

# 量子位 Heisenberg XX 开链中边界 量子位之间的纠缠<sup>\*</sup>

惠小强<sup>1)†</sup> 陈文学<sup>1)</sup> 刘 起<sup>2)</sup> 岳瑞宏<sup>2)</sup>

1) 西安邮电学院应用数学与应用物理系, 西安 710061)

2) 西北大学现代物理研究所, 西安 710069)

(2005 年 7 月 5 日收到, 2005 年 11 月 5 日收到修改稿)

Heisenberg 开链对研究量子态在自旋链上的传递有重要的意义. 本文研究了五量子位 Heisenberg XX 开链中边界量子位之间的纠缠, 在该系统中引入了磁杂质和系统杂质且它们之间满足线性关系时, 该系统可以精确求解, 此时边界量子位之间存在纠缠. 选择合适的杂质参数和磁场参数, 该边界纠缠的最大值可达到 0.5.

关键词: Heisenberg XX 开链, 边界纠缠, 杂质

PACC: 7510J, 0365

## 1. 引 言

众所周知, 量子纠缠在量子信息过程中充当重要的角色<sup>[1]</sup>. 在隐形传输<sup>[2]</sup>和量子密钥分发<sup>[3,4]</sup>过程中, 纠缠对提供量子通道, 在量子计算中<sup>[5]</sup>, 纠缠对量子通用门的构造具有重要的意义.

Heisenberg 自旋链可以用来构造量子计算机和量子点<sup>[6]</sup>, 一个强各向异性一维 Heisenberg XXZ 链可用于描述基于液氦电子的量子计算机<sup>[7]</sup>, 两个量子点间的相互作用哈密顿量就是 Heisenberg XY 相互作用, 经过恰当的编码, Heisenberg 相互作用可以用作量子计算<sup>[9-11]</sup>.

研究表明<sup>[12,13]</sup>, 一个没有经过调制和测量的一维 Heisenberg 自旋链可以短距离地传输量子态: 首先把处于基态的自旋链置于外场中, 发送方把要传输的量子态编码在距它最近的自旋上, 经过一段时间的演化, 接收方会以一定的保真度接收到该量子态, 当传输时间恰当而自旋的数目大于 80 时, 量子态直接传输的保真度要大于经典传输, 这样的自旋链充当通道还允许任意距离的共享蒸馏纠缠. 如果发送者和接收者可以使用有限数目的自旋编码/解

码态, 则传输态的保真度还可以增加<sup>[14]</sup>, 选择合适的自旋交换耦合<sup>[15]</sup>或者能够测量自旋链的自旋<sup>[16]</sup>, 传输的保真度可达到 1. 如果允许量子位之间有不同的耦合, 量子态可以在线性自旋链中任意距离地传输. 这种传输利用了量子态在自旋链上的动力学演化.

两量子位之间的纠缠, 通常用对纠缠来定义<sup>[17,18]</sup>. 在 Heisenberg 自旋链纠缠问题的研究中, 大部分工作围绕闭链中的近邻对纠缠展开, 如两量子 XX, XXX 和 XXZ 自旋环<sup>[19,20]</sup>, 多于两位的自旋环<sup>[21-23]</sup>等等. 很显然, 非近邻对纠缠对量子信息的意义要强于近邻对纠缠.

如果一个开自旋链两端的量子位之间有纠缠的话, 该链就是一个天然的量子纠缠通道, 可用于量子通信和量子计算, 它传输量子态的速度要远高于动力学演化的传输. 因此研究 Heisenberg 开链边界量子位之间的纠缠情况(比如, 怎样使边界量子位之间有纠缠? 如何使这样的纠缠最大? 如何增加有纠缠时的链长?)就变得很有意义.

大部分时候, 杂质给系统带来很大的负面影响, 但也有例外. 在以前的研究中, 我们曾尝试给 Heisenberg 自旋链中引入一位系统杂质<sup>[24,25]</sup>, 发现杂

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10547008), 陕西省自然科学基金(批准号: 2004A15), 陕西省教育厅(批准号: 05JK088)科研专项基金和西安邮电学院中青年基金(批准号: 1050401)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xxq@xyou.edu.cn

质可以用来控制系统中的对纠缠,接着又在四量子位的 Heisenberg XX 开链中引入了两位系统杂质,在 6 种可能的杂质组合中,有一种非常有意思,当系统的边界两位为杂质且杂质参数(杂质提供的交换积分)远小于正常格点时,边界量子位之间有最大的纠缠.受此结果的启发,期望增加链长还会有类似的结果,即寻找具有更大距离的纠缠对.

只有两位系统杂质时,五位 Heisenberg XX 开链的边界量子位之间不存在纠缠,六位 Heisenberg XX 开链得不到精确解,于是我们放弃了六量子位的研究,又给带两位系统杂质的五位 Heisenberg XX 开链添加磁杂质<sup>[26]</sup>,经过大量的尝试,找到了一种可解的条件.磁场和杂质参数满足线性关系.下面就研究该条件下边界量子位之间的纠缠情况.

为了方便,先简要介绍对纠缠的度量以及相应的标记.形成纠缠度和 Concurrence.形成纠缠度用来度量对纠缠的大小,它随着 Concurrence C 单调增加,由于 Concurrence 相对容易计算,所以人们习惯用 Concurrence 度量对纠缠.设  $\rho$  是系统的密度矩阵, $\rho_{ij} = \text{Tr}_{\text{non}}(ij)\rho$ (混合态或纯态)为约化密度矩阵,其中  $i, j$  指第  $i$  个量子位和第  $j$  个量子位,密度矩阵对应的 Concurrence 定义为

$$C_{ij} = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}, \quad (1)$$

其中  $\lambda_k, k = 1, 2, 3, 4$  是算子

$$\hat{\rho}_{ij} = \rho_{ij}(\sigma_i^y \otimes \sigma_j^y) \rho_{ij}^* (\sigma_i^y \otimes \sigma_j^y) \quad (2)$$

的本征值的平方根以降序排列,  $\hat{\rho}_{ij}$  的本征值非负.

约化密度矩阵可以写为

$$\rho_{ij} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} u_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{ij} & w_{ij} & 0 \\ 0 & w_{ij}^* & v_{ij}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

第  $i$  个量子位和第  $j$  个量子位之间的 Concurrence 表示如下:

$$C_{ij} = \max\left\{\frac{2}{Z}(|w_{ij}| - \sqrt{u_{ij}x_{ij}}), 0\right\}. \quad (4)$$

一旦得到了约化密度矩阵式(3)的参数,也就意味着我们得到了 Concurrence 的解析表达式.当  $\text{concurrence } C_{ij} = 0$ ,  $i$  和  $j$  之间没纠缠;当  $C_{ij} = 1$ ,  $i$  和  $j$  之间处于最大纠缠.

2. 系统描述

带两位边界系统杂质和磁杂质的五量子位

Heisenberg XX 开链的哈密顿量可以写为

$$H = \sum_{i=1}^4 J_i J_{i+1} (\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^-) + B \sum_{i=1}^5 \sigma_i^z, \quad (5)$$

为了便于描述,标记杂质格点提供的交换积分为  $J_1 = J_5 = J$ , 正常格点提供的交换积分为  $J_i = 1 (i = 2, 3, 4)$ , 一般来讲,这样的系统没有精确解.经过大量的尝试计算,我们找到了一种可解的情况,即  $B = mJ, m \in (0, \infty)$  的条件,在它的限制下系统精确可解,本文只研究这种可解情形.

该可解系统的本征值如下:

$$\begin{aligned} E_0 &= -5mJ, E_1 = -(3m+1)J, \\ E_2 &= -3mJ, E_3 = -(3m-1)J, \\ E_4 &= -(m+1)J, E_{5,6} = -mJ, \\ E_7 &= -(m-1)J, E_8 = (m-1)J, \\ E_{9,10} &= mJ, E_{11} = (m+1)J, \\ E_{12} &= (3m-1)J, E_{13} = 3mJ, \\ E_{14} &= (3m+1)J, E_{15} = 5mJ, \\ E_{16} &= -3mJ - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{17} &= -(m+1)J - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{18} &= -mJ - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{19} &= -(m-1)J - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{20} &= (m-1)J - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{21} &= mJ - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{22} &= (m+1)J - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{23} &= 3mJ - \sqrt{2+J^2}, \\ E_{24} &= -3mJ + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{25} &= -(m+1)J + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{26} &= -mJ + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{27} &= -(m-1)J + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{28} &= (m-1)J + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{29} &= mJ + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{30} &= (m+1)J + \sqrt{2+J^2}, \\ E_{31} &= 3mJ + \sqrt{2+J^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

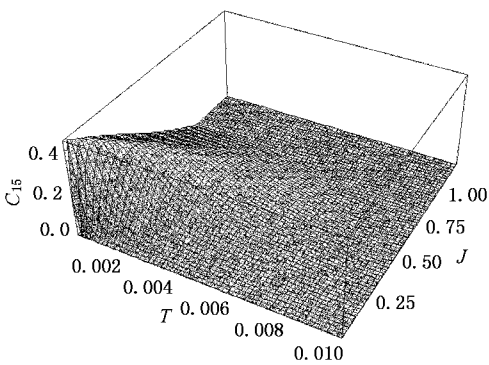
为了节省篇幅,省去了相应的本征态.

系统的配分函数为  $Z = \sum_{i=0}^{31} e^{-\frac{E_i}{kT}}$ , 约化密度矩阵

为  $\rho = \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{31} (e^{-\frac{E_i}{kT}} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|)$ .

3. 系统杂质对边界纠缠的影响

略去具体的过程 ,直接给出数值计算及分析 :



当磁场  $B = 0.01 J$  ,  $B = 0.1 J$  ,  $B = J$  ,  $B = 2 J$  时 , 在图 1 和图 2 中画出了  $C_{15}(T, J)$  图 :

图 1 及数值计算表明 ,当  $B = 0.01 J$  时 ,在点  $(T = 0, J = 0.045)$   $(C_{15})_{\max} = 0.4770$  ;当  $J = 0.15$  时的

图 1  $B = 0.01 J$  (a) 和  $B = 0.1 J$  (b) 时的  $C_{15}(T, J)$  图

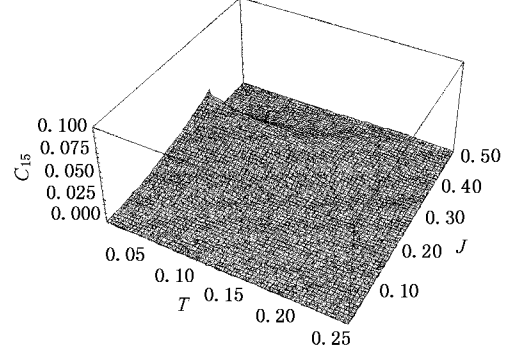
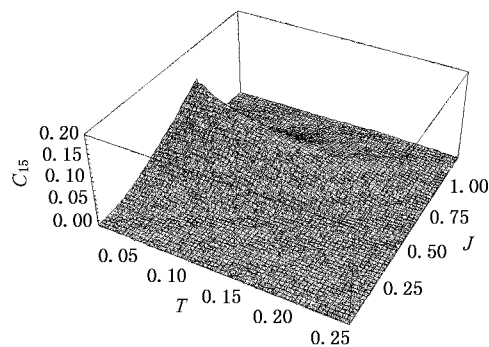
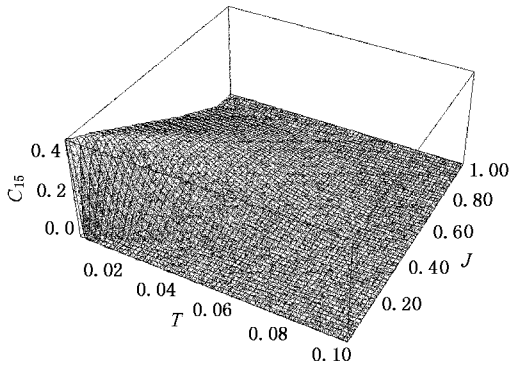


图 2  $B = 1 J$  (a) 和  $B = 2 J$  (b) 时的  $C_{15}(T, J)$  图

临界温度最高  $T_c = 0.010$  ,当  $J < 0.50$  时 ,  $T_c$  随  $J$  单调增加 ,当  $0.15 < J < 0.91$  时 ,  $T_c$  随  $J$  单调减小 ,  $0.91 < J$  时纠缠消失 . 当  $B = 0.1 J$  时 ,在点  $(T = 0, J = 0.070)$   $(C_{15})_{\max} = 0.4966$  ;当  $J = 0.5$  时的临界温度最高  $T_c = 0.085$  ,当  $J < 0.5$  时 ,  $T_c$  随  $J$  单调增加 ,当  $0.5 < J < 0.91$  时 ,  $T_c$  随  $J$  单调减小  $0.91 < J$  时纠缠消失 .

图 2 及数值计算表明 ,当  $B = J$  时 ,在点  $(T = 0, J = 0.817)$   $(C_{15})_{\max} = 0.1249$  ;当  $J = 1.10$  时的临界温度最高  $T_c = 0.240$  ,当  $J < 0.85$  时 ,  $T_c$  随  $J$  单调增加 ,当  $0.85 < J < 2.10$  时 ,纠缠存在的温度区间逐渐减小 ,纠缠的极大值很快减小  $2.10 < J$  时纠缠消失 . 当  $B = 2 J$  时 ,在点  $(T = 0, J = 0.365)$   $(C_{15})_{\max} = 0.0312$  ;当  $J = 0.78$  时的临界温度最高  $T_c = 0.260$  ,当  $J < 0.37$  时 ,  $T_c$  随  $J$  单调增加 ,当  $0.37 < J < 0.91$  时 ,纠缠存在的温度区间逐渐减小 ,纠缠的极大值很

快减小  $0.91 < J$  时纠缠消失 .

以上结果具有明显的物理意义 :当  $J$  较小时 ,中间三位的耦合将会很强 ,就好像边界量子位之间产生了直接相互作用一样 ,所以它们之间的纠缠会较大 ;当  $J$  很大时 ,边界量子位和其近邻的量子位之间的耦合将变得很强 ,中间三位的耦合相对很弱 ,就象从中间断开一样 ,所以边界量子位之间的纠缠消失 ,很显然在产生边界量子位的纠缠过程中 ,磁场起到了决定性的作用 ,但它同时又不能太大 ,否则纠缠也会消失 .

磁场的这种决定性作用究竟以什么样的方式体现 ? 下面继续讨论 .

4. 磁杂质对边界纠缠的影响

当  $J$  分别为  $0.01$   $0.1$   $1$  时 ,在图 3—图 5 中画出了  $C_{15}(T, B)$  图和确定的温度时  $C_{15}(B)$  图 .

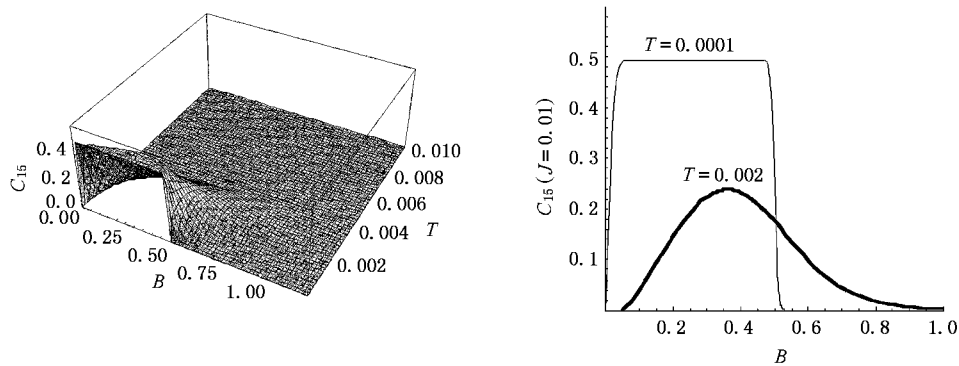


图 3 当  $J=0.01$  时,  $C_{15}(T, B)$  图及确定的温度时  $C_{15}(B)$  图

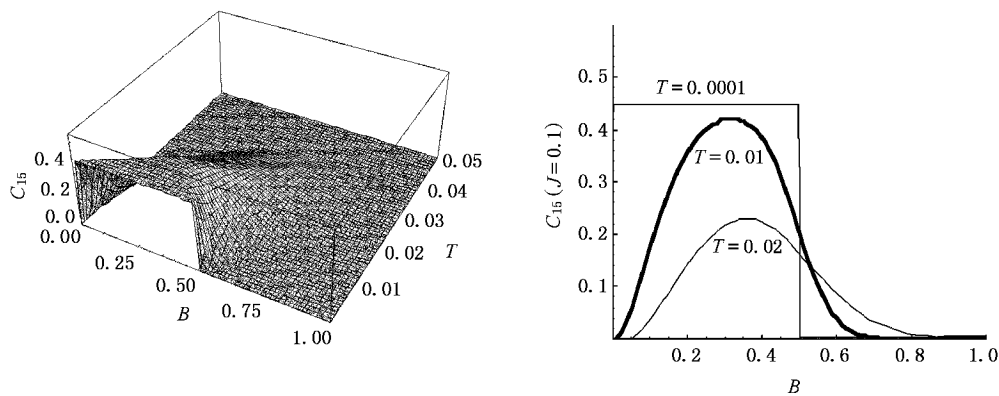


图 4 当  $J=0.1$  时,  $C_{15}(T, B)$  图及确定的温度时  $C_{15}(B)$  图

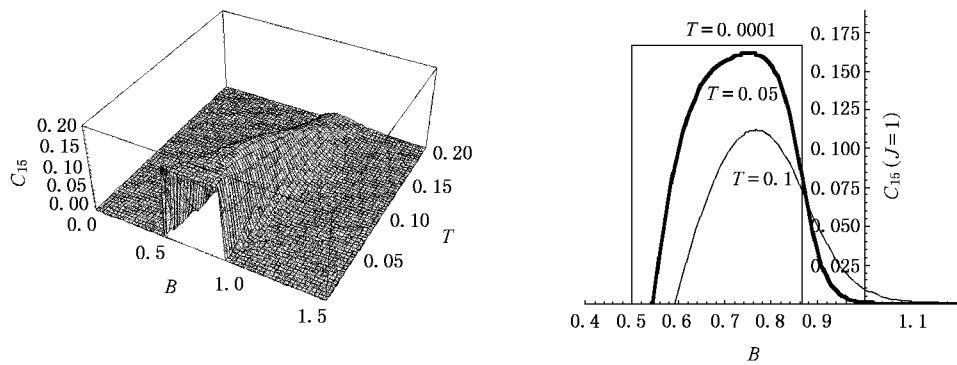


图 5 当  $J=1$  时,  $C_{15}(T, B)$  图及确定的温度时  $C_{15}(B)$  图

图 3 及数值计算表明,  $J=0.01$  时  $(C_{15})_{\max}=0.4950$ ; 当  $B<1.25J$  时, 临界温度  $T_c$  随  $B$  单调增加, 当  $1.25J<B<1.90J$  时, 在  $0-T_c$  之间有一段不存在纠缠的区间, 当  $1.90J<B$  时  $T_c$  随  $J$  基本呈线性增加, 但纠缠很小; 图 4 及数值计算表明,  $J=0.1$  时  $(C_{15})_{\max}=0.4477$ ;  $T_c$  随  $B$  的变化类似, 当  $B<0.70J$  时, 临界温度  $T_c$  随  $B$  单调增加, 当  $0.70J$

$<B<1.25J$  时, 在  $0-T_c$  之间有一段不存在纠缠的区间, 当  $1.25J<B$  时  $T_c$  随  $J$  基本呈线性增加, 但纠缠很小,  $0.91<J$  时纠缠消失; 也存在明显的相变. 图 5 及数值计算表明,  $J=1$  时  $(C_{15})_{\max}=0.1667$ ; 当  $0.53J<B<1.83J$  时, 纠缠存在,  $0.53J<B<0.92J$  时临界温度  $T_c$  随  $B$  单调增加,  $0.92J<B<1.83J$  时, 纠缠存在的温度区间逐渐变小,

纠缠本身也逐渐变小,并存在明显的相变.

当  $B = 0$  时,系统的基态简并  $E_{17} = E_{20} = -J - \sqrt{2 + J^2}$ , 相应的本征态为

$$|\psi_{17}\rangle = \frac{1}{\sqrt{A_{17}}} (a_{17,3} |00011\rangle + a_{17,5} |00101\rangle + a_{17,6} |00110\rangle + a_{17,9} |01001\rangle + a_{17,10} |01010\rangle + a_{17,12} |01100\rangle + a_{17,17} |10001\rangle + a_{17,18} |10010\rangle + a_{17,20} |10100\rangle + a_{17,24} |11000\rangle), \quad (7)$$

$$|\psi_{20}\rangle = \frac{1}{\sqrt{A_{20}}} (a_{20,7} |00111\rangle + a_{20,11} |01011\rangle + a_{20,13} |01101\rangle + a_{20,14} |01110\rangle + a_{20,19} |10011\rangle + a_{20,21} |10101\rangle + a_{20,25} |11001\rangle + a_{20,22} |10110\rangle + a_{20,26} |11010\rangle + a_{20,28} |11100\rangle),$$

其中  $A_{17,20}$  为归一化常数,  $a_{i,j}$  为不为零的参数. 对单独的  $|\psi_{17}\rangle$  或  $|\psi_{20}\rangle$ , 边界量子位之间存在纠缠, 但简并后边界纠缠消失. 当引入磁场后且  $B = mJ < \frac{1}{2}J$ ,  $|\psi_{17}\rangle$  和  $|\psi_{20}\rangle$  的简并消失,  $|\psi_{17}\rangle$  成为唯一的基态, 边界量子位之间的纠缠出现; 当磁场  $\frac{1}{2}J < B = mJ < \frac{\sqrt{3}}{2}J$  时, 基态变为

$$|\psi_{16}\rangle = \frac{1}{\sqrt{A_{16}}} (a_{16,1} |00001\rangle + a_{16,2} |00010\rangle + a_{16,4} |00100\rangle + a_{16,8} |01000\rangle + a_{16,16} |10000\rangle), \quad (8)$$

其中  $A_{16}$  为归一化常数,  $a_{i,j}$  为不为零的参数. 对于  $J$  较小的情形,  $a_{16,2} = -\frac{\sqrt{2+J^2}}{J}$ ,  $a_{16,4} = \frac{2}{J}$ ,  $a_{16,8} = -\frac{\sqrt{2+J^2}}{J}$  三个数的绝对值相差不大且都远大于  $a_{16,1} = a_{16,16} = 1$ ,  $|\psi_{16}\rangle$  中有贡献的是中间三项, 边界

量子位在这三项中为直积态, 因此边界纠缠消失, 见图 3 和图 4; 当  $J$  较大时,  $|\psi_{16}\rangle$  中的五项参数相差不大, 都有贡献, 因此边界量子位之间产生纠缠, 见图 5; 当磁场  $\frac{\sqrt{3}}{2}J < B = mJ$  时, 基态变为  $|\psi_0\rangle = |00000\rangle$ , 边界量子位之间又变为直积态, 纠缠不存在, 见图 5. 很明显, 磁场起到了消除简并和改变系统基态的作用.

## 5. 结 论

本文中, 我们研究了带系统杂质和磁杂质的五量子位 Heisenberg XX 开链中边界量子位之间的纠缠. 取边界量子位为杂质, 当磁场强度  $B$  随着杂质参数  $J$  (杂质量子位提供的交换积分, 并假定正常量子位提供的交换积分为 1) 线性变化时, 该系统才可解. 当  $B$  较小时, 边界量子位之间的纠缠较大, 但不超过 0.5; 当  $B$  较大时, 边界量子位之间的纠缠较小. 当杂质参数  $J$  很小时, 边界量子位之间的纠缠可以取到其最大值(接近 0.5), 当杂质参数  $J$  较大时, 边界量子位之间的纠缠极大值较小.

引入磁场后可在 5 量子位 Heisenberg 开链的边界量子位之间产生纠缠, 磁场起到了消除简并和改变基态的作用. 这一结果表明, 态的简并对纠缠有重要的影响. 在能够产生边界纠缠的情况下, 中间各位的耦合越强(相对于边界位和它的近邻位), 边界纠缠越大.

虽然边界量子位之间的纠缠不能达到最大, 但我们增加了链长, 并且给出了边界量子位之间纠缠的理论值, 对研究量子态在自旋链上的传递有一定的意义. 此外由于该系统精确可解, 因此还能够给精确可解模型的研究提供一定的参考.

感谢中国科学院物理研究所刘伍明研究员给本文作者提供了一些很有价值的建议.

- [1] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer Verlag)
- [2] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [3] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [4] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R, Macchiavello C, Popescu S, Sanpera A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818

- [5] Divincenzo D P 1995 *Science* **270** 255
- [6] Loss D, Divincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120  
Burkard G, Loss D, Divincenzo D P 1999 *Phys. Rev. B* **59** 2070
- [7] Dykman M I, Platzman P M 2000 *Fortschr. Phys.* **48** 9  
Platzman P M, Dykman M I 1999 *Science* **284** 1967  
Dykman M I, Platzman P M 2001 *Quant. Inf. Comput.* **1** 102
- [8] Sorensen A, Molmer K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2274

[ 9 ] Lidar D A , Bacon D , Whaley K B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4556

[ 10 ] Divincenzo D P , Bacon D , Kempe J , Burkard G , Whaley K B 2000 *Nature* **408** 339

[ 11 ] Santos L F 2003 *Phys. Rev. A* **67** 062306

[ 12 ] Bose S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 207901

[ 13 ] Subrahmanyam V 2004 *Phys. Rev. A* **69** 034304

[ 14 ] Osborne T J , Linden N 2004 *Phys. Rev. A* **69** 052315

[ 15 ] Christandl M , Datta N , Ekert A , Landahl A J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 187902

[ 16 ] Verstraete F , Martin-Delgado M A , Cirac J I 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 087201

[ 17 ] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245

[ 18 ] Hill H , Wootters W K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022

[ 19 ] Coffman V , Kundu J , Wootters W K 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052306

[ 20 ] Arnesen M C , Bose S , Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901

[ 21 ] Wang X G 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012313

[ 22 ] O ' Connor E M , Wootters W K , *Entangled Rings , quant-ph/0009041*

[ 23 ] Wang X G , Fu H C , Solomon A I , *quant-ph/0105057*

[ 24 ] Xi X Q , Chen W X , Hao S R , Rue R H 2002 *Phys. Lett. A* **300** 567

[ 25 ] Xi X Q , Chen W X , Hao S R , Rue R H 2002 *Phys. Lett. A* **297** 291

[ 26 ] Zhang T , Xi X Q , Yue R H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2755 ( in Chinese )[ 张 涛、惠小强、岳瑞宏 2004 物理学报 **53** 2755 ]

[ 27 ] Gao Y , Zhang Y M , Chen H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1586 ( in Chinese )[ 高 阳、章豫梅、陈 鸿 2000 物理学报 **49** 1586 ]

# The entanglement between the boundary qubits in the five-qubit Heisenberg XX open chain \*

Xi Xiao-Qiang<sup>1†</sup>    Chen Wen-Xue<sup>1)</sup>    Liu Qi<sup>2)</sup>    Yue Rui-Hong<sup>2)</sup>

1 ǻ Department of Applied Mathematics and Physics , Xi 'an Institute of Post and Telecommunications , Xi 'an    710061 , China )

2 ǻ Institute of Modern Physics , North-West University , Xi 'an    710069 , China )

( Received 5 July 2005 ; revised manuscript received 5 November 2005 )

## Abstract

Heisenberg XX open chain is very important in the study of quantum state transition. In this paper , we calculate the entanglement between the boundary qubits in the five-qubit Heisenberg XX open chain. When introducing magnetic impurity and system impurity and they satisfy linear relation , the system can be solved exactly , and there exist entanglement between the boundary qubits. Choosing the magnetic and system impurity properly , the boundary entanglement can get the maximal value 0.5.

**Keywords :** Heisenberg XX open chain , boundary entanglement , impurity

**PACC :** 7510J , 0365

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 10547008 ) , the Natural Science Foundation of Shanxi Province , China ( Grant No. 2004A15 ) , the Special Foundation of the Education Office of Shanxi Province ,China( Grant No. 05JK088 ) , and the Xi 'an Institute of Posts and Telecommunications Foundation , China( Grant No. 1050401 ).

† E-mail :xxq@xyou.edu.cn