第 55 卷 第 6 期 2006 年 6 月
1000-3290/2006/55(06)/2825-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.6, June, 2006

适用于中等耦合等离子体的碰撞算子*

查学军[1)†] 韩申生[1)] 徐至展[1)] 王 燕[2)]

1)(中国科学院上海光学精密机械研究所,强场激光物理国家重点实验室,上海 201800)

2)(上海大学物理系,上海 200444)

(2005 年 10 月 10 日收到;2005 年 11 月 30 日收到修改稿)

完全电离等离子体中,当试探粒子分布函数 f_α 是关于试探粒子速度 v_α 的偶函数时,导出了一个新的动力学方程的碰撞算子.该碰撞算子同时包括了大角散射(库仑近碰撞)和小角散射(库仑远碰撞)的二体碰撞的贡献,因此,该碰撞算子同时适用于弱耦合(库仑对数 $\ln\Lambda \geqslant 10$)和中等耦合(库仑对数 $2 \leqslant \ln\Lambda \leqslant 10$)等离子体.而且经过修改的碰撞算子和 Rosenbluth 势有直接的联系,当试探粒子和场粒子满足条件 $m_\alpha \ll m_\beta$(如电子-离子碰撞或 Lorentz 气体模型)和 $|v_\alpha| \gg |v_\beta|$ 时,经约化的电子-离子碰撞算子同最初的 Fokker-Planck 算子相比增加了有关 $1/\ln\Lambda$ 的项.

关键词:中等耦合等离子体,小角散射,大角散射,碰撞算子

PACC:5225D,5225L,5240M

1. 引 言

等离子体是一个由大量带电粒子组成的复杂系统,最基本的描述是使用统计方法.通过确定系统中各种带电粒子的分布函数,求解分布函数随时间演化的方程就是等离子体动力论方程.然而,由于动力论方程中包含一个表示粒子碰撞影响的非线性项(碰撞算子),以及该碰撞算子在粒子带电情况下的复杂性,使得列方程和求解方程都是很困难的.当前,已有多种形式的动力论方程被导出,如从各种碰撞模型得到的 Boltzmann 碰撞方程、Fokker-Planck 碰撞方程和 Landau 碰撞方程(具有 Rosenbluth 势的 Fokker-Planck 碰撞算子和 Landau 碰撞算子是完全等价的)等,也发展了一些近似求解方法[1—4].此外,碰撞项也可从刘维尔方程经 BBGKY 途径或克里芒多维奇途径出发,Lenard-Balescu 碰撞项据此导出[5],称为碰撞算子的数学理论.

Boltzmann 方程认为粒子间仅出现二体短程相互作用,所以此方程仅适用于中性稀薄气体或低电离度稀薄等离子体.在等离子体物理中应用的 Fokker-Planck 方程或 Landau 方程,碰撞项的处理是从带电粒子间主要为多体弱相互作用出发,即基于库仑对数 $\ln\Lambda \geqslant 10$ 的假定,它是一个量度小角二体碰撞(远碰撞)相对于大角二体碰撞(近碰撞)重要性的物理量.库仑对数中的 Λ 称作等离子体参数,它近似地等于德拜球中包含的带电粒子个数.在弱耦合等离子体中,它的值是非常巨大的,其对数满足 $\ln\Lambda \geqslant 10$.当 $\ln\Lambda \geqslant 10$ 时,近碰撞的概率是很小的,可忽略,那么在这类等离子体中,带电粒子间的碰撞基本上就是远碰撞.关于远碰撞,依照碰撞参数 b 所在范围又可分成为两种情形:(1) $b_0 < b \leqslant d$——远碰撞,二体小角度散射;(2) $d < b \leqslant \lambda_D$——远碰撞,多体相互作用.这里 b_0 是朗道长度,定义为 $\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{4\pi\varepsilon_0 kT}$,$b_0$ 也是一个电子和静止离子相碰撞后偏转 90°时的碰撞参数;d 是粒子的平均间距;λ_D 是德拜半径.常规的 Fokker-Planck 方程仅仅适用于弱耦合等离子体($\ln\Lambda \geqslant 10$),如在 Tokamak 等离子体和惯性约束聚变中的冕区低密度等离子体得到广泛应用[1—8].然而,还有一类等离子体不属于弱耦合条件,常规的 Fokker-Planck 方程碰撞算子是不适用的[9].它们是极端区的强耦合等离子体($\ln\Lambda \leqslant 1$)[10—12];中间区的中等耦合等离子体($2 \leqslant \ln\Lambda \leqslant 10$)[11, 13—19],如惯性约束聚变实验中靶丸压缩区[16—18]和太阳芯部[19]的等离子体.在近几十年来,

---

* 国家自然科学基金(批准号:10405030,10335020 和 60407007)资助的课题.

† E-mail:xjzha@siom.ac.cn

在等离子体中已经出现了很多改进的碰撞算子[20—23]. 其中,Li 和 Petrasso[20] 通过包含 Fokker-Planck 碰撞项的高阶项,对碰撞算子进行了修改,他们认为经修改的碰撞算子包含了直接和大角散射相联系的一些项,因此处理中等耦合等离子体($\ln\Lambda \geqslant 2$)是比较有效的. 需要指出的是上述的所有修改的碰撞算子不适用于强耦合等离子体($\ln\Lambda \leqslant 1$). 对于强耦合等离子体,多体关联相互作用,试探粒子带电状态的变化和量子效应显著增加,因此,理论处理不能求助于将库仑相互作用作为一个弱扰动而进行通常的展开方案来研究,较好的分析必需基于多体表达[10].

在本文里,当等离子体中试探粒子分布函数 f_α 是关于试探粒子速度 $\boldsymbol{v}_\alpha$ 的偶函数时,我们另辟蹊径,得到了一个包含近碰撞效应的碰撞算子,使它可同时适用于弱耦合和中等耦合等离子体. 因此,该碰撞算子对研究等离子体中的弛豫过程和输运过程是很有意义的.

2. 理论模型和新的碰撞算子的导出

从通常的 Fokker-Planck 碰撞项出发,我们得到的新碰撞项增加了碰撞参数在 $0 < b \leqslant b_0$ 范围内的近碰撞贡献,即散射角 θ 处于 $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 区间的近碰撞,而该区间的近碰撞是 Li 和 Petrasso 的碰撞算子所没有考虑的. 下面我们从带电粒子分布函数 f_α 的时间变化关系满足的动力学方程出发,导出新的碰撞算子. 非平衡态统计物理中的动力论方程为

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{v}_\alpha \cdot \nabla_r f_\alpha + \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}, \quad (1)$$

方程(1)可由刘维方程导出. $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}$ 是碰撞项,包括了所有 α 类粒子可能发生的碰撞贡献,表示试探粒子分布函数 f_α 和场粒子分布函数 f_β 碰撞的时间变化率. 当碰撞项取 Boltzmann 型时,方程(1)称为 Boltzmann 方程;而当这项取 Fokker-Planck 或 Landau 碰撞型时,方程(1)又称为 Fokker-Planck 方程;如果在方程(1)中忽略碰撞项,就得到专门研究等离子体波及其对等离子体行为影响的伏拉索夫方程(适宜于研究高温低密度等离子体中的波和微观不稳定性).

对弱耦合等离子体作小角散射近似,则 Fokker-Planck 碰撞项被表示为[2]

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} \cdot (f_\alpha \langle \Delta \boldsymbol{v}_\alpha \rangle) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha \partial \boldsymbol{v}_\alpha} : (f_\alpha \langle \Delta \boldsymbol{v}_\alpha \Delta \boldsymbol{v}_\alpha \rangle), \quad (2)$$

这里,$\langle \Delta \boldsymbol{v}_\alpha \rangle$ 称为动力学(速度空间)的摩擦系数,表示碰撞使粒子系的平均速度减慢;而 $\langle \Delta \boldsymbol{v}_\alpha \Delta \boldsymbol{v}_\alpha \rangle$ 被称为动力学(速度空间)扩散系数,表示速度分布函数因碰撞而在速度空间弥漫. Fokker-Planck 碰撞项用转变概率 $P(\boldsymbol{v}, \Delta \boldsymbol{v})$ 描述随机过程,其中速度 $\boldsymbol{v}$ 和它的改变量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 都是独立的变量. 由于 $P(\boldsymbol{v}, \Delta \boldsymbol{v})$ 不显含时间,即假定是马尔柯夫过程.

为在碰撞项中包含近碰撞效应,我们把转变概率函数 $P(\boldsymbol{v}_\alpha, \Delta \boldsymbol{v}_\alpha)$ 分成为 $P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_{\alpha s}, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha s})$ 和 $P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_{\alpha l}, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l})$ 两部分,$P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_{\alpha s}, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha s})$ 是常规的小角散射的转变概率,而 $P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_{\alpha l}, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l})$ 是大角散射的转变概率. 其中,$\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}$ 和 $\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha\beta l}$ 的关系被(16)式决定,$\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha\beta l}$ 如图 1 所示. $\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha\beta l}$ 在质心坐标系中是一个描述大角散射的小量. 在图 1 中,θ 是质心系中的散射角,φ 是方位角($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$). 大角散射的转变概率 $P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_{\alpha l}, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l})$ 被定义为

$$P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_\alpha, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l})\,\mathrm{d}(\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}) = v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta l}\,\mathrm{d}\Omega_l f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta, \quad (3)$$

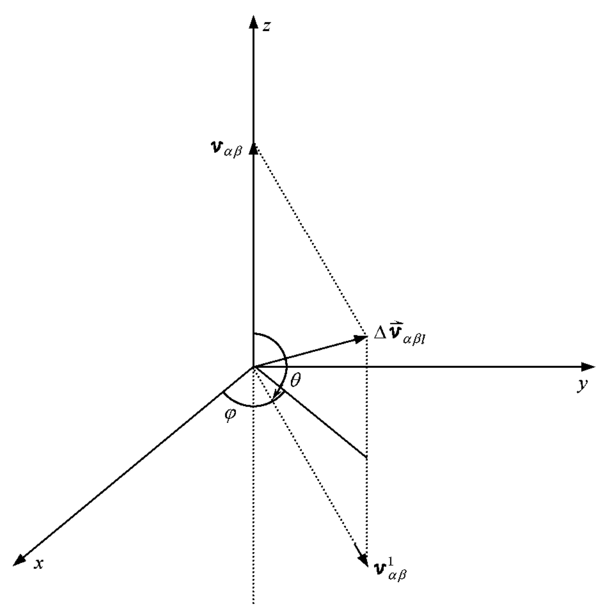

图 1 质心坐标系中大角散射的示意图

这里区别于常规的 $P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_{\alpha s}, \Delta \boldsymbol{v}_{\alpha s})\,\mathrm{d}(\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha s})$ 的定义,$\sigma_{\alpha\beta l}$ 和 $\mathrm{d}\Omega_l$ 分别是大角散射的微分散射截面和立体角,碰撞参数 b 满足条件 $b \leqslant b_0$,在(3)式中,相对速度 $\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}$

$= \boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{v}_\beta$，$\boldsymbol{v}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{v}_\beta$ 分别是试探粒子和场粒子的速度.

在时刻 t，α 类粒子的速度 $\boldsymbol{v}_{\alpha0} = (\boldsymbol{v}_\alpha - \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})$ 满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\alpha0} &= \boldsymbol{v}_\alpha - \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s} = \boldsymbol{v}_\alpha - (\boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{v}_{\alpha0}) \\ &= \boldsymbol{v}_\alpha + \boldsymbol{v}_{\alpha0} - \boldsymbol{v}_\alpha \\ &= \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} - \boldsymbol{v}_\alpha .\end{aligned}$$

因为 $\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} = \boldsymbol{v}_\alpha + \boldsymbol{v}_{\alpha0}$，所以 $f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha - \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s},t) \equiv f_\alpha(\boldsymbol{r},\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} - \boldsymbol{v}_\alpha,t)$ 恒成立. 依据 $P_{\alpha l}$ 和 $P_{\alpha s}$ 的定义，在经过时间 Δt 后，速度是 $\boldsymbol{v}_\alpha$ 的 α 类粒子的分布函数 $f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t+\Delta t)$ 为

$$\begin{aligned}&f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t+\Delta t) \\ &= \int f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha - \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s},t) \\ &\quad \times P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha - \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s},\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}) \\ &\quad + \int f_\alpha(\boldsymbol{r},\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} - \boldsymbol{v}_\alpha,t) \\ &\quad \times P_{\alpha l}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} - \boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}),\end{aligned} \tag{4}$$

这里，对于大角散射有一个 $\Delta v_{\alpha l}$ 是一个小量的基本假定. 为使这个假定合理，质心速度 V 必须是一个小量，也就是 $|\boldsymbol{V}| \sim |\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha\beta l}|$ 或 $|\boldsymbol{V}| < |\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha\beta l}|$ 应该被满足. 这个条件 $(\Delta v_{\alpha l}| \ll 1)$ 在满足 $m_\alpha \ll m_\beta$ 和 $|\boldsymbol{v}_\alpha| \gg |\boldsymbol{v}_\beta|$ 条件的等离子体中是成立的. 在(4)式中第 1 项和第 2 项分别对应于小角散射和大角散射贡献，也就是二体碰撞被分成小角散射 $(\theta_{\min} \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ 和大角散射 $(\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 碰撞. 忽略泰勒展开式的高阶项，(4)式展开为下面的形式：

$$\begin{aligned}&f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t) + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}} \Delta t \\ &= \int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\Big[f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t) P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}) \\ &\quad - \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s} \cdot \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_\alpha}(f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t) P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s} : \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}_\alpha\partial\boldsymbol{v}_\alpha}(f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t) P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}))\Big] \\ &\quad + \int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\Big[f_\alpha(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{v}_\alpha,t) P_{\alpha l}(-\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}) \\ &\quad + \Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} \cdot \frac{\partial}{\partial(-\boldsymbol{v}_\alpha)}(f_\alpha(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{v}_\alpha,t) P_{\alpha l}(-\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l} : \frac{\partial^2}{\partial(-\boldsymbol{v}_\alpha)\partial(-\boldsymbol{v}_\alpha)} \\ &\quad \times (f_\alpha(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{v}_\alpha,t) P_{\alpha l}(-\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}))\Big] .\end{aligned} \tag{5}$$

当分布函数 f_α 是关于速度 $\boldsymbol{v}_\alpha$ 的偶函数时，例如 $f_\alpha = \delta(\boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{u}_\alpha) + \delta(\boldsymbol{v}_\alpha + \boldsymbol{u}_\alpha)$，有等式

$$f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_\alpha,t) = f_\alpha(\boldsymbol{r},-\boldsymbol{v}_\alpha,t). \tag{6}$$

同时概率转变函数 $P_\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_\alpha)$ 满足

$$P_\alpha(-\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_\alpha) = P_\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_\alpha), \tag{7}$$

由于所有偏转的累积概率等于 1，即

$$\begin{aligned}&\int P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}) \\ &\quad + P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}) = 1.\end{aligned} \tag{8}$$

将(6)—(8)式代入(5)式中，通过简单的数学处理，得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}} &= -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_\alpha}\cdot(f_\alpha(\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle + \langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}_\alpha\partial\boldsymbol{v}_\alpha} : (f_\alpha(\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle \\ &\quad + \langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle)),\end{aligned} \tag{9}$$

其中，引入记号

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}, \tag{10}$$

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int P_{\alpha s}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s})\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}, \tag{11}$$

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}, \tag{12}$$

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int P_{\alpha l}(\boldsymbol{v}_\alpha,\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\,\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l})\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}. \tag{13}$$

(9)式右手的 $\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle$ 和 $\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle$ 同以前的表达式一样代表了小角散射远碰撞的贡献

$$\begin{aligned}\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle &= -\frac{Z_\alpha^4 e^4 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha^2}\sum_\beta\left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right) \\ &\quad \times \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta)\,\frac{\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}^3} \\ &= \Gamma_\alpha\frac{\partial h_\alpha}{\partial\boldsymbol{v}_\alpha},\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha s}\rangle &= \frac{Z_\alpha^4 e^4 \ln\Lambda}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha^2}\sum_\beta\left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right) \\ &\quad \times \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta)\left(\frac{\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{v}_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}^3}\right) \\ &= \Gamma_\alpha\frac{\partial g_\alpha}{\partial\boldsymbol{v}_\alpha\partial\boldsymbol{v}_\alpha},\end{aligned} \tag{15}$$

其中，记号 $\Gamma_\alpha = (Z_\alpha^4 e^4 \ln\Lambda)/(4\pi\varepsilon_0 m_\alpha^2)$，$h_\alpha$ 和 g_α 是 Rosenbluth 势[4]

$$h_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} = \sum_\beta\left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}\right)\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta)\,\frac{1}{\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}},$$

$$g_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} = \sum_\beta\left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta)\,\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}.$$

(9)式右手的 $\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle$ 和 $\langle\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta\boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle$ 项代表了大角

散射近碰撞的贡献,下面我们计算系数$\langle\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle$和$\langle\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle$. 在质心系中,碰撞前,有 $\boldsymbol{v}_{\alpha c} = \boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{V} = (m_\beta/(m_\alpha + m_\beta))\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{v}_{\beta c} = \boldsymbol{v}_\beta - \boldsymbol{V} = -(m_\alpha/(m_\alpha + m_\beta))\times \boldsymbol{v}_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{v}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{v}_\alpha - \boldsymbol{v}_\beta = \boldsymbol{v}_{\alpha c} - \boldsymbol{v}_{\beta c}$,这里 $\boldsymbol{V} = (m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha + m_\beta \boldsymbol{v}_\beta)/(m_\alpha + m_\beta)$是质心速度. 碰撞后,有 $\boldsymbol{v}'_{\alpha c} = \boldsymbol{v}'_\alpha - \boldsymbol{V} = m_\beta/(m_\alpha + m_\beta)\boldsymbol{v}'_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{v}'_{\beta c} = \boldsymbol{v}'_\beta - \boldsymbol{V} = -m_\alpha/(m_\alpha + m_\beta)\boldsymbol{v}'_{\alpha\beta}$, $\boldsymbol{v}'_{\alpha\beta} = \boldsymbol{v}'_\alpha - \boldsymbol{v}'_\beta = \boldsymbol{v}'_{\alpha c} - \boldsymbol{v}'_{\beta c}$.

根据图 1, $\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha\beta l} = \boldsymbol{v}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{v}'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}(\sin\theta\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi \boldsymbol{e}_2 + \cos\theta \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3)$,并且变量 $\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}$ 满足

$$\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l} = \boldsymbol{v}_\alpha + \boldsymbol{v}'_\alpha = (m_\beta/(m_\alpha + m_\beta))\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha\beta l} + 2\boldsymbol{V}. \tag{16}$$

这样,通过一些数学处理后,(12),(13)式成为

$$\begin{aligned}\langle\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle &= \frac{Z_\alpha^4 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2}\sum_\beta \left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta) \\ &\quad\times\left\{\left(\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)\frac{\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}^3}\right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\frac{m_\alpha(m_\alpha + m_\beta)}{m_\beta^2}\right)\frac{\boldsymbol{v}_\alpha}{v_{\alpha\beta}^3} \\ &\quad\left. + \left(\frac{1}{2}\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta}\right)\frac{\boldsymbol{v}_\beta}{v_{\alpha\beta}^3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)\frac{1}{\ln\Lambda}\Gamma_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha} \\ &\quad + \frac{Z_\alpha^4 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2}\sum_\beta \left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta) \\ &\quad\times\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{m_\alpha(m_\alpha + m_\beta)}{m_\beta^2}\right)\frac{\boldsymbol{v}_\alpha}{v_{\alpha\beta}^3}\right. \\ &\quad\left. + \left(\frac{1}{2}\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta}\right)\frac{\boldsymbol{v}_\beta}{v_{\alpha\beta}^3}\right\},\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\langle\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle &= \frac{Z_\alpha^4 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2}\sum_\beta \left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta) \\ &\quad\times\left[\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{v_{\alpha\beta}^2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{v}_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}}{v_{\alpha\beta}^3}\right) + (1 - \ln 2)\right. \\ &\quad\times\frac{(m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{e}_3 + m_\alpha \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{v}_\alpha + m_\beta \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{v}_\beta + m_\beta \boldsymbol{v}_\beta \boldsymbol{e}_3)}{m_\beta} \\ &\quad + \frac{1}{m_\beta^2}(m_\alpha^2 \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha + m_\alpha m_\beta \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta \\ &\quad\left. + m_\alpha m_\beta \boldsymbol{v}_\beta \boldsymbol{v}_\alpha + m_\beta^2 \boldsymbol{v}_\beta \boldsymbol{v}_\beta)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\ln\Lambda}\Gamma_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha \partial \boldsymbol{v}_\alpha} \\ &\quad + \frac{Z_\alpha^4 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2}\sum_\beta \left(\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}\right)^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\beta f_\beta(\boldsymbol{v}_\beta)\left[(1 - \ln 2)\right. \\ &\quad\times\frac{m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{e}_3 + m_\alpha \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{v}_\alpha + m_\beta \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{v}_\beta + m_\beta \boldsymbol{v}_\beta \boldsymbol{e}_3}{m_\beta} \\ &\quad + \frac{1}{m_\beta^2}(m_\alpha^2 \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha + m_\alpha m_\beta \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta \\ &\quad\left. + m_\alpha m_\beta \boldsymbol{v}_\beta \boldsymbol{v}_\alpha + m_\beta^2 \boldsymbol{v}_\beta \boldsymbol{v}_\beta)\right],\end{aligned} \tag{18}$$

其中,导出(17),(18)式用到了(14),(15)式.

3. 新碰撞算子的讨论与结论

考虑下面的实例,当一个等离子体系统中满足条件 $m_\alpha \ll m_\beta$(如电子-离子碰撞或 Lorentz 气体模型)和$|\boldsymbol{v}_\alpha| \gg |\boldsymbol{v}_\beta|$(即$|\boldsymbol{v}_\alpha| \approx |\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}|$, $|\boldsymbol{v}_{\alpha\beta}| \gg |\boldsymbol{v}_\beta|$),(17)和(18)式中的第 2 项和第 3 项能被忽略,这样(17)和(18)式可简化为

$$\langle\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)\frac{1}{\ln\Lambda}\Gamma_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha}, \tag{19}$$

$$\langle\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\Delta \boldsymbol{v}_{\alpha l}\rangle = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\ln\Lambda}\Gamma_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha \partial \boldsymbol{v}_\alpha}. \tag{20}$$

然后将(14),(15),(19)和(20)式代入(9)式中,我们得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha}\cdot\left(f_\alpha\left\{1 + \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)\frac{1}{\ln\Lambda}\right\}\Gamma_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha \partial \boldsymbol{v}_\alpha}\left(f_\alpha\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\ln\Lambda}\right\}\right. \\ &\quad\left.\times\Gamma_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \boldsymbol{v}_\alpha \partial \boldsymbol{v}_\alpha}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

显然,(21)式中含有 $1/\ln\Lambda$ 的系数项显示了中等耦合等离子体($2 \leqslant \ln\Lambda \leqslant 10$)近碰撞的贡献. 当库仑对数 $\ln\Lambda \geqslant 10$ 时,忽略含 $1/\ln\Lambda$ 的系数项,(21)式可约化到原先作为小角散射的 Fokker-Planck 方程的系数形式.

在这篇文章里,等离子体中当试探粒子分布函数 f_α 是关于试探粒子速度 v_α 的偶函数时,我们得到了一个新的包含了大角散射贡献的碰撞算子. 经修改后的碰撞算子能适用于库仑对数 $\ln\Lambda \geqslant 2$ 的高温高密度等离子体,即弱耦合和中等耦合等离子体. 并且,对于电子-离子碰撞或 Lorentz 气体模型,当满足$|\boldsymbol{v}_\alpha| \gg |\boldsymbol{v}_\beta|$时,经过约化的电子-离子碰撞算子同最初的 Fokker-Planck 算子相比增加了有关 $1/\ln\Lambda$ 的项. 而且,在大库仑对数($\ln\Lambda \geqslant 10$)的限制下,新的碰撞算子能约化到原先标准基于远库仑碰撞(适用于弱耦合等离子体的小角散射模型)的 Fokker-Planck 方程的系数形式. 依据被改进的电子-离子碰撞算子,对中等耦合等离子体中带电粒子弛豫时间的精确计算和电子输运系数的粗略估算有重要意

义，如对 ICF 快点火[24]的高能电子在预压缩靶丸中能量沉积的计算有重要参考价值. 未来的工作中，将在该新的碰撞算子中考虑相对论效应.

[1] Woods L C 1987 *Principles of Magnetoplasma Dynamics* (Oxford: Clarendon), Chap. 3

[2] Montgomery D C, Tidman D A 1964 *Plasma Kinetic Theory* (New York: Mcgraw-Hill). Chap. 2

[3] Spitzer L 1962 *Physics of Fully Ionized Gases* (New York: Interscience), Chap. 5

[4] Rosenbluth M N, Macdonald W M, Judd D L 1957 *Phys*. *Rev*. **107** 1

[5] Lenard A 1960 *Ann*. *Phys*. (N. Y.) **10** 390
Balescu R 1960 *Phys*. *Fluids* **3** 52

[6] Sheng Z M, Xu Z Z, Ma J X *et al* 1994 *Acta Phys*. *Sin*. **43** 37 (in Chinese) [盛政明、徐至展、马锦绣等 1994 物理学报 **43** 37]

[7] Wang J G, Li Y Y, Li J G 1995 *Acta Phys*. *Sin*. **44** 94 (in Chinese) [王建国、李有宜、李建刚 1995 物理学报 **44** 94]

[8] Jiao Y M, Long Y X, Dong J Q *et al* 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 180 (in Chinese) [焦一鸣、龙永兴、董家齐等 2005 物理学报 **54** 180]

[9] Petrasso R D1990 *Nature* (London) **343** 21

[10] Ichimaru S 1982 *Rev*. *Mod*. *Phys*. **54** 1017

[11] Davidson R C 1990 *Physics of Nonneutral Plasmas* (Palo Alto: Addison-Wesley)

[12] Gilbert S L, Bollinger J J, Wineland D J 1988 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **60** 2022

[13] Riley D *et al* 1992 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **69** 3739

[14] Denavit J 1992 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **69** 3052

[15] Milchberg H M, Freeman R R, Davey S C, More R M 1988 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **61** 2364

[16] Lindl J D, Mccrory R L, Campbell E M 1992 *Phys*. *Today* **45** 32

[17] Lee Y T, More R M 1984 *Phys*. *Fluids* **27** 1273

[18] Han S S, Wu Y Q 2000 *Plasma Phys*. *Control*. *Fusion* **42** 701

[19] Bahcall J N 1989 *Neutrino Astrophysics* (New York: Cambridge Univ. Press)

[20] Li C K, Petrasso R D 1993 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **70** 3063

[21] Baral K C, Mohanty J N 2002 *Phys*. *Plasmas* **9** 4057

[22] Ordonez C A, Molina M I 1994 *Phys*. *Plasmas* **1** 2515

[23] Chang Y B, Li D 1996 *Phys*. *Rev*. E **53** 3999
Chang Y B 1992 *Phys*. *Fluids* B **4** 313

[24] Tabak M et al 1994 *Phys*. *Plasmas* **1** 1626
Tabak M *et al* 2005 *Phys*. *Plasmas* **12** 057305

Collision operator for moderately coupled plasma*

Zha Xue-Jun[1)†] Han Shen-Sheng[1)] Xu Zhi-Zhan[1)] Wang Yan[2)]

1) (*State Key Laboratory of High Field Laser Physics*, *Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Shanghai* 201800, *China*)

2) (*Department of Physics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200436, *China*)

(Received 10 October 2005; revised manuscript received 30 November 2005)

Abstract

A new approach has been developed to treat large-angle and small-angle binary collisions in plasmas when the test particles' distribution function f_α is an even function about the test velocity $\boldsymbol{v}_\alpha$. In the approach, the Boltzmann collision operator is derived to be suitable for the plasma considered as weakly coupled (Coulomb logarithm $\ln\Lambda \geqslant 10$) or moderately coupled ($2 \leqslant \ln\Lambda \leqslant 10$). The modified collision operator has a direct and practical connection to the Rosenbluth potentials. In addition, with $m_\alpha \ll m_\beta$ (such as electron-ion collision or Lorentz-gas model) and $|\boldsymbol{v}_\alpha| \gg |\boldsymbol{v}_\beta|$, the reduced electron-ion collision operator differs from the original Fokker-Planck operator for Coulomb collisions by terms of order $1/\ln\Lambda$.

Keywords: moderately coupled plasma, small-angle scattering, large-angle scattering, collision operator

PACC: 5225D, 5225L, 5240M

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10405030, 10335020, 60407007).

† E-mail: xjzha@siom.ac.cn