

基于双模压缩信道的双模高斯态量子隐形传态*

张 茜^{1,2)} 李福利¹⁾ 李宏荣¹⁾

1) 西安交通大学应用物理系, 西安 710049)

2) 西安邮电学院, 西安 710061)

(2005 年 7 月 1 日收到, 2005 年 11 月 14 日收到修改稿)

研究了双模高斯态的两个模经由两个双模压缩量子信道的隐形传态. 结果表明, 当输入态有纠缠时, 若要输出态的纠缠不为零, 量子信道的纠缠必须大于一确定值, 其大小在输入态为纯态时依赖于输入态的纠缠度, 在输入态为混合态时不仅与输入态的纠缠有关, 还依赖于输入态的整体纯度.

关键词: 量子隐形传态, 量子纠缠, 双模高斯态

PACC: 4250, 4230

1. 引 言

量子隐形传态^[1,2]是量子信息研究中最重要课题之一, 引起了人们极大的兴趣并取得重要进展^[3,4]. Kim 等人^[5]研究了以两个独立的 Werner 纠缠态为量子信道的两体纠缠自旋纯态的量子隐形传态, 发现如要使输出态仍是纠缠态则要求量子信道的纠缠必须大于一个临界值. 在连续变量的量子体系中, 高斯态具有特别重要的意义. 这是因为, 所有的高斯态都可以在相干态的基础上通过分束器、移相器、压缩器等来制备^[6], 而且高斯态的可分离性充要判据和纠缠的度量已经建立^[7-10]. 文献 [11] 研究了基于双模压缩真空态的量子态的远程传送. 本文研究利用两个独立的双模压缩量子信道进行双模纠缠高斯态的隐形传态, 讨论信道的纠缠对输出态的纠缠以及隐形传态保真度的影响.

2. 双模高斯态及其纠缠

双模高斯态的 Wigner 函数具有形式^[12]

$$W_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{\det W_i}}{\pi^2} \exp\left(-\frac{1}{2} y^+ W_i y\right), \quad (1)$$

其中 $y^+ = (\alpha_1^*, \alpha_1, \alpha_2^*, \alpha_2)$, α_i 是第 i 模的复振幅, W_i 是 4×4 的复关联矩阵. 由下式引入实对称的协

方差矩阵

$$V = F^\dagger W^{-1} F, \quad (2)$$

其中

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -1 & i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

V 可以用三个 2×2 块矩阵 A, B, G 表示为

$$V = \begin{pmatrix} A & G \\ G^\dagger & B \end{pmatrix}. \quad (4)$$

双模高斯态的纠缠可用下式度量^[9]:

$$E_N(\hat{\rho}) = \max\{0, -\log_2 2c_-\}, \quad (5)$$

其中

$$c_- = \sqrt{\frac{\tilde{\Delta}(V) - \sqrt{\tilde{\Delta}(V)^2 - 4\det V}}{2}} \quad (6)$$

是协方差矩阵(4)的部分转置矩阵的最小辛本征值^[13] $\tilde{\Delta}(V) = \det A + \det B - 2\det G$.

3. 双模高斯态的量子隐形传态

量子隐形传态的方案如图 1 所示. S 表示双模高斯态, 设其 Wigner 函数为 $W_i(\alpha_1, \alpha_2)$. 图中 3—5 和 4—6 是两个独立的量子信道, 由两个双模压缩态形成. 双模压缩态的 Wigner 函数为

$$W(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \exp[-A(|\alpha|^2 + |\beta|^2)]$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10274058 和 10574103)资助的课题.

$$- B_l(\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)], \quad (7)$$

其中 $l = 1$ 对应 3 与 5 信道, $l = 2$ 对应 4 与 6 信道,

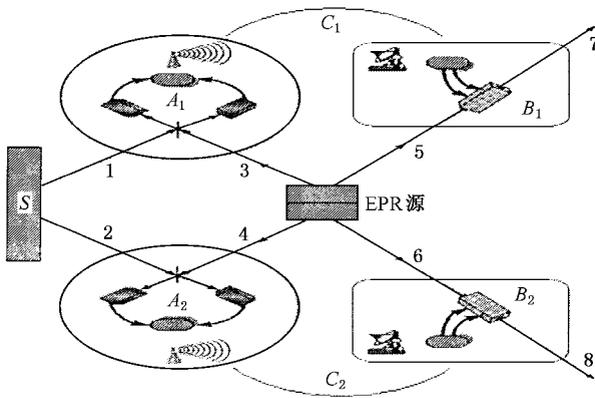


图 1 双模高斯态量子隐形传态方案

$A_l = 2\cosh(2r_l)$, $B_l = 2\sinh(2r_l)$, r_l 是第 l 信道的压缩参数. C_1 和 C_2 是经典信道. 输入端 A_1 (A_2) 和输出端 B_1 (B_2) 与经典信道 C_1 (C_2) 和量子信道 3—5 (4—6) 构成一个连续变量隐形传态过程, 用来传送输入态的第一(二)个模. 根据连续变量隐形传态方案^[21], 7 和 8 端两个输出模处于的量子态的 Wigner 函数为

$$W_0(\delta_1, \delta_2) = \frac{(A_1 + B_2)(A_2 + B_2)}{2\pi} \int d^2\alpha_1 \int d^2\alpha_2 W_i(\alpha_1, \alpha_2) \times \exp\left[-\frac{1}{4}(\alpha_2^+ - \delta_2^+)W_{e2}(\alpha_2 - \delta_2)\right] \times \exp\left[-\frac{1}{4}(\alpha_1^+ - \delta_1^+)W_{s1}(\alpha_1 - \delta_1)\right] \quad (8)$$

其中 $W_{e1} = \text{diag}[(A_1 + B_1)(A_1 + B_1)]$, $W_{e2} = \text{diag}[(A_2 + B_2)(A_2 + B_2)]$ 及 $\alpha_{1,2}^+ = (\alpha_{1,2}^*, \alpha_{1,2})$, $\delta_{1,2}^+ = (\delta_{1,2}^*, \delta_{1,2})$.

设输入态是双模高斯态(1), 其关联矩阵

$$W_i = \begin{pmatrix} P_i & R_i \\ R_i^+ & Q_i \end{pmatrix}, \quad (9)$$

则根据(8)式, 输出态的 Wigner 函数为

$$W_0(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)}{4\pi^2} \times \frac{\sqrt{\det W_i}}{\sqrt{\det(Q_i + \frac{1}{2}W_{e2})} \cdot \sqrt{\det(P_o + \frac{1}{2}W_{e1})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}y^+ W_y\right), \quad (10)$$

其中

$$W = \begin{pmatrix} P & R \\ R^+ & Q \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$Q = Q_o - R_o \left[P_o + \frac{1}{2}W_{e1} \right]^{-1} R_o^+, \quad (12)$$

$$P = \frac{1}{2}W_{e1} - \frac{(A_1 + B_1)^2}{4} \left[P_o + \frac{1}{2}W_{e1} \right]^{-1}, \quad (13)$$

$$R = \frac{A_1 + B_1}{2} \left[P_o + \frac{1}{2}W_{e1} \right]^{-1} R_o^+, \quad (14)$$

而且

$$P_o = P_i - R_i \left[Q_i + \frac{1}{2}W_{e2} \right]^{-1} R_i^+, \quad (15)$$

$$Q_o = \frac{1}{2}W_{e2} - \frac{(A_2 + B_2)^2}{4} \left[Q_i + \frac{1}{2}W_{e2} \right]^{-1}, \quad (16)$$

$$R_o = \frac{A_2 + B_2}{2} R_i \left[Q_i + \frac{1}{2}W_{e2} \right]^{-1}. \quad (17)$$

由(10)可见, 输出态仍为双模高斯态. 根据(2)式, 输出态的协方差矩阵为

$$V = F^+ W^{-1} F = \begin{pmatrix} A & G \\ G^+ & B \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$A = T^+ (P - RQ^{-1}R^+)^{-1} T, \quad (19)$$

$$B = T^+ (Q - R^+P^{-1}R)^{-1} T, \quad (20)$$

$$G = -T^+ (P - RQ^{-1}R^+)^{-1} RQ^{-1} T, \quad (21)$$

$$\text{且 } T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

4. 结果及讨论

一个任意的双模高斯态总可以通过局域么正变换使其变成标准形式而不影响其纠缠特性^[7,8], 即对一个高斯态的协方差矩阵 V , 总存在局域么正操作 $S_l = S_1 \oplus S_2$ ($S_i \in Sp(2, \mathbb{R})$), 可以使其变换为唯一对应的标准形式 V_{st}

$$S_l^+ V S_l = V_{st} = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (22)$$

同时, 注意到由(11)和(18)所规定的隐形传态对局域的么正变换是协变的. 因此, 只需要考虑标准形式的输入双模高斯态. 因为对于输入的任一高斯态, 在传送前先通过一些局域么正变换将其变为标准形式, 然后将变换后的标准形式作为输入态进行如上的隐形传态过程, 最后对相应标准形式的输出态施加逆局域变换就可以得到原输入态所对应的输

出态.

首先考虑输入态为纯态时的情况,此时矩阵 V_{sf} 满足条件 $\det V_i = 1/16, a = b, c_1 = -c_2 = c, a^2 = c^2 + 1/4^{[9]}$. 根据 (11)–(17) 式,输入态的关联矩阵 W

及其矩阵元表示为

$$W = \begin{pmatrix} P & R \\ R^+ & Q \end{pmatrix}, \quad (23)$$

其中 2×2 矩阵 Q, P 和 R 的矩阵元由下式给出:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{4(A_2 + B_2) [a(A_1 + B_1) + 2]}{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2) + 8a(A_1 + B_1) + 8a(A_2 + B_2) + 16}, \quad (24)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0, \quad (25)$$

$$P_{11} = P_{22} = \frac{4(A_1 + B_1) [a(A_2 + B_2) + 2]}{(A_2 + B_1)(A_2 + B_2) + 8a(A_1 + B_1) + 8a(A_2 + B_2) + 16}, \quad (26)$$

$$P_{12} = P_{21} = 0, \quad (27)$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{4c(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)}{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2) + 8a(A_1 + B_1) + 8a(A_2 + B_2) + 16}, \quad (28)$$

$$R_{11} = R_{22} = 0. \quad (29)$$

将(23)–(29)带入到(18)–(21),得到输出态的协方差矩阵为

$$V = \begin{pmatrix} a + \kappa_1 & 0 & c & 0 \\ 0 & a + \kappa_1 & 0 & -c \\ c & 0 & a + \kappa_2 & 0 \\ 0 & -c & 0 & a + \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

其中 $\kappa_1 = 2(A_1 + B_1), \kappa_2 = 2(A_2 + B_2)$.

利用(6)和(30)式,可求得输出态部分转置协方差矩阵最小辛本征值

$$c_- = a + \frac{1}{A_1 + B_1} + \frac{1}{A_2 + B_2} - \sqrt{\left(\frac{1}{A_1 + B_1} - \frac{1}{A_2 + B_2}\right)^2 + a^2} - \frac{1}{4}. \quad (31)$$

将(31)式代入(5)式,得到输出态的纠缠度

$$E_N(\hat{\rho}) = \max\{0, -\log_2 [\kappa_1 + \kappa_2 + \cosh(E_N(\hat{\rho}) \ln 2) - \sqrt{\sinh^2(E_N(\hat{\rho}_i) \ln 2) + (\kappa_1 - \kappa_2)^2}] \}. \quad (32)$$

其中 $E_N(\hat{\rho}_i) = \max\{0, -2\log_2(\sqrt{a+1/2} - \sqrt{a-1/2})\}$ 是输入态纠缠度^[9].

隐形传态的质量可以用保真度来衡量^[14–16]

$$F_e = \pi^2 \int d^2\alpha_1 \int d^2\alpha_2 W_i(\alpha_1, \alpha_2) W(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)}{\sqrt{\det(Q_i + \frac{1}{2}W_{e2})} \sqrt{\det(P_o + \frac{1}{2}W_{e1})}} \times \frac{\det W_i}{\sqrt{\det(W_i + W)}}. \quad (33)$$

输出态与输入态的纠缠度的比值 $E_N(\hat{\rho})/E_N(\hat{\rho}_i)$ 以及保真度 F_e 随信道压缩参数 r_1 变化的函数关系如图 2 所示. 图中的曲线表现出和双模高斯态的纠缠交换^[17]相似的情形,即 r_1 越大,输出的纠缠越大,保真度越高;只有当量子信道和输入态均有纠缠时,输出纠缠才不为零;当 r_1 和 r_2 都给定,保真度随输入态纠缠的增大而减小. 图 2 显示保真度和输出输入纠缠度之比在量子信道的纠缠较大时趋于一致,但是在量子信道纠缠小时却有明显的差异. 这是因为 $E_N(\hat{\rho})$ 仅度量输出态的纠缠特性,只有量子纠缠存在于输出态时才不为 0,而保真度是输入态与输出态的重叠积分,只要输入和输出态不正交,保真度就不为 0. 图 3 是 $r_2 = 0$ 时保真度 F_e 随着 r_1 的变化曲线,表明若一个信道没有纠缠,则无论输入态和另一信道的纠缠有多少,保真度始终不超过 0.5. 我们还发现当信道之一无纠缠时,输出纠缠度始终为 0. 由图 4 可以看到,对给定 r_2 ,要输出态有纠缠,需要 r_1 大于一个最小值,其随 r_2 的增大而减小. 图 4 和图 5 表明纠缠度比值 $E_N(\hat{\rho})/E_N(\hat{\rho}_i)$ 和保真度均随两个信道压缩参数 r_1 和 r_2 的同时增大而增大.

当输入态的协方差矩阵为(22)式所示的一般形式时,由(18)式可求得输出态的协方差矩阵

$$V = \begin{pmatrix} a + \kappa_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a + \kappa_1 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b + \kappa_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b + \kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

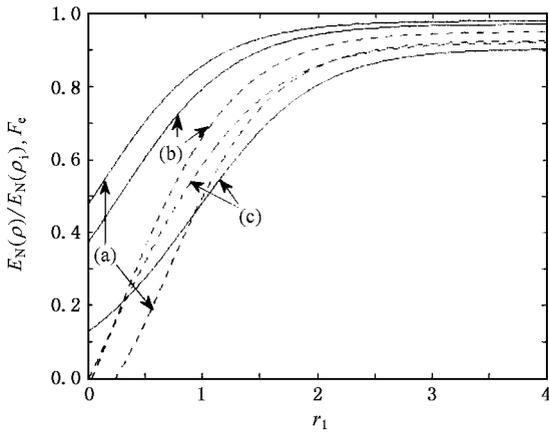


图 2 $E_N(\hat{\rho})/E_N(\hat{\rho}_1)$ (虚线) 和 F_e (实线) 随信道压缩参数 r_1 的变化 其中 $r_2 = 2, E_N(\hat{\rho}_i) = 0.5$ (a), 1.5 (b), 3.5 (c)

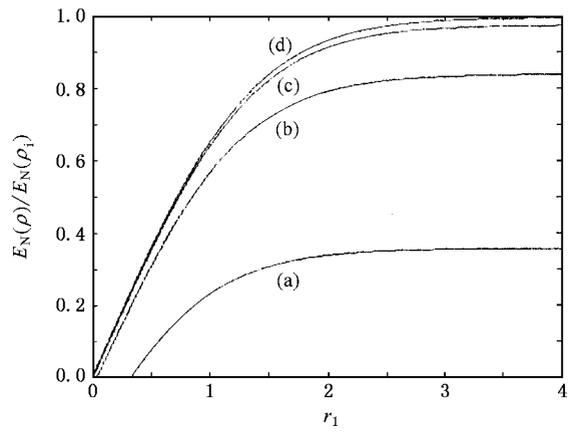


图 4 $E_N(\hat{\rho})/E_N(\hat{\rho}_1)$ 随 r_1, r_2 的变化 $E_N(\hat{\rho}_i) = 3, r_2 = 0.5$ (a), 1.5 (b), 2.5 (c), 3.5 (d)

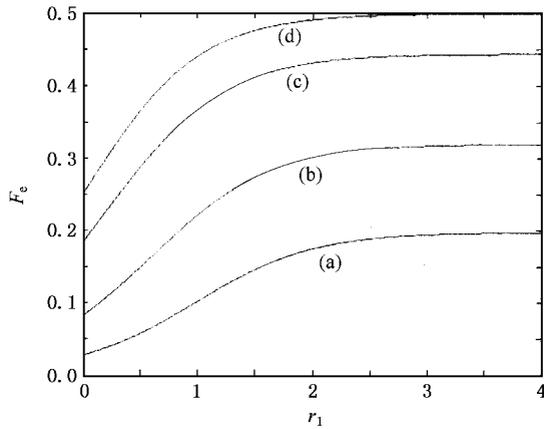


图 3 当 $r_2 = 0$, 保真度相对 r_1 的变化 $E_N(\hat{\rho}_i) = 3$ (a), 1.5 (b), 1 (c), 0.5 (d)

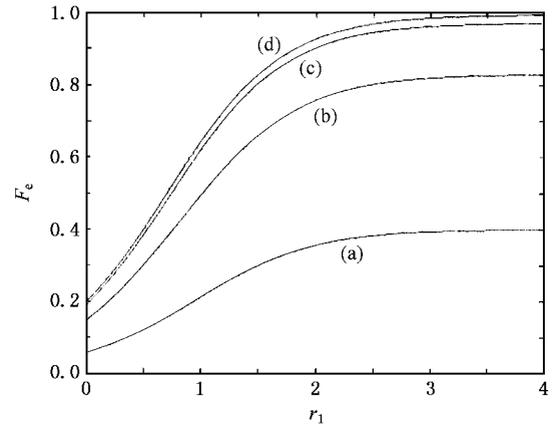


图 5 保真度 F_e 随 r_1, r_2 的变化 $E_N(\hat{\rho}) = 3, r_2 = 0.5$ (a), 1.5 (b), 2.5 (c), 3.5 (d)

利用(6)式和(34)式, 我们得到输出态部分转置协方差矩阵的最小辛本征值

$$2c_-^2 = -\Delta + \frac{1}{2\mu_1^2} + \frac{1}{2\mu_2^2} + \frac{1}{\mu_1}\kappa_1 + \kappa_1^2 + \frac{1}{\mu_2}\kappa_2 + \kappa_2^2 - \frac{1}{4}\sqrt{2\epsilon}, \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \epsilon &= 8\kappa_1^4 + \frac{16}{\mu_1}\kappa_1^3 + 16\kappa_1^2\left(-\Delta + \frac{1}{\mu_1^2}\right) \\ &\quad - \epsilon_{1A}\kappa_1 + 8\kappa_2^4 + \frac{16}{\mu_2}\kappa_2^3 + 16\kappa_2^2\left(-\Delta + \frac{1}{\mu_2^2}\right) \\ &\quad - \epsilon_{1B}\kappa_2 + \epsilon_0 + \epsilon', \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{1A} &= \frac{1}{\mu_1^3\mu_2^4\mu^2}\left[(4\mu\mu_1^2\mu_2^2\Delta - 3\mu\mu_2^2 - \mu\mu_1^2)^2 - 4(\mu_1\mu_2)^2\right], \\ &\quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{1B} &= \frac{1}{\mu_1^4\mu_2^3\mu^2}\left[(4\mu\mu_1^2\mu_2^2\Delta - 3\mu\mu_1^2 - \mu\mu_2^2)^2 - 4(\mu_1\mu_2)^2\right], \\ &\quad (38) \end{aligned}$$

$$\epsilon_0 = 2\left[\left(\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} - 2\Delta\right)^2 - \frac{1}{\mu^2}\right], \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \epsilon' &= 8\left[-2\kappa_1^2\kappa_2^2 - \frac{2}{\mu_1}\kappa_1\kappa_2^2 - \frac{2}{\mu_2}\kappa_1^2\kappa_2 - \frac{2}{\mu}\kappa_1\kappa_2\right], \\ &\quad (40) \end{aligned}$$

这里 $\Delta = a^2 + b^2 + 2c_1c_2, \mu_1 = 1/2a, \mu_2 = 1/2b, \mu^2 = 1/[16(ab - c_1^2)(ab - c_2^2)]$, 而 μ, μ_1, μ_2 分别是输入态的整体纯度和约化纯度^[17-19], 其定义为 $\mu = \text{tr}\hat{\rho}^2, \mu_{1,2} = \text{tr}_{1,2}\hat{\rho}_{1,2}^2$ ($\hat{\rho}_{1,2} = \text{tr}_{2,1}\hat{\rho}$ 是输入态的约化密度算符).

由(35)式, 利用(5)式可求得输出态的纠缠度.

在下面的讨论中,为方便起见,将输入高斯态的参数取为 $a \neq b, c_1 = -c_2 = c$, 这一选取不影响所得结论的一般性.

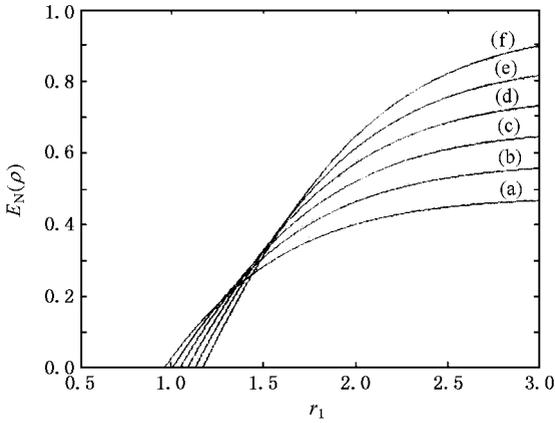


图 6 $E_N(\hat{\rho})$ 随压缩参数 r_1 的变化 $E_N(\hat{\rho}_i) = 0.5$ (a), 0.6 (b), 0.7 (c), 0.8 (d), 0.9 (e), 1.0 (f); $\mu = 0.55, \mu_2 = 0.5, r_2 = 2$

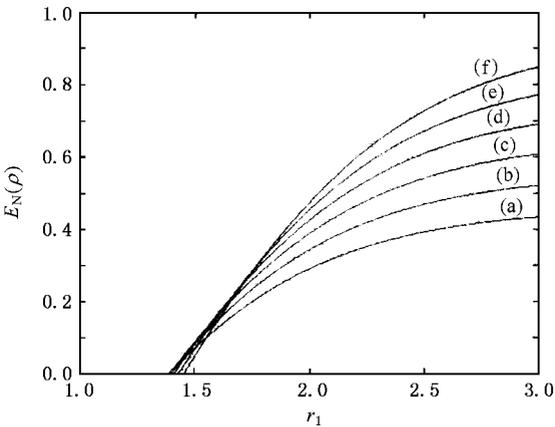


图 7 $E_N(\hat{\rho})$ 随压缩参数 r_1 的变化 $E_N(\hat{\rho}_i) = 0.5$ (a), 0.6 (b), 0.7 (c), 0.8 (d), 0.9 (e), 1.0 (f); $\mu = 0.4, \mu_2 = 0.5, r_2 = 2$

图 6 至图 8 是输出纠缠度 $E_N(\hat{\rho})$ 随信道压缩参数变化的曲线. 在每一图中,输入态纠缠度 $E_N(\hat{\rho}_i)$ 取一系列值,但 μ, μ_2 和 r_2 均大小一定. 如图 6 所示,要想在输出态中保持纠缠,要求量子信道的压缩参数(即纠缠)必须大于一最小值. 由图 6—8,

可以发现这个最小值和输入态的整体纯度 μ 相关: 随着 μ 的减小,这个值不断增大;同时它也依赖于输入态的纠缠度 $E_N(\hat{\rho}_i)$: 图 6, 7 中表明, $E_N(\hat{\rho}_i)$ 越大,这一压缩参数的最小值越大,但随着整体纯度 μ 的减小,这一关系发生反转,如图 8 所示.

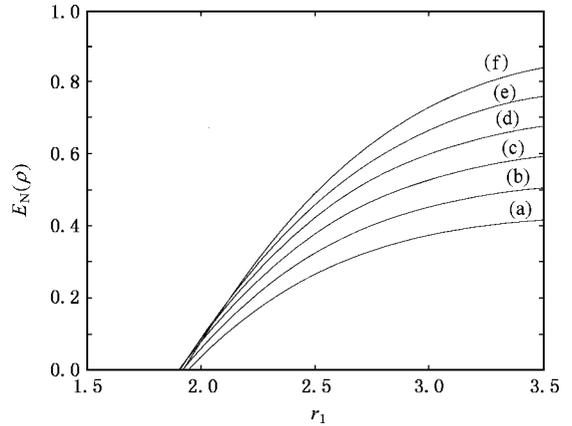


图 8 $E_N(\hat{\rho})$ 随压缩参数 r_1 的变化 $E_N(\hat{\rho}_i) = 0.5$ (a), 0.6 (b), 0.7 (c), 0.8 (d), 0.9 (e), 1.0 (f); $\mu = 0.2, \mu_2 = 0.5, r_2 = 2$

5. 结 论

本文采用连续变量的量子隐形传态方案研究了利用两个双模压缩态形成的两个独立量子信道进行双模高斯态的量子隐形传态. 在输入双模高斯态为纯态和混合态两种情况下,计算了输出态的纠缠以及保真度. 结果表明,无论输入态是纯态还是混合态,输出纠缠和保真度均随两个量子信道压缩参数的增大而增强,两信道的压缩参数取值均衡有利于在输出态中保持纠缠. 我们还发现,若要输出纠缠不为零,量子信道的纠缠(即压缩参数)必须大于一个最小值,这一最小值在输入态为纯态时随输入态纠缠度的增大而减小;在输入态为混合态时随输入态整体纯度的减小而增大. 同时,在整体纯度大时,输入态的纠缠度越大,这一压缩参数的最小值越大,但随着整体纯度 μ 的减小,其关系将会发生反转,即输入态的纠缠度越大,压缩参数的最小值越小.

[1] Bennett C H , Brassard G , Crepeau C , Jozsa R , Peres , A , Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
 [2] Braunstein S L , Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869
 [3] Bouwmeester D , Pan J W , K , Eibl M , Weinfurter H , Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575

[4] Furusawa A , Sorensen J L , Braunstein S L , Fuchs C A , Kimble H J , Polzik E S 1998 *Science* **282** 706
 [5] Lee J Y , Kim M S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4236
 [6] Kim M S , Lee J , Munro W J 2002 *Phys. Rev. A* **66** 030301(R)
 [7] Simon R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726

- [8] Duan L M , Giedke G , Cirac J I , Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722
- [9] Vidal G , Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
- [10] Giedke G , Wolf M M , Kruger O , Werner R F , Cirac J I 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 107901
- [11] Song T Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3358 (in Chinese) 宋同强 2004 *物理学报* **53** 3358]
- [12] Englert B G , Wódkiewicz K 2002 *Phys. Rev. A* **65** 054303
- [13] Serafini A , Illuminati F , Paris M G A , Siena S D 2004 *Phys. Rev. A* **69** 022318
- [14] Bennett C H , DiVincenzo D P , Smolin J A , Wootters W K 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824
- [15] Vedral V , Plenio M B , Rippin M A , Knight P L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [16] Vedral V , Plenio M B 1997 *Phys. Rev. A* **57** 1619
- [17] Li H R , Li F L , Yang Y , Zhang Q 2005 *Phys. Rev. A* **71** 022314
- [18] Adesso G , Serafini A , Illuminati F 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 087901
- [19] Lee J Y , Kim M S , Jeong H S 2000 *Phys. Rev. A* **62** 032305

Teleportation of a two-mode Gaussian state through double two-mode-squeezed-state quantum channels^{*}

Zhang Qian^{1,2)} Li Fu-li¹⁾ Li Hong-Rong¹⁾

¹ *Department of Applied Physics , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 ,China)*

² *Xi 'an Institute of Posts and Telecommunications , Xi 'an 710061 ,China)*

(Received 1 July 2005 ; revised manuscript received 14 November 2005)

Abstract

Teleportation of a general two-mode Gaussian state through double two-mode squeezed state quantum channels is studied. It is found that the quantum channels must be enough entangled for the output state to be inseparable. The required minimum entanglement for the quantum channels to maintain entanglement in the output state depends on the entanglement of the input state when the input state is pure. The minimum entanglement depends not only the on entanglement but also on the global purity of the input state when the input state is mixed.

Keywords : quantum entanglement , quantum teleportation , two-mode Gaussian state

PACC : 4250 , 4230