第 55 卷 第 6 期 2006 年 6 月
1000-3290/2006/55(06)/2676-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.6,June,2006
©2006 Chin.Phys.Soc.

多项式角动量代数的代数表示及实现

吴 楚†
(清华大学物理系,北京 100084)

(2005 年 12 月 29 日收到;2006 年 3 月 29 日收到修改稿)

本文利用三参数李群求代数表示的方法求出多项式角动量代数的代数表示及其酉表示,找到一个能同时承载李代数及相对应的多项式角动量代数的基底,并在该基底下求出两种代数之间的联系,利用该联系则也可求出多项式角动量代数的代数表示.最后求出多项式角动量代数的单玻色实现及其在有限维多项式函数空间的微分实现.

关键词:多项式角动量代数,Higgs 代数,su(2)代数
PACC:0365

1.引 言

李代数在物理中有着广泛的应用[1,2],而作为李代数的一种变形多项式角动量代数现在比较受到关注[3].自从 Higgs[4] 在研究球形映射空间中的开普勒势问题和各向同性的谐振子中发现了 Higgs 代数的问题以来,很多人对此进行了研究[5—8],如用求李代数的微分实现的方法来推导它的各种实现[9—12].Higgs[4] 指出在 N 维球形空间中把在中心势场中的自由粒子的轨迹投影到它的切空间上,在这种投影下粒子的空间对称性被保留,而其位移不再保持均匀性.由此本文首先利用三参数李群求代数表示的方法求出多项式角动量代数的代数表示及其酉表示,之后利用三参数李群的一个特殊基底(对角化 L_{12})使它能同时承载这两个不同的代数,那么可以得到李代数跟与其相对应的多项式角动量代数之间的联系.更一般地说对于可解李群存在一个表示空间(slice space),使得其左不变向量场在某个方向上为常数,即 $A_{\alpha_j}(x)=\alpha_j$,由李代数生成元的定义:$I_j=-\mathrm{i}(\partial A_{\alpha_j}(x)/\partial\alpha_j)(\partial\varphi(x)/\partial x)|_{\alpha=0}$,选择 $\varphi(x)=-\mathrm{i}x$,则有 $I_j^3=I_j$,则可知 SU(2)矩阵群生成元泡利矩阵满足 $\sigma^3=\sigma$,而此时多项式角动量代数和李代数拥有共同的 $|jm\rangle$ 基底,由此可用李代数来研究多项式角动量代数.本文的结构如下:首先用两种方法求解多项式角动量代数的代数表示,一是通过三参数李群求代数表示的方法求出多项式角动量代数的表示及其酉表示;二是在 su(2)和多项式角动量代数的共同 $|jm\rangle$ 基底下,利用两种代数生成元之间的联系来求解多项式角动量代数的表示.而后求出多项式角动量代数的单玻色实现及其在有限维多项式函数空间上的微分实现.

2.多项式角动量代数的代数表示

多项式角动量代数的三个生成元 $\tilde{J}_0,\tilde{J}_\pm$,它们之间满足以下对易关系:

$$
\begin{aligned}
[\tilde{J}_0,\tilde{J}_\pm] &= \pm\tilde{J}_\pm,\\
[\tilde{J}_+,\tilde{J}_-] &= f(\tilde{J}_0),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $f(\tilde{J}_0)=\sum_{i=1}^{n}a_i\tilde{J}_0^i$,$a_i$ 为任意实数,i,n 为自然数.借鉴线性李代数 Gasimir 算符的定义,可以得到多项式角动量代数的 Casimir 算符 $\tilde{C}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{C} &= [\tilde{J}_+\tilde{J}_-+\tilde{J}_-\tilde{J}_++P(\tilde{J}_0)]/2\\
&=\tilde{J}_+\tilde{J}_-+r(\tilde{J}_0-1)\\
&=\tilde{J}_-\tilde{J}_++r(\tilde{J}_0),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

利用 $\tilde{C}$ 跟其他的三个生成元对易,可以得到

$$
P(n)=f(n)u(n)\otimes u(n)+f(n-1)u(n-1)\otimes u(n-1),
$$

† E-mail:wtome99@hotmail.com

$$r(n)=f(n)u(n)\otimes u(n),$$

其中 n 为整数，$\otimes$为离散卷积，$n\geqslant 0$，$u(n)=1$；$n<0$，$u(n)=0$.

取 $\tilde{J}_0$ 和 $\tilde{C}$ 的本征态$|\phi m\rangle$来表征多项式角动量代数，则有

$$\tilde{J}_0|\phi m\rangle = m|\phi m\rangle,\ \tilde{C}|\phi m\rangle=\phi|\phi m\rangle, \tag{3}$$

由(1)式可以得到

$$\begin{aligned}&\langle\phi m|\tilde{J}_+\tilde{J}_-|\phi m\rangle\\&-\langle\phi m+1|\tilde{J}_+\tilde{J}_-|\phi m+1\rangle=f(m),\\&\tilde{J}_0\tilde{J}_\pm|\phi m\rangle=(m\pm1)\tilde{J}_\pm|\phi m\rangle,\end{aligned}\tag{4}$$

令$\langle\phi m|\tilde{J}_+\tilde{J}_-|\phi m\rangle=g(m)$，则有

$$\begin{aligned}g(m-i)=c'&-f(m-i-1)u(m-i-1)\\&\otimes u(m-1-i),\end{aligned}\tag{5}$$

其中 c'为一常数，现在就可以用$|\phi m\rangle$来求多项式角动量代数的代数表示了.

2.1. 有上界的情况

设上界为 $\tilde{m}$，即

$$\langle\phi\tilde{m}+1|\tilde{J}_+|\phi\tilde{m}\rangle\langle\phi\tilde{m}|\tilde{J}_-|\phi\tilde{m}+1\rangle=0,$$

那么可得到

$$\begin{aligned}g(\tilde{m}-i)=&f(\tilde{m})u(\tilde{m})\otimes u(\tilde{m})\\&-f(\tilde{m}-i-1)u(\tilde{m}-i-1)\\&\otimes u(\tilde{m}-1-i),\end{aligned}$$

利用 $f(\tilde{J}_0)=\sum_{k=1}^{n}a_k\tilde{J}_0^k$ 可以将上式化简为

$$\begin{aligned}&g(\tilde{m}-i)\\&=\begin{cases}(1+i)t(a_k,\tilde{m},i), & k=2n,\\(1+i)(-i+2\tilde{m})t_1(a_k,\tilde{m},i), & k=2n+1,\end{cases}\end{aligned}\tag{6}$$

其中 n 为自然数，t 和 t_1 为包含 a_k，$\tilde{m}$，i 的多项式函数，据此当 k 全为奇数时，m 取整数或者半整数；当 k 含有偶数项时，m 只能取整数，而 $\tilde{C}$ 的本征值：

$$\begin{aligned}&\langle\phi\tilde{m}-i|\tilde{C}|\phi\tilde{m}-i\rangle\\&=\langle\phi\tilde{m}-i|[\tilde{J}_+\tilde{J}_-+r(\tilde{J}_0-1)]|\phi\tilde{m}-i\rangle\\&=f(\tilde{m})u(\tilde{m})\otimes u(\tilde{m}).\end{aligned}$$

2.2. 有下界的情况

设下限为 $\underset{\sim}{m}$，即：

$$\langle\phi\underset{\sim}{m}|\tilde{J}_+|\phi\underset{\sim}{m}-1\rangle\langle\phi\underset{\sim}{m}-1|\tilde{J}_-|\phi\underset{\sim}{m}\rangle=0,$$

则通过上式可知：

$$\begin{aligned}g(\underset{\sim}{m}+i)=&f(\underset{\sim}{m}-1)u(\underset{\sim}{m}-1)\otimes u(\underset{\sim}{m}-1)\\&-f(\underset{\sim}{m}+i-1)u(\underset{\sim}{m}+i-1)\\&\otimes u(\underset{\sim}{m}+i-1),\end{aligned}$$

同样 $f(\tilde{J}_0)$代入可以将上式化简为

$$\begin{aligned}&g(\underset{\sim}{m}+i)\\&=\begin{cases}it'(a_k,\underset{\sim}{m},i), & k=2n,\\i(-1+i+2\underset{\sim}{m})t_1'(a_k,\underset{\sim}{m},i), & k=2n+1,\end{cases}\end{aligned}\tag{7}$$

其中 n 为自然数，t'和 t_1' 也为包含 a_k，$\underset{\sim}{m}$，i 的多项式函数，同 2.1 当 k 全为奇数时，m 取整数或者半整数；当 k 含有偶数项时，m 只能取整数，而 $\tilde{C}$ 为本征值

$$\begin{aligned}&\langle\phi\underset{\sim}{m}-i|\tilde{C}|\phi\underset{\sim}{m}-i\rangle\\&=f(\underset{\sim}{m}-1)u(\underset{\sim}{m}-1)\otimes u(\underset{\sim}{m}-1).\end{aligned}$$

2.3. 上下都有界的情况

设上限为 $\tilde{m}$，下限为 $\underset{\sim}{m}$，则有

$$\langle\phi\tilde{m}+1|\tilde{J}_+|\phi\tilde{m}\rangle\langle\phi\tilde{m}|\tilde{J}_-|\phi\tilde{m}+1\rangle=0,$$
$$\langle\phi\underset{\sim}{m}|\tilde{J}_+|\phi\underset{\sim}{m}-1\rangle\langle\phi\underset{\sim}{m}-1|\tilde{J}_-|\phi\underset{\sim}{m}\rangle=0,$$

解上两式可以得到

$$\begin{aligned}g(\underset{\sim}{m}+i)=&f(\underset{\sim}{m}-1)u(\underset{\sim}{m}-1)\otimes u(\underset{\sim}{m}-1)\\&-f(\underset{\sim}{m}+i-1)u(\underset{\sim}{m}+i-1)\\&\otimes u(\underset{\sim}{m}+i-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\phi m|\tilde{C}|\phi m\rangle=&f(\underset{\sim}{m}-1)u(\underset{\sim}{m}-1)\\&\otimes u(\underset{\sim}{m}-1)\\&=f(\underset{\sim}{m})u(\underset{\sim}{m})\otimes u(\underset{\sim}{m}),\\-\underset{\sim}{m}=\tilde{m}&\end{aligned}\tag{8}$$

上述表示为多项式角动量代数的有限维不可约表示，此时若上式有解，则 k 只能为奇数.

2.4. 上下都无界的情况

这种情况跟线性的线性李代数一致，可设 $m=m_0+i$，其中 i 为整数，此时该表示同 2.1 和 2.2 为无限维不可约表示.

3. 多项式角动量代数的酉表示

先讨论系数全部同号的情况，即 $f(\tilde{J}_0)=$

$q\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{J}_a^k$, $a_k > 0$, $q = \pm 1$. 显然 $g(m)$ 在 $[0, +\infty)$ 为单调函数,$q = -1$ 为单调增,反之为单调减,而在 $(-\infty, 0]$ 分为 3 种情况:(1) k 全为奇数,$q = -1$ 则 $g(m)$ 为单调减,$q = 1$ 则为单调增;(2) 全为偶数时,$g(m)$ 的单调性与 a 时正好相反;(3) 既有偶数也有奇数,$g(m)$ 不为单调函数. 取 m, ϕ 为实数有

$$\tilde{J}_0^+ = \tilde{J}_0,\ \tilde{J}_\pm^+ = \tilde{J}_\mp,\ \tilde{C}^+ = \tilde{C},$$

$$\{\langle \phi m+1 | \tilde{J}_- | \phi m\rangle\}^* \langle \phi m+1 | \tilde{J}_- | \phi m\rangle$$
$$= \langle \phi m | \tilde{J}_+ \tilde{J}_- | \phi m\rangle,$$

可以得到酉表示的充要条件

$$\langle \phi m | \tilde{J}_- \tilde{J}_+ | \phi m\rangle = g(m+) \geqslant 0.$$

3.1. 对于有上界的情况

$$g(\tilde{m} - i) = f(\tilde{m}) u(\tilde{m}) \otimes u(\tilde{m}) - f(\tilde{m} - i - 1) u(\tilde{m} - i - 1) \otimes u(\tilde{m} - 1 - i),$$

对于 $\exists\, \tilde{m}$, $\forall\, \tilde{m} \leqslant 0$, 当 $g(m) \geqslant 0$ 成立,有 $q = -1$ 时情况(1)符合;$q = 1$ 时情况(2)符合.

3.2. 对于有下界的情况

$$g(\underset{\sim}{m} + i) = f(\underset{\sim}{m} - 1) u(\underset{\sim}{m} - 1) \otimes u(\underset{\sim}{m} - 1) - f(\underset{\sim}{m} + i - 1) u(\underset{\sim}{m} + i - 1) \otimes u(\underset{\sim}{m} + i - 1),$$

同理对 $\exists\, \underset{\sim}{m}$, $\forall\, \underset{\sim}{m} \geqslant 0$, 当 $g(m) \geqslant 0$ 成立时,有 $q = -1$, 情况(1)~(3)都符合.

3.3. 对于上下有界的情况

$$g(\underset{\sim}{m} + i) = f(\underset{\sim}{m} - 1) u(\underset{\sim}{m} - 1) \otimes u(\underset{\sim}{m} - 1) - f(\underset{\sim}{m} + i - 1) u(\underset{\sim}{m} + i - 1) \otimes u(\underset{\sim}{m} + i - 1) \geqslant 0,$$

$$g(\tilde{m} - i) = f(\tilde{m}) u(\tilde{m}) \otimes u(\tilde{m}) - f(\tilde{m} - i - 1) u(\tilde{m} - i - 1) \otimes u(\tilde{m} - i - 1) \geqslant 0,$$

当 $\forall\, m = \pm \frac{i}{2}$, $i \in n \& m \in [\underset{\sim}{m}, \tilde{m}]$ 时,当 $g(m) \geqslant 0$ 成立时只有当 $q = 1$ 且情况(1)符合.

3.4. 对于无界的情况

$$\langle \phi m | \tilde{C} | \phi m\rangle = \langle \phi m | \tilde{J}_+ \tilde{J}_- + r(\tilde{J}_0 - 1) | \phi m\rangle = \phi,$$

可以得到

$$\langle \phi m | \tilde{J}_+ \tilde{J}_- | \phi m\rangle = \phi - f(m-1) u(m-1) \otimes u(m-1) \geqslant 0,$$

只有当 $q = -1$ 且情况(1)时存在酉表示,利用上述结论来讨论系数不完全同号的情况.

已知 $f(\tilde{J}_0) = \frac{k}{2} a_k \tilde{J}_0^k$, 设 $f^+(\tilde{J}_0) = \sum_{k=1}^{n} b_k^+ \tilde{J}_0^k$ 和 $f^-(\tilde{J}_0) = \sum_{k=1}^{n} b_i^- \tilde{J}_0^k$, 其系数定义为:当 $a_k > 0$, $b_k^+ = a_k$, $b_k^- = 0$;当 $a_k < 0$, $b_k^+ = 0$, $b_k^- = a_k$, 则

$$[\tilde{J}_0, \tilde{J}_\pm^+] = \pm \tilde{J}_\pm^+,$$
$$[\tilde{J}_+^+, \tilde{J}_-^+] = f^+(\tilde{J}_0),$$
$$\tilde{J}_0^+ = \tilde{J}_0,$$
$$[\tilde{J}_0, \tilde{J}_\pm^-] = \pm \tilde{J}_\pm^-,$$
$$[\tilde{J}_+^-, \tilde{J}_-^-] = f^-(\tilde{J}_0),$$
$$(\tilde{J}_\pm^\pm)^+ = \tilde{J}_\mp^\pm,$$
$$f^+(\tilde{J}_0) + f^-(\tilde{J}_0) = f(\tilde{J}_0), \tag{10}$$

则利用复代数的性质,有

$$[\mathrm{i}\tilde{J}_+^+ - \tilde{J}_-^-, \mathrm{i}\tilde{J}_-^+ + \tilde{J}_+^-] = -f^+(\tilde{J}_0) - f^-(\tilde{J}_0) + \mathrm{i}[\tilde{J}_+^+, \tilde{J}_+^-] - \mathrm{i}[\tilde{J}_-^- \tilde{J}_-^+],$$
$$[\tilde{J}_+^+, \tilde{J}_+^-] - [\tilde{J}_-^-, \tilde{J}_-^+] = 0,$$
$$J'_+ = \tilde{J}_+^+ + \mathrm{i}\tilde{J}_-^-,$$
$$J'_- = \tilde{J}_-^+ - \mathrm{i}\tilde{J}_+^-,$$
$$[J'_+, J'_-] = f^+(\tilde{J}_0) - f^-(\tilde{J}_0),$$

显然 $J'^+_\pm = J'_\mp$, 则 J'_+, J'_- 对应的代数生成元为厄米. 当 $\tilde{J}_+^+$ 和 $\mathrm{i}\tilde{J}_-^-$ 拥有相同的酉表示时,则该表示也是 $J'_\pm$ 的酉表示,可以推知当 k 为偶数时为正,k 为奇数时为负,则有上界的酉表示. 如果取

$$J'_+ = \tilde{J}_+^+ + \tilde{J}_-^-,$$
$$J'_- = \tilde{J}_-^+ - \tilde{J}_+^-,$$
$$[J'_+, J'_-] = f^+(\tilde{J}_0) + f^-(\tilde{J}_0),$$

显然 $J'^+_\pm \neq \pm J'_\mp$, 此时多项式角动量代数的生成元既不是厄米也不是反厄米的,那么除恒等表示外,其无酉表示.

4. 求 su(2) 代数与其相对应的多项式角动量代数之间的联系

为了便于讨论,根据 su(2) 的代数结构:

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm,$$
$$[J_+, J_-] = J_0,$$

$$C=J_-J_++J_0(J_0+1).$$

根据李群生成元的定义：$I_j=-\mathrm{i}(\partial A_{\alpha_j}(x)/\partial\alpha_j)(\partial\varphi(x)/\partial x)|_{\alpha=0}$，如果 $A_{\alpha_j}(x)=\alpha_j$ 并且 $\varphi(x)=-\mathrm{i}x$ 时，可以得到 $I_j^3=I_j$，同样在 SU(2)的矩阵表示中有

$$D(R)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R},$$

$$J_0=-\mathrm{i}\frac{\partial D(R)}{\partial r_0}=-\mathrm{i}\frac{\partial^3D(R)}{\partial^3r_0}=J_0^3.\quad(11)$$

SU(2)矩阵群的生成元泡利矩阵满足 $\sigma_i^3=\sigma_i$，那么显然对于 SU(2)来说它的生成元满足 su(2)代数同时也满足多项式角动量代数的对易关系(差一个系数)，那么作为 SU(2)的本征态 $|\phi m\rangle$ 也是多项式角动量代数的本征态 $|\phi m\rangle$，由此将 Dutt[3] 的方法推广来求出李代数与多项式角动量代数的联系.设

$$\tilde J_0=J_0,$$
$$\tilde J_+=J_+a(J_0,C),$$
$$\tilde J_-=B(J_0,C)J_-,\quad(12)$$

则由 $[\tilde J_+,\tilde J_-]=f(J_0)$ 可以得到

$$A(J_0,C)B(J_0,C)(C-J_0(J_0+1))$$
$$=\tilde C-r(J_0).\quad(13)$$

当 $\langle\phi_0m_0|(C-J_0(J_0+1))|\phi_0m_0\rangle=0$ 时，$\langle\phi_0m_0|(\tilde C-r(J_0))|\phi_0m_0\rangle$ 是其在零点处的同阶或者高阶无穷小，则有

$$A(J_0,C)B(J_0,C)=\frac{\tilde C-r(J_0)}{-J_0(J_0+1)+C},\quad(14)$$

取 $A(J_0,C)=B(J_0,C)$，即

$$\tilde J_+=J_+\sqrt{\frac{\tilde C-r(J_0)}{-J_0(J_0+1)+C}},$$

$$\tilde J_-=J_-\sqrt{\frac{\tilde C-r(J_0)}{-J_0(J_0+1)+C}},\quad(15)$$

通过上式可以直接求解其代数的表示，则有上下界时，可以得到

$$\tilde J_\pm|jm\rangle=\sqrt{t_\pm(j,m)}\,|jm\pm1\rangle,$$

$$\langle jm|\tilde C|jm\rangle-\tilde C(j),$$

其中 $t_\pm(j,m)=\tilde C(j)-r(m-0.5\pm0.5)$.

有上界时：

$$\langle\tilde mm|\tilde C|\tilde mm\rangle=\tilde C(\tilde m),$$

$$J_\pm|\tilde mm\rangle=\sqrt{t_\pm(\tilde m,m)}\,|\tilde mm\pm1\rangle;$$

有下界时

$$\langle\tilde mm|\tilde C|m\underset{\sim}{m}\rangle=\tilde C(\underset{\sim}{m}),$$

$$J_\pm|\tilde mm\rangle=\sqrt{t_\pm(\underset{\sim}{m},m)}\,|\underset{\sim}{m}m\pm1\rangle,$$

显然与前面的讨论 $g(\underset{\sim}{m})$ 结果一致.

5. 多项式角动量代数的实现

利用玻色子来求多项式角动量代数的实现，已知

$$N=a^+a,$$
$$[N,a^+]=a^+,$$
$$[N,a]=-a,$$
$$[a,a^+]=1,\quad(16)$$

则设

$$\tilde J_+=a^+F(N)=F(N-1)a^+,$$
$$\tilde J_-=G(N)a=aG(N-1),$$
$$\tilde J_0=N,$$

其中 F 和 G 为 N 的函数，可以得到

$$F(N-1)G(N-1)N-G(N)F(N)(1+N)=f(N),$$

$$G(N)F(N)(N+1)=\tilde C-r(N),\quad(17)$$

其中 $\tilde C$ 取变形李代数的 Casimir 算符，则 $\tilde C=r(j)$.取 $G(N)=F(N)$，有

$$\tilde J_+=\sqrt{(\tilde C-r(N-1))/N}\,a^+,$$

$$\tilde J_-=a\sqrt{(\tilde C-r(N-1))/N},$$

则多项式角动量代数的单玻色子实现为

$$\tilde J_+|jm\rangle=a^+\sqrt{(\tilde C-r(N))/N}\,|jm+1\rangle$$

$$=\sqrt{r(j)-r(m)}\,|jm+1\rangle,$$

$$\tilde J_-|jm\rangle=\sqrt{r(j)-r(m-1)}\,|jm-1\rangle,$$

$$\tilde J_0|jm\rangle=m|jm\rangle,\quad(18)$$

而对于角动量算符的双玻色子来实现，有

$$J_+=a_1^+a_2/\sqrt2,$$

$$J_-=a_2^+a_1/\sqrt2,$$

$$J_0=(a_1^+a_1-a_2^+a_2)/2,\quad(19)$$

则将其微分实现代入可得

$$J_+=\frac{y}{\sqrt2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

$$J_-=\frac{x}{\sqrt2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y},$$

$$J_0=\frac12\left(y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right),$$

在$(x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2 \cdots x^{n-k}y^k \cdots y^n)$空间中令$j = n/2, m = k - j$,由(15)式可得

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}_+ \mid jm\rangle &= J_+ A(J_3, c) \mid jm\rangle \\
&= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \\
&\quad \times A(m, j(j+1)) \mid jm+1\rangle, \\
\tilde{J}_- \mid jm\rangle &= A(J_3, c) J_- \mid jm\rangle \\
&= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \\
&\quad \times A(m-1, j(j+1)) \mid jm-1\rangle,
\end{aligned}
$$

令$\xi = y/x$, $R:(x^n y^0, x^{n-1}y^1, \cdots x^{n-k}y^k, \cdots x^0 y^n) = (x^0\xi^0, x^n\xi^1, \cdots x^n\xi^k, \cdots x^n\xi^n)$,则有 $T_+:R = J_+:(x^n\xi^0, \cdots x^n\xi^k, \cdots x^n\xi^n) = \left(\frac{n\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\xi^2 \mathrm{d}}{\sqrt{2}\mathrm{d}\xi}\right):(x^n\xi^0, \cdots x^n\xi^k, \cdots x^n\xi^n)$,那么可得

$$
\begin{aligned}
T^+ &= \frac{n\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\xi^2 \mathrm{d}}{\sqrt{2}\mathrm{d}\xi}, \\
T^- &= \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{2}\mathrm{d}\xi}, \\
T^0 &= -\frac{n}{2} + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},
\end{aligned}
$$

则与之相对应的多项式角动量代数的生成元为

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}^+ &= \left(\frac{n\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\xi^2 \mathrm{d}}{\sqrt{2}\mathrm{d}\xi}\right) A\left(\frac{n}{2}, k - \frac{n}{2}\right), \\
\tilde{T}^- &= A\left(\frac{n}{2}, k - 1 - \frac{n}{2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{2}\mathrm{d}\xi}, \\
\tilde{J}_0 &= -\frac{1}{2}n + \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

6. 结　论

在‘slice space’空间下,利用三参数李群求代数表示的方法求出多项式角动量代数的代数表示及其酉表示,由此可以直接求出投影在球形切空间下的中心势场中的自由粒子和各向同性谐振子的能谱.之后找到能同时承载两种代数的基底,在该基底下推出两种代数之间的联系(15)式,并由此也可求出多项式角动量代数的代数表示.最后求出了多项式角动量代数的单玻色子实现(18)式和其在有限多项式函数空间上的微分实现(20)式.

[1] Wang X Y, Ding S L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 423(in Chinese)[王晓艳、丁世良 2004 物理学报 **53** 423]

[2] Wang Z Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 690 (in Chinese)[汪仲清 2001 物理学报 **50** 690]

[3] Dutt R, Gangoapadhyaya A, Rsdinaius C, Sukhatme 1999 help-th/9904052

[4] Higgs Peter W 1979 *J Phys* A **12** 309

[5] Beckers J, Brihaye Y, Debergh N 1999 *J Phys* A **32** 2791;
Beckers J, Brihaye Y, Debergh N 1999 *Mod Phys Lett* A **14** 1149

[6] Turbiner A V 1988 *Comm Math Phys.* **118** 467

[7] Junker G, Roy P 1997 *Phys. Lett.* A **232** 155

[8] Beckers Jules 2000 *Proceedings of institue of Mathematics of NAS of Ukraine* 30 Part 2 275 – 279

[9] Barut A O, Bornzin G L 1971 *J. Math. Phys.* **12** 841;
Barut A O, Beker H, Bracken A J 1984 *Proc. XIIIth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, ed Zachary W W, (Singapore World Scientific) p.269

[10] Filho H B, Vaidya A N 1990 *Phys. Lett.* A **145** 69

[11] Fradkin D M 1994 *J. Phys.* A **27** 1261

[12] Debergh N B, Van den Bossche 2003 *Anna. Phys.* **308** 605

Algebraic representations of polynomial angular momentum algebra and Its realizations

Wu Chu†

(*Department of physics*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)

(Received 29 December 2005; revised manuscript received 29 March 2006)

Abstract

At first the representations of polynomial angular momentum algebra and its unitary ones are obtained appling the way to get the three-parameter Lie algebra representations. Then find the basis which can be acted on by both Lie algebra and the polynomial angular momentum algebra simultaneity, so under such basis the representations of deformed algebras can be shown by introducing the relation of two algebra. At last the deformed algebra's single boson operator realization and one differential realization under finite-dimensional spaces are deduced.

Keywords: polynomial angular momentum algebra, Higgs algebra, su(2) algebra

PACC: 0365

† E-mail: wtome99@hotmail.com