

Lucy-Richardson 算法用于针孔图像的恢复^{*}

孔祥龙¹⁾²⁾ 李玉同¹⁾ 远晓辉¹⁾³⁾ 于全芝¹⁾ 郑志远¹⁾

梁文锡¹⁾ 王兆华¹⁾ 魏志义¹⁾ 张 杰^{1)†}

1) 中国科学院物理研究所光物理重点实验室, 北京 100080)

2) 中国科学技术大学少年班系, 合肥 230026)

3) 中国科学院西安光学机械研究所瞬态光学国家重点实验室, 西安 710068)

(2005 年 6 月 11 日收到, 2005 年 7 月 21 日收到修改稿)

计算了 X 射线针孔成像系统的点扩散函数矩阵, 利用 Lucy-Richardson 算法对模拟和真实的针孔图像进行了较好的恢复, 分析了恢复后得到的结果, 给出了合理的迭代次数、恢复方法细节和恢复图像的分辨率, 并用模拟实验验证了 Lucy-Richardson 算法对针孔图像进行恢复的可靠性.

关键词: 针孔成像, 点扩散函数, Lucy-Richardson 算法

PACC: 5250J, 5225

1. 引 言

在激光等离子体实验中, 强激光束与靶相互作用, 使靶面焦斑处成为 X 射线源^[1-3], 其焦斑大小是计算功率密度的关键参数. 目前用于激光焦斑 X 射线成像的最简单方便的仪器就是针孔相机. 但针孔相机的空间几何分辨率为 $R = d(1 + 1/M)$, 也就是说, 为了提高空间分辨率, 必须减小针孔口径, 但过小的口径会减少通光量, 降低图像的信噪比, 还会引起更大的衍射效应, 同时小口径的针孔相机也难于加工. 这些缺陷使得在实验室一般采用的针孔相机的针孔直径为 10 或 20 μm , 与焦斑的尺寸同量级, 这便给由针孔图像估计焦斑尺寸的恢复过程带来了较大困难. 鉴于此, 本文对针孔相机的点扩散函数进行了讨论, 并采用 Lucy-Richardson 算法^[4,5]对针孔图像进行恢复, 进而估算出焦斑大小. 并用激光红光代替 X 射线, 用具有大口径圆孔的光屏代替针孔, 进行了模拟实验, 验证了算法的可靠性.

2. 原理简介

2.1. 针孔成像的数学描述

二维分布的源强 $f(x, y) = f(\mathbf{r})$ 通过针孔的点

扩散函数(PSF) $h(x, y)$ 成像. 考虑到所得针孔图像是光源通过针孔投影于探测器上所有光的叠加, 即得到^[6]

$$g(\mathbf{r}'') = \iint f(\mathbf{r})h(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{r}' = \frac{S_1}{S_1 + S_2}\mathbf{r}'' + \frac{S_2}{S_1 + S_2}\mathbf{r}, \quad (2)$$

S_1, S_2 分别为光源到针孔的距离和针孔到探测器的距离.

由(2)式, 可将(1)式写为卷积形式为

$$g(\mathbf{r}'') = \frac{1}{M^2}\tilde{f}(\mathbf{r}'') * \tilde{h}(\mathbf{r}''), \quad (3)$$

其中放大率

$$M = \frac{S_2}{S_1},$$

$$\tilde{f}(\mathbf{r}'') = f\left(\frac{\mathbf{r}''}{M}\right),$$

$$\tilde{h}(\mathbf{r}'') = h\left(\frac{\mathbf{r}''}{M+1}\right). \quad (4)$$

于是(1)式可以写为

$$g(\mathbf{r}'') = \frac{1}{M^2}f\left(-\frac{\mathbf{r}''}{M}\right) * h\left(\frac{\mathbf{r}''}{M+1}\right). \quad (5)$$

为了进行计算机数值计算, 在实际应用中需要将放大 M 倍后的原始图像 $f(x, y)$ 和放大 $(M+1)$ 倍

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10374115, 10374116, 10335020, 10105014, 10390160), 国家高技术惯性约束聚变基金, 高温高密度等离子体物理国防科技重点实验室资助的课题.

[†] E-mail: jzhang@aphy.iphy.ac.cn

后的点扩散函数 $h(x, y)$ 及成像图像 $g(x, y)$ 按相同的间隔取样, 产生相应的矩阵 $[\tilde{f}(i, j)]_{J \times J}$, $[\tilde{h}(i, j)]_{K \times L}$, $[g(i, j)]_{(I+K-1) \times (J+L-1)}$.

2.2. Lucy-Richardson 算法简介

Lucy-Richardson 算法采用迭代方法恢复图像, 能够按泊松噪声统计标准求出与给定点扩散函数卷积后最有可能成为采集到的图像的原始图像. 其算法的原理和推导在文献 [4] 和 [5] 中有详尽的阐述, 这里只给出算法的迭代表达式. 对重建图像的第 $(r+1)$ 次估计为第 r 次估计图像与一个校正图像的乘积, 即^[7]

$$f_{i,j,r+1} = f_{i,j,r} \sum_{m=i}^e \sum_{n=j}^f \frac{g_{m,n} h_{m-i+1, n-j+1}}{\sum_{p=a}^b \sum_{q=c}^d f_{p,q,r} h_{m-p+1, n-q+1}} \quad (6)$$

其中首次估计为

$$f_{i,j,1} = \frac{\sum_{m=i}^e \sum_{n=j}^f \frac{g_{m,n} h_{m-i+1, n-j+1}}{d}}{\sum_{p=a}^b \sum_{q=c}^d h_{m-p+1, n-q+1}}. \quad (7)$$

在 (6) (7) 两式中

$$a = \max(1, m - K + 1); \quad b = \min(m, I);$$

$$c = \max(1, n - L + 1); \quad d = \min(n, J);$$

$$e = i + K - 1; \quad f = j + L - 1;$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, I; \quad j = 1, 2, 3, \dots, J.$$

实际上, Lucy-Richardson 算法的迭代过程可以近似认为是一个迭代解卷积的过程. Lucy-Richardson 算法能够求出按照泊松噪声统计标准求出与给顶 PSF 卷积后最有可能成为输入模糊图像的原始图像^[5]. 当 PSF 已知, 但图像噪声信息未知时, 可以使用这个算法进行有效的工作.

3. 数值模拟

3.1. 系统 PSF 的估计

为了用 Lucy-Richardson 算法恢复图像, 必须提前知道系统的点扩散函数, 即理想点光源通过系统后的成像. 对于典型的 X 射线针孔成像系统来说, 其点扩散函数就是理想 X 射线点光源所成的针孔图像. 考虑到真实模型中各参数分别为物距 4cm, 像距为 60cm, 针孔直径 $20\mu\text{m}$, 2keV 以上能量的 X 射线能够被探测到. 这样的参数满足 Fresnel 近场近似^[8], 会发生 Fresnel 近场衍射. 这样, 系统的点扩散

函数就不能简单地考虑为一个圆盘, 而应该是近场衍射的衍射花样. 过去用标准的 Fresnel 半波带的方法很难准确计算出衍射屏上的光强分布. 但现在运用快速傅里叶变换的方法, 已经可以方便快捷地计算出衍射花样^[9]. 我们在这里采用文献 [9] 中提出的方法对点扩散函数矩阵进行计算.

考虑到探测到的 X 射线为连续谱段, 分别计算其中每一特定波长射线的衍射花样再将它们进行叠加显然是不可能的, 故我们均匀抽取其中几个离散点进行计算, 再将分别计算所得的点扩散函数线性叠加作为系统的点扩散函数. 这样的做法是可行的, 因为对恢复结果影响最大的实际是 PSF 的整体面积, 而其中 PSF 的精细结构对于恢复结果影响相对甚微. 在模拟中我们选取能量为 2keV, 3keV, 4keV 的 X 射线所得的衍射花样进行叠加, 所得点扩散函数矩阵形状如图 1 所示:

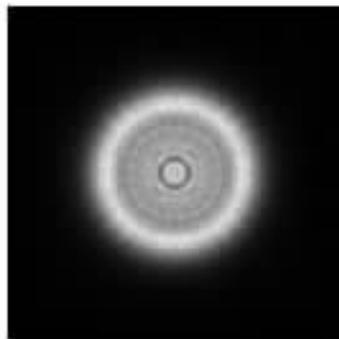


图 1 针孔图像恢复中采用的点扩散函数矩阵图

3.2. 对模拟图像的恢复以及算法合理迭代次数的估计

由于用 Lucy-Richardson 算法恢复图像的过程实际是一个数值迭代的过程, 其算法的迭代次数便直接影响着图像恢复的效果. 对于一般的图像, 如果以均方误差作为评价恢复效果的标准的话, 算法的确是收敛向具有最大可能性的解^[5]. 但不幸的是, 由于噪声放大的原因, 具有最大可能性解的图像可能在视觉上会让人难以接受. 不断迭代是为了使得到的解与采集到的图像更加匹配, 但由于采集到的图像已经被噪声降质, 因而在迭代过程的某些点处, 求得解可能会与噪声, 而不是与真实图像更加匹配. 一般来说, 当迭代次数不够时, 恢复图像没有经过足够次数的校正, 与真实图像差距自然较大. 迭代次数过大时, 会引起噪声的放大, 也会影响恢复效果. 这样

类似的问题在其他的迭代恢复算法中也同样存在,因而可以在算法达到收敛之前就停止迭代,这样的做法已被验证是正确的^[10].

针对本文所要解决的问题,取定迭代次数的方法可以有两种:一是均方误差判别法,即将第 r 次迭代的结果 $f(i, j)_{I \times J, r}$ 与点扩散函数作用后得到的对针孔图像的估计 $\tilde{g}(i, j)_{(I+K-1) \times (J+L-1), r}$, 同真实针孔图像 $g(i, j)_{(I+K-1) \times (J+L-1)}$ 做比较. 当两者的均方误差小于预先取定值 ϵ 时,即停止迭代. 另一种方法是对于不同的点扩散函数模型,用计算机模拟的方法,预先测定 Lucy-Richardson 算法对高斯光源产生的针孔图像的恢复效果,然后选定最佳迭代次数.

两种方法各有利弊,第一种方法对于不同的点扩散函数模型均适用,比较灵活. 但由于要解决的实际问题是估算焦斑功率密度的大小,从某种程度上来说,我们最关心的也就是恢复图像所得的半能量面积(某条灰度等高线所包围的范围内的能量为图像总能量的一半),因此采用第二种方法来定出迭代过程的停止点. 选定恢复图像的半能量面积与真实图像的半能量面积的相对误差 $A = (S_{\text{restore}} - S_{\text{origin}}) / S_{\text{origin}}$ 作为评价恢复效果好坏的参数,因此我们需要确定的就是相对误差 A 较小时的迭代次数. 这里之所以没有采用常用的半高全宽(FWHM)的相对误差作为评价标准,是由于同一图像从不同方向测得的半高全宽面积有一定差异.

这部分的模拟恢复中假设所采用的针孔直径为 $20\mu\text{m}$, 放大率 $M = 15$, CCD 的像元尺寸为 $10\mu\text{m}$, 故数据采样间隔取为 $10\mu\text{m}$.

考虑到所恢复的图像为激光打靶的焦斑,且针孔相机一般并不在靶心的垂直正前方,我们选取了形状大小变化的高斯模型来模拟从不同角度所得到的焦斑针孔像. 其模型的表达式为

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{100-a}\right), \quad (8)$$

其中 $a = 15, 20, 25, \dots, 50$.

为了研究噪声的影响,还需要模拟实际成像过程中可能产生的噪声,如 CCD 采集数据时的读入噪声和光子散射噪声等,在针孔图像中加了两种不同程度高斯噪声和随机颗粒噪声.

1) 均值为 0, 方差为 0.0004 的高斯噪声和密度为 0.0008 的随机颗粒噪声的叠加, 所得图像均方信噪比的范围为 $50 \times (1 \pm 10\%)$.

2) 均值为 0, 方差为 0.0008 的高斯噪声和密度为 0.004 的随机颗粒噪声的叠加, 所得图像均方信噪比的范围为 $10 \times (1 \pm 10\%)$.

对于不同取值 a 得到的模拟结果的 A 值取平均, 图 2 示出了图像恢复效果随算法迭代次数的变化曲线.

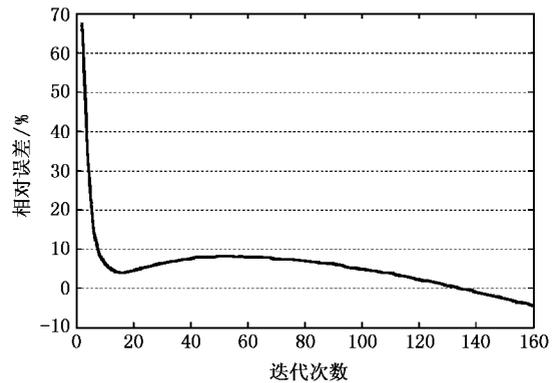


图 2 图像相对误差随 Lucy-Richardson 算法迭代次数的变化曲线

通过分析我们得到在迭代次数为 10 至 160 时, 算法对于半能量面积均有较好的估计, 相对误差控制在 8.3% 以内, 这样的误差已经达到了我们的要求. 当迭代次数为 16 时, 恢复图像与原图像的焦斑面积的相对误差达到极小值 4.0%, 对于模拟图像有较理想的恢复效果, 这样我们在以后的恢复中就以迭代次数 16 为最佳的迭代次数, 为了使所得结果更精确, 引入经验修正因子 $\lambda = 1 / (1 + 4.0\%) = 0.962$, 将算法迭代 16 次得到的恢复结果与 λ 的乘积作为对半能量面积的估计.

从图 2 还可以发现当迭代次数为 134 左右时, 相对误差可以减小为零, 但出现此现象的原因是随着迭代次数的增加, 噪声等不重要的高亮度细节将被放大, 恢复图像的焦斑面积随之不断减小, 而最终达到在数值上与真实值相等. 因为这样的数值交点的位置会随系统点扩散函数和信噪比的变化而变化, 且当迭代次数为 100 以上时, 噪声已经被很大程度地放大, 恢复图像与真实图像的差距相对较大, 故我们不将迭代次数 134 作为合理的迭代次数.

图 3(a)(b)(c) 为当 a 取 30 时对高斯焦斑模型的恢复图示. 选取的模拟针孔图像的信噪比为 10, 恢复算法的迭代次数为 16, 恢复图像对于半能量面积的估计误差为 -2.17% .

为了进一步理解算法的恢复效果, 我们又选取了灰度阶跃模型进行模拟恢复, 其灰度分布如图 4(a) 所示, 图中大圆半径为 $30\mu\text{m}$, 三个小圆半径均为

$10\mu\text{m}$ 模拟针孔直径为 $20\mu\text{m}$, 针孔图像信噪比 $\text{SNR} = 10$, 算法的迭代次数为 16.



图 3 模拟针孔图像的恢复($a = 30$ 的高斯焦斑模型) (a)模拟光源 (b)添加噪声后的模拟针孔图像($\text{SNR} = 10$) (c)恢复后的针孔图像

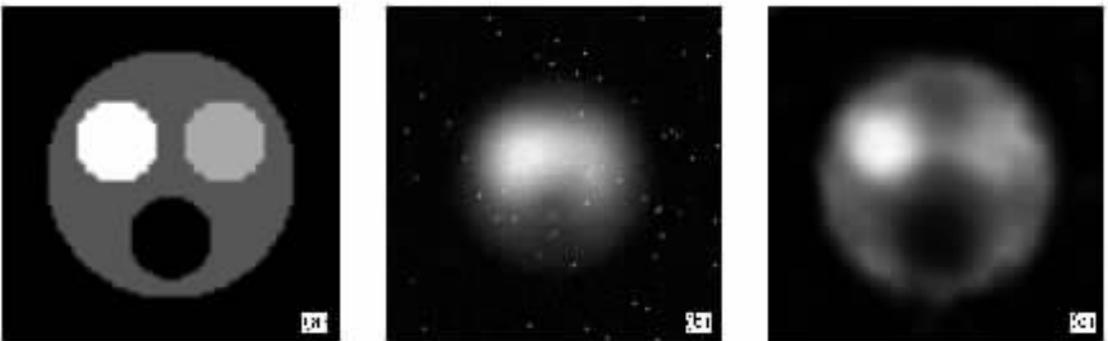


图 4 模拟针孔图像的恢复(灰度阶跃模型) (a)模拟光源 (b)添加噪声后的模拟针孔像($\text{SNR} = 10$) (c)恢复后的针孔图像

由恢复结果可以看出 Lucy-Richardson 算法可以比较理想地恢复出针孔图像. 但恢复使图像中原本灰度突变的边缘变为了缓变的灰度分布.

为了估计 Lucy-Richardson 算法恢复图像的分辨率, 我们在如图 5 (a)所示的 $a = 40$ 的高斯焦斑模型

上叠加了五条暗线, 横向三条线的宽度从上至下依次为 $5\mu\text{m}$ $3\mu\text{m}$ $1\mu\text{m}$, 纵向两条线的宽度从左至右分别为 $4\mu\text{m}$ $2\mu\text{m}$, 针孔图像信噪比 $\text{SNR} = 10$, 模拟针孔直径为 $20\mu\text{m}$, 算法迭代次数为 16. 恢复的效果如图 5 (c)所示.



图 5 模拟针孔图像的恢复(叠加暗线的高斯模型) (a)模拟光源 (b)添加噪声后的模拟针孔像($\text{SNR} = 10$) (c)恢复后的针孔图像

由恢复结果来看, 宽度为 $5\mu\text{m}$ 和 $4\mu\text{m}$ 的暗线经恢复后可以分辨, 宽度为 $3\mu\text{m}$ 的暗线的分辨已经比较

勉强, 而宽度为 $2\mu\text{m}$ 和 $1\mu\text{m}$ 的暗线基本已经不能被辨认出来. 因而对于此类模型, 采用 Lucy-Richardson

算法进行恢复所得图像的分辨率约为 $3\mu\text{m}$.

在针孔图像的恢复中,限制分辨率的主要因素有 3 点:1)有限大小的 CCD 像元,CCD 像元的大小限制着图像的取样间隔,越高的分辨率需要越细密的 CCD 像元.2)光子散射造成的噪声和 CCD 的读入噪声及其他各种噪声,小口径的针孔尤其会加大光子的散射概率,降低图像的信噪比.3)对点扩散函数的估计误差,对点扩散函数矩阵的计算依赖于对系统各参数(针孔形状、针孔厚度、放大率、入射光波长等)的准确了解,但这些参数不可能很准确地被测量,尤其考虑到入射的 X 射线为一段连续谱,且其中各波段所占权重很难知道,故对点扩散函数的计算必定存在着一定程度的误差.

3.3. 对真实针孔相片的恢复

我们采用此算法对如图 6(a)所示的激光聚焦在尖劈靶上的焦斑针孔图像进行了恢复.实验是在中科院物理所 20TW 钛宝石激光器(XL-II)上进行

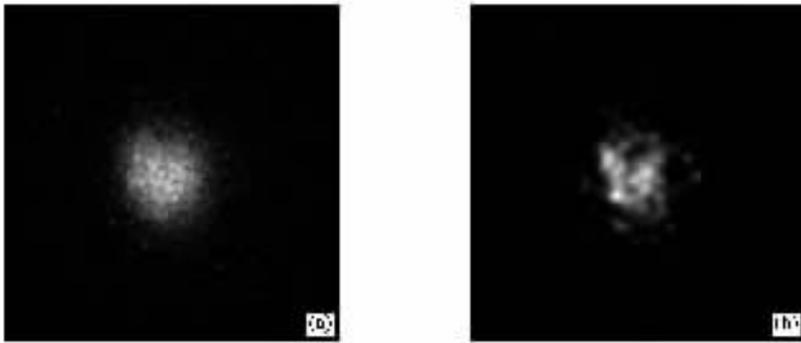


图 6 真实针孔图像的恢复 (a)尖劈靶焦斑的针孔图像 (b)恢复后的针孔图像

4. 算法可靠性验证实验

为了验证算法的可靠性,我们做了 X 射线针孔成像的模拟实验,具体的做法是用氩氖激光器输出的红光来模拟 X 射线,将聚焦后激光入射到一个布屏上,布屏的位置稍稍偏离激光焦点,使激光在靶面上形成的焦斑尺寸约为毫米量级.

实验中我们首先用凸透镜将焦斑放大成像,将 CCD 测得的焦斑放大图像(如图 7(d)所示)的半能量面积除以透镜放大率(像距与物距的比值)的平方,得到焦斑的半能量面积为 $3.12 \times 10^5 \mu\text{m}^2$,相当于半径为 $315.1\mu\text{m}$ 的圆的面积.

然后我们模拟真实 X 射线针孔成像过程,将透

镜移走,在焦斑与探测器之间放置有一个半径为 1.51mm 的圆孔的黑屏.这样用光屏的圆孔代替针孔相机的针孔,用红光代替 X 射线,用较大的焦斑代替微小的焦斑,即相当于将真实 X 射线针孔成像过程中的波长、针孔口径、焦斑大小的参数都放大了 3 个量级.实验中,焦斑到光屏的距离为 57cm ,光屏到探测器的距离为 76cm ,这样的距离也满足 Fresnel 近场衍射条件.焦斑通过针孔相机在 CCD 上所成的像如图 7(b)所示,恢复后的焦斑图像如图 7(c)所示,其半能量面积为 $3.24 \times 10^5 \mu\text{m}^2$,相当于半径为 $321.1\mu\text{m}$ 的圆的面积,半能量面积与用透镜测得的数值的相对误差为 3.85% .这样的误差已经达到了我们的要求,从而说明了用 Lucy-Richardson 算法可以很好地应用于恢复 X 射线针孔图像.另外考虑到

激光的中心波长为 800nm ,脉宽为 30fs ,最大输出能量为 640mJ ,工作频率为 10Hz .实验针孔相机位于靶面法线上方 45° 的位置,P 偏振的激光脉冲由 $f/3.6$ 的离轴抛物反射镜聚焦到靶面上,激光轴与靶面法线之间的夹角为 22° .针孔相机各参数为针孔直径 $20\mu\text{m}$,放大率 $M = 15$,CCD 的像素尺寸 $20\mu\text{m}$,故数据采样间隔取为 $20\mu\text{m}$,即对 $\tilde{h}(x,y)$ 的采样间隔取为 $20\mu\text{m}$.但既然我们在已经可以比较准确地计算出 $\tilde{h}(x,y)$,为了充分利用先验知识,假设光源的光强分布在大约 $20/M \approx 1.33\mu\text{m}$ 的尺度范围内不会产生突变或大的起伏,则可以将原 CCD 图像用双二次插值法放大 1 倍.这样,相当于将 CCD 像元尺寸伪缩小到了 $10\mu\text{m}$,即将采样间隔缩小到了 $10\mu\text{m}$,使得点扩散函数矩阵 $\tilde{h}(i,j)$ 更接近真实值.迭代次数取 16 时,恢复的针孔图像如图 6(b),计算得其半能量等高线所包围的面积为 $609.40\mu\text{m}^2$,相当于一个半径为 $13.9\mu\text{m}$ 的圆的面积,与理论值符合得较好.

算法在所恢复的激光焦斑面积小于圆孔面积的情况下,可以对圆孔图像进行良好的恢复,这样在以后的 X 射线焦斑针孔成像的测量中,我们就可以不必采

用直径 $10\mu\text{m}$ 的小针孔,而采用直径 $20\mu\text{m}$ 的大针孔或者更大口径的针孔.这样的做法不仅不会影响图像的恢复效果,还可以增加通光量,提高针孔图像的

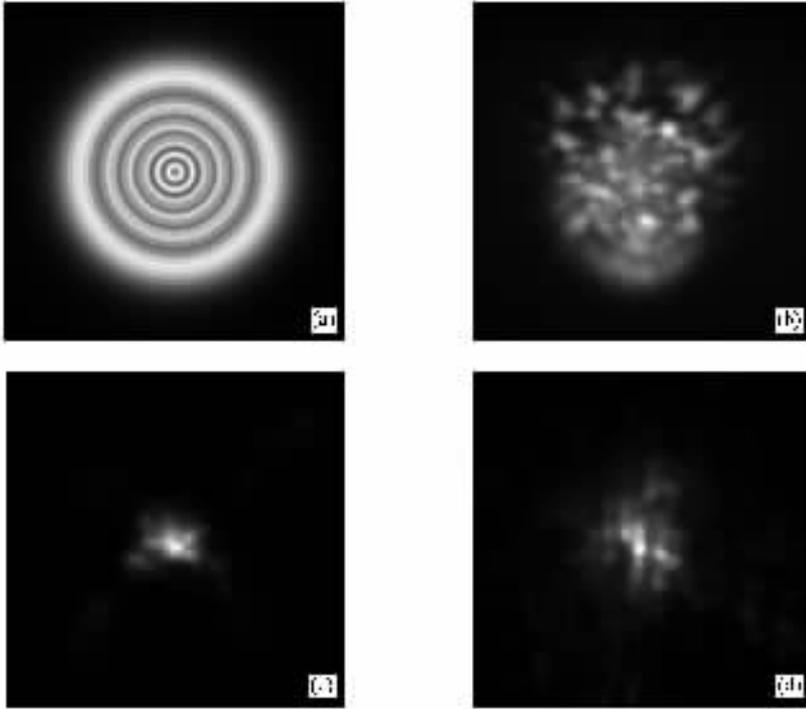


图 7 验证实验的圆孔成像恢复 (a)验证系统的点扩散函数矩阵 (b)焦斑通过圆孔所成的图像 (c)恢复后的圆孔图像 (d)透镜成像图像

信噪比,从而有利于后期的恢复工作.

5. 结 论

本文在已经知道 X 射线针孔成像系统参数情况下,计算出系统点扩散函数矩阵.讨论了 Lucy-

Richardson 算法应用于针孔成像恢复的方法,并对模拟和真实的针孔图像进行了恢复,得到了理想的恢复结果,且进一步用模拟实验验证了算法的可靠性.本文所采用的数值模拟计算程序,可用于对 X 射线针孔图像的恢复工作,这对于确定激光在靶面的功率密度是非常重要的^[11].

- [1] Wang W , Zhang J , Senecha V K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 590 (in Chinese) [王 薇、张 杰、Senecha V K 2002 物理学报 **51** 590]
- [2] Wang W , Zhang J , Dong Q L , Senecha V K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 967 (in Chinese) [王 薇、张 杰、董全力、Senecha V K 2004 物理学报 **53** 967]
- [3] Wang X F , Pachtman A , Xu Z Z , Chen S S , Li Y L , Qian A D 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 922 (in Chinese) [王晓方、Pachtman A、徐至展、陈时胜、李跃林、钱爱娣 1990 物理学报 **39** 922]
- [4] Lucy L B 1974 *Astron. J.* **79** 745
- [5] Richardson W H 1972 *J. Opt. Soc. Am.* **62** 55
- [6] Gindi G R , Paxman R G , Barrett H H 1984 *Appl. Optics* **23** 851

- [7] Shepp L A , Vardi Y 1982 *IEEE Trans. Med. Imaging* , **MI** - 1 113
- [8] Goodman J W 1996 *Introduction to Fourier Optics* (New York : McGraw-Hill) p71 - 72
- [9] Trester S 1999 *Computing in Science and Engineering* **1** 77
- [10] Biemond J , Lagendijk R L , Mersereau R M 1990 *Proc. of the IEEE* **78** 856
- [11] Li Y Y , Zhang J , Lu X , Jin Z , Pepler D A , Danson C D 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2030 (in Chinese) [李玉同、张 杰、鲁欣、金 展、Pepler D A、Danson C N 2005 物理学报 **54** 2030]

Restoration of pinhole images using Lucy-Richardson algorithm^{*}

Kong Xiang-Long¹⁾²⁾ Li Yu-Tong¹⁾ Yuan Xiao-Hui¹⁾³⁾ Yu Quan-Zhi¹⁾ Zheng Zhi-Yuan¹⁾

Liang Wen-Xi¹⁾ Wang Zhao-Hua¹⁾ Wei Zhi-Yi¹⁾ Zhang Jie¹⁾

1) *Laboratory of Optical Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

2) *Department of Special Class of Gifted Youth, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*

3) *State Key Laboratory of Transient Optics Technology, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710068, China*

(Received 11 June 2005 ; revised manuscript received 21 July 2005)

Abstract

The matrix of the point spread function for an X-ray pinhole camera system has been calculated. The computer-simulated pinhole images and real pinhole images measured in laser-plasma experiments have been restored using Lucy-Richardson algorithm. The number of iterations the resolution of the restored imaging and the details of the restore method have been discussed. The reliability of the restoration algorithm is also verified by a simulated optical experiment.

Keywords : pinhole imaging , point spread function , Lucy-Richardson algorithm

PACC : 5250J , 5225

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10374115 ,10374116 ,10335020 , 10105014 and 10390160), the National High-Tech ICF Program , and National Key Laboratory of High Temperature and High Density Plasma.