\sigma_{+}^{(1)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta+\pi/2)}+\sigma_{-}^{(1)}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\theta-\pi/2)}]\cdot\begin{bmatrix}\cos(\theta+\pi/2)\\\sin(\theta+\pi/2)\end{bmatrix}. \tag{24}$$

由此得到的透射线偏振光同样是它的实部

$$\boldsymbol{A}_{\theta+\pi/2}(t,z)=\mathrm{Re}|\boldsymbol{A}_{\theta+\pi/2}(t,z)\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\sigma_{+}^{(1)}\sin(\omega t-\kappa z-\theta-\alpha)-\sigma_{-}^{(1)}\sin(\omega t-\kappa z+\theta-\beta)]\cdot[\boldsymbol{i}\cos(\theta+\pi/2)+\boldsymbol{j}\sin(\theta+\pi/2)]. \tag{25}$$

经过简单的代数运算,不难确认态矢量函数的恒等关系式

$$|\boldsymbol{A}(t,z)\rangle\equiv|\boldsymbol{A}_{\theta}(t,z)\rangle+|\boldsymbol{A}_{\theta+\pi/2}(t,z)\rangle. \tag{26}$$

表明描述任何量子状态的光子一维态矢量函数,都可以表示为 2 个一维态矢量函数的代数和,分别取自于该量子状态的光子投射正交线偏振片的结果.由于态矢量函数是 Hilbert 空间里抽象的复函数,是不可能实际测量的,而在真实空间表现出来的仅仅是它的实部,故若取 (26) 式的实部,则有电磁矢势的恒等关系式

$$\boldsymbol{A}(t,z)\equiv\boldsymbol{A}_{\theta}(t,z)+\boldsymbol{A}_{\theta+\pi/2}(t,z), \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t,z)$,$\boldsymbol{A}_{\theta}(t,z)$和 $\boldsymbol{A}_{\theta+\pi/2}(t,z)$分别由(15),(21)和(25)式表示,适用于任何形式的入射光.如果取其中的 $\sigma_{+}^{(1)}=\sigma_{-}^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且 α 和 β 均匀分布,则有

$$\begin{aligned}&\cos\left(\omega t-\kappa z-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot\left[\boldsymbol{i}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+\boldsymbol{j}\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right]\\&\equiv\frac{1}{2}[\cos(\omega t-\kappa z-\theta-\alpha)+\cos(\omega t-\kappa z+\theta-\beta)]\cdot(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\\&+\frac{1}{2}[\sin(\omega t-\kappa z-\theta-\alpha)-\sin(\omega t-\kappa z+\theta-\beta)]\cdot[\boldsymbol{i}\cos(\theta+\pi/2)+\boldsymbol{j}\sin(\theta+\pi/2)].\end{aligned} \tag{28}$$

(28)式的左式就是代表自然光的(16c) 式,按照经典光学的表述,这是一束频率为 ω,沿着 Z 轴的正方向传播的单色自然光;(28)式的右式则代表一对频率同样为 ω,仍然沿着 Z 轴的正方向传播的单色线偏振光,其振动方向分别为任意正交的 θ 和($\theta+\pi/2$).如果将三角函数之间有关和差化积的恒等关系代入 (28)式的右式,则不难发现,虽然其中的第 1 项和第 2 项原本都分别包含 θ 因子,但是经过简单的代数运算,最终将演化到 (28)式的左式,该 θ 因子自动抵消

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\cos(\omega t-\kappa z-\theta-\alpha)+\cos(\omega t-\kappa z+\theta-\beta)]\cdot(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\\&+\frac{1}{2}[\sin(\omega t-\kappa z-\theta-\alpha)-\sin(\omega t-\kappa z+\theta-\beta)]\cdot[\boldsymbol{i}\cos(\theta+\pi/2)+\boldsymbol{j}\sin(\theta+\pi/2)]\\&\equiv\cos\left(\omega t-\kappa z-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\\&-\cos\left(\omega t-\kappa z-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot(-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta)\\&\equiv\cos\left(\omega t-\kappa z-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot\left\{\boldsymbol{i}\left[\cos\left(\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\cos\theta+\sin\left(\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\sin\theta\right]\right.\\&\left.+\boldsymbol{j}\left[\cos\left(\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\sin\theta-\sin\left(\theta-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\cos\theta\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\equiv \cos\left(\omega t - \kappa z - \frac{\beta+\alpha}{2}\right)\cdot\left[\boldsymbol{i}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+\boldsymbol{j}\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right].$$

因此,(28)式的确是一个与 θ 角无关的代数恒等式.据我们所知,(28)式是第一次用简洁的解析关系表述了经典光学的经验事实:自然光可以看作是2束振幅相等的、振动方向互相垂直的、沿着同一方向传播的不相干的线偏振光的线性叠加.以上的推导表明,如果不借助于光子的态矢量函数,经典光学是很难找到这个解析表达式的,或者说几乎是不可能的.因为在经典光学中,虽然也已经采用了"极为简洁"的 Jones 矢量表示方法,但是却强调指出它"只能适用于偏振光波",而不能表示自然光波[9].

4. 讨论和结论

量子力学的研究对象是包括光子在内的所有微观粒子系统,自从量子力学在1925年前后建立以来,Schrödinger 波动方程就始终是它的主要表达形式之一.但是对于光的研究,宏观上早已建立毋庸置疑的经典电磁理论,它以 Maxwell 波动方程为主要标志.因此,如何协调微观角度光的量子描述和宏观角度光的电磁描述就成为人们从那时开始并且一直持续至今的工作,具体说就是协调光子的 Schrödinger 方程和光波的 Maxwell 方程,以及这2个方程的解.这方面已经有着许许多多相近的、不同的、甚至是矛盾的说法,正如2005年瑞典皇家科学院为在量子光学领域做出了杰出贡献的 Glauber 等颁发 Nobel 物理学奖的文告所称,所有这些解释还远未能达成一致,仍然需要不懈的努力.

在所有已知的论述中,我们最为赞同的提法是前苏联 Landau 和 Lifshitz 理论物理教程中的观点:"对于光子来说,'Schrödinger 方程'就是'Maxwell 方程',…光子的波函数是这个方程的复数解[12]."可以认为,本文即是这一观点的论证和展开.

前面的叙述已经从根本上表明,一方面,光子的 Schrödinger 方程的确就是光波的 Maxwell 方程,所以光子和光波遵循完全相同的运动规律;另一方面,量子化条件要求光子方程的普遍解——光子的态矢量函数必须取复函数形式,而真实性条件则要求光波方程的普遍解——光波的电磁矢势必须取实函数形式,所以光波的电磁矢势可以仅仅是光子态矢量函数的实部.我们也可以从另一个角度作完全同样的阐述,即从经典物理学的立场出发,那么光子的态矢量函数就是光波电磁矢势的量子开拓;或者采用通俗的说法,光子态矢量函数就是经典电磁场的量子化.我们确信,电磁场量子化的这种表达形式不仅直截了当,而且简单方便,必将在更多的场合得以应用.

用光子态矢量函数成功剖析自然光通过线偏振片现象的举例,再次表明光的量子本性,而光的电磁属性只不过是它的宏观表现而已.任何光束,无论是入射的自然光束还是出射的线偏振光束,当它们仅由经典意义下的电磁矢势描述时,都是不完备的,都不能代表入射自然光束或者出射线偏振光束的全部属性,所以一些相关问题得不到合理的解释;而在三个充分必要的量子化条件规范下的光子态矢量函数,由于具备了光子的能量、动量、角动量以及概率幅和相位等量子属性,就能够完整地描述任意光束的一般行为,特别如举例所表明的量子行为.

[1] Shankar R 1980 *Principles of Quantum Mechanics* (New York: Plenum) p120

[2] Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill Book Company) p163, 151

[3] Gasiorowicz S 1996 *Quantum Physics* (New York: John Wiley & Sons) p49

[4] Harrison W A 2000 *Applied Quantum Mechanics* (Singapore: World Scientific) p10

[5] Born M, Wolf E 1999 *Principles of Optics* (England: Cambridge Uni. Press) p628—629, 780

[6] Zhao K H, Zhong X H 1996 *Optics* (Beijing: Peking University Press) 238 (in Chinese) [赵凯华、钟锡华 1996 光学(北京:北京大学出版社)上册 238]

[7] Saleh B E A, Teich M C 1975 *Fundamentals of Photonics* (New York: John Wiley & Sons) p391—393, 203

[8] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (England: Cambridge Uni. Press) p574.

[9] Hecht E 2002 *Optics* (San Francisco: Addison Wesley) p328—333, 376

[10] Peng J S, Li G X 1996 *Introduction to Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) 48 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京:科学出版社)第48页]

[11] Liao Y B 2003 *Polarization Optics* (Beijing: Science Press) p49—51 (in Chinese) [廖延彪 2003 偏振光学(北京:科学出版社)第49—51页]

[12] Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P 1999 *Quantum electrodynamics* (Beijing: World Publishing Corporation) p11—12

State-vector function for a photon

Yao Zhi-Xin† Pan Bai-Liang Chen Gang Zhong Jian-Wei

(*Department of Physics*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *China*)

(Received 18 July 2005; revised manuscript received 26 August 2005)

Abstract

On the basis of the generalized Schrödinger equation, a novel state-vector function that obeys photon motion equation under three quantum conditions has been constructed for a photon in one dimension, which can describe completely the properties of a photon as a relativistic free particle, including its energy and momentum and spin angular momentum. The state-vector function not only defines microscopic parameters such as the probability amplitude and the phase for a photon, but also relates them with the macroscopic polarization of a light beam. As an example, it successfully explains the puzzling polarization problem of a light beam.

Keywords: photon state-vector function, probability amplitude, phase, polarization

PACC: 1480A, 0365, 4250, 4225J

† E-mail: Yaozx@zju.edu.cn