

准周期外力驱动下 Lorenz 系统的动力学行为^{*}

何文平¹⁾²⁾ 封国林^{2)3)†} 高新全³⁾ 丑纪范¹⁾

1) 兰州大学大气科学学院, 兰州 730000 扬州大学物理学院, 扬州 225002)

2) 中国科学院大气物理研究所东亚区域气候-环境重点实验室, 北京 100029)

3) 国家气候中心, 中国气象局气候研究开放实验室, 北京 100081)

(2005 年 12 月 27 日收到, 2006 年 1 月 14 日收到修改稿)

本文研究了准周期外力驱动下 Lorenz 系统的动力学行为, 发现当外强迫的振幅达到某一个临界值时, 系统的动力学行为将会发生根本性的变化, 由此揭示了产生非混沌奇怪吸引子 (Strange Nonchaotic Attractor, SNA) 的一个新机制: 准周期外强迫振幅的加大导致系统由奇怪的混沌吸引子转变为 SNA, 系统的相空间最终被压缩至一个准周期环上. 并且本文的结果表明, 外强迫的临界振幅与 Lorenz 系统 Rayleigh 数的大小成正比, 而其受外强迫频率变化的影响并不大.

关键词: 准周期, Lorenz 系统, 非混沌奇怪吸引子

PACC: 9260X

1. 引 言

采用周期信号和随机信号驱动一个系统的思想在非线性动力学中十分普遍, 在目前所研究过的驱动系统中, 不管是周期信号还是随机信号都是被用来作为对系统的一个扰动. Choe 等人^[1]通过分别叠加一个高频周期信号和随机信号研究了两种不同信号对 Lorenz 系统动力学行为的影响, 发现在这两种信号的作用下系统的混沌现象都得到了不同程度的压缩, 并从理论上给出了混沌压缩的标准. Park^[2]等利用 Lorenz 方程研究了弱周期信号作用于系统时相同步的动力学行为. 从某种意义上来说, 准周期信号是介于周期信号和随机信号之间的一种信号, 根据不同的研究需要可以选择合适的驱动信号. 奇怪的非混沌吸引子 (Strange Nonchaotic Attractor, SNA) 是近年来在非线科学领域中取得的一个重要的研究成果之一, 它具有分形结构, 但是它的最大非零 Lyapunov 指数为负值. 自从 Grebogi 等^[3]首先发现 SNA 以来的近 20 年时间里, 使用准周期信号驱动非线性系统已经成为一个新的研究热点. 对该领域的研究已经引起了极大的关注, 许多研究结果表明^[4-11], 受准周期外力作用的非线性系统一般都能

产生 SNA 现象. SNA 的特征已经被广泛研究, 它与奇怪吸引子的一个显著不同之处在于 SNA 缺乏对初值的敏感性, 而且在 SNA 中, 系统的运动具有间歇性, 初值略有差别的相邻轨道之间的差异能够很快被消除而达到同步^[11]. 目前的研究发现, SNA 产生的机制主要有 5 种. Kaneko 和 Nishikawa^[4,5]的工作表明, 一个二维映射的环吸引子的分形导致了系统由倍周期分岔到混沌的道路被中断, 从而能够产生 SNA; Heagy 等^[6]发现倍周期环与系统的不稳定母轨道的碰撞能够产生 SNA 现象, 这种机制类似于混沌系统中出现的吸引子融合激变的情形; Lai 等^[7]揭示了系统通过分形而进入 SNA 状态的一种机制, 即对于一个拥有准周期环所构成的不变子空间的动力学系统, 当环的横向稳定性丧失时, 亦能产生 SNA; Pasad 等人^[9]已经发现了第四条通往 SNA 的间歇路线, 间歇路线中 SNA 总是在一定的参数空间区域内出现, 即系统周期演化的参数空间区域的舌头将存在混沌区域的参数空间划分为两个具有不同特征的混沌参数区域; Wang 等^[12]经过理论分析和数值试验, 发现在小噪声作用下一个自治的离散映射和另一个由周期信号驱动连续自治非线性系统均能够产生强的 SNA 现象.

1963 年, 美国气象学家 Lorenz 在关于大气对流

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 40325015) 国家重点基础研究发展规划项目 (批准号: 2006CB400503) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: feng_gl@sina.com

的研究中提出了著名的最大简化气候模式 Lorenz 方程组,该方程组得到了广泛的研究^[1,2,13-16].本文以此方程组为模型,研究了在准周期外力驱动下系统的动力学行为,描述了产生 SNA 现象的一个新机制,即通过增加外部驱动力的强度,系统的奇怪吸引子(Strange Attractor)消失了,取而代之的是一个 SNA,随着驱动强度的进一步加大,系统的演化很快适应外部驱动,其吸引子最终被压缩成一个准周期环,这种机制可能其他准周期驱动的系统里普遍存在.

2. 准周期外力驱动下的 Lorenz 方程

考虑准周期外力驱动下经典的 Lorenz 方程^[17],其无量纲变量 x, y, z 的非线性动力学控制方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y + A \cos(\nu \theta_n), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + w, \end{aligned} \quad (1)$$

这里 σ, r 和 b 分别是 Prandtl 数、Rayleigh 数以及与交流尺度相联系的参数,其值分别取为 10.0, 28.0, 8/3. A 为准周期外强迫的强度, ν 为一常数. w 为无理数,类似于文献[8-11],取其值为 $(\sqrt{5}-1)/2$,在数值计算中采用有理数来近似的表示它.由 Lorenz 的工作^[17]可知,当 r 的取值大于 24.74 时,系统的演化将进入混沌状态.

3. 数值结果

在数值试验中,取 $\nu = 2\pi$. 方程(1)采用四阶定步长龙格-库塔法求解,步长取为 0.01. 在采用龙格-库塔法计算的过程中,在计算第一个系数时引入 $A \cos(\nu \theta_n)$. 图 1(a)给出了系统的最大非零 Lyapunov 指数作为准周期外强迫强度 A 的函数关系,由图中可以发现,当准周期外强迫的强度 A 约增大到一个阈值 $A_0 = 18.9999895\dots$ 时, Lorenz 系统的 Lyapunov 指数发生了突变,其符号由正变为负,系统的吸引子由混沌状态的奇怪吸引子转变为 SNA. Lorenz 系统的相空间在 $X-Y$ 平面的投影见图 1(b),此时系统的相空间分布状态较系统处于混沌状态时多了一个 Q 区域,即在外强迫不断加强的情况下,系统的状态逐渐被压缩到在系统处于混沌状态时的一个禁区 F

(在系统处于混沌状态时,任何轨线都不能穿过 F 区域)里. 计算结果表明,在相空间 S 区域,系统的行为受初值的影响依然十分敏感,初值之间的微小偏差会使得系统的演化情况截然不同. 这一结论与 Pikovsky^[18]和 Lai 等人^[19]得到的结果类似. 图 1(c)为分别从两个相差十分微小的初值 $(0.0, 0.05, -0.05)$ 与 $(-0.000001, 0.05, -0.05)$ 出发的轨线其 X 分量之差 $(X_1 - X_2)$ 随着积分时间的演化曲线. 由图 1(c)可知,在当积分步数小于 8×10^4 时,两条邻近轨线随着积分时间的增加不断分离,但由于系统存在外部准周期强迫的作用,因此,系统在经过一段时间调整后,两条不稳定轨线之间的差别在外强迫的约束下又逐渐变小,最终被稳定下来. 而两条轨线 X 分量之间的差值渐渐变小,直至趋于零. 由此可见,虽然轨线在区域 S 中受初值的影响十分大,轨道非常不稳定,但只要当系统的任一轨线进入吸引域 Q 后,就再也无法逃出该区域,不稳定的轨道逐渐被稳定下来,而且系统在该区域内的行为几乎不受初值小扰动的影响,随着积分时间的延长,系统的行为逐渐适应了外部强迫,呈准周期变化(见图 1(d)). 随着外强迫幅度的增大,系统适应外部强迫所需要的时间逐渐变短,系统在 S 区域的状态很快被压缩至 Q 区域,最终系统的运动被限制到一个稳定的固定点上,并以该稳定不动点为中心作准周期振荡,这在图 1(d)和(e)中很容易看到. 图 1(d)表明一条不稳定的轨道在外部强迫的作用下变得稳定,图中放大的小图说明此时系统作稳定的准周期运动. 图 1(e)为舍弃前 8×10^4 步积分后系统的相图(初值为 $(-0.000001, 0.05, -0.05)$),它表明系统的整个相空间最终被压缩到一个准周期环上. 当外部驱动的振幅发生变化时,被稳定后的轨道其作准周期运动时平衡点的位置随之发生了变化. 由图 1(f)可以看出,随着准周期外部驱动振幅的增大,平衡点沿着 X 轴的正方向和 Y 轴的负方向移动,而平衡点在 Z 轴方向上的变化较小.

图 2 给出了由方程(1)所描述的阈值图. 在 G_1 参数区域,系统的相空间由处于混沌状态时的奇怪吸引子转变为 SNA, Lorenz 系统的动力学特征发生了根本性变化,其最大非零 Lyapunov 指数为负,在外部准周期强迫的不断作用下,系统的运动最终被稳定到一个固定点上;而在 G_2 区域,系统仍然处于混沌状态,外部准周期强迫没有从根本上改变系统的动力学性质. 临界振幅 A 受 ν 变化的影响不大,

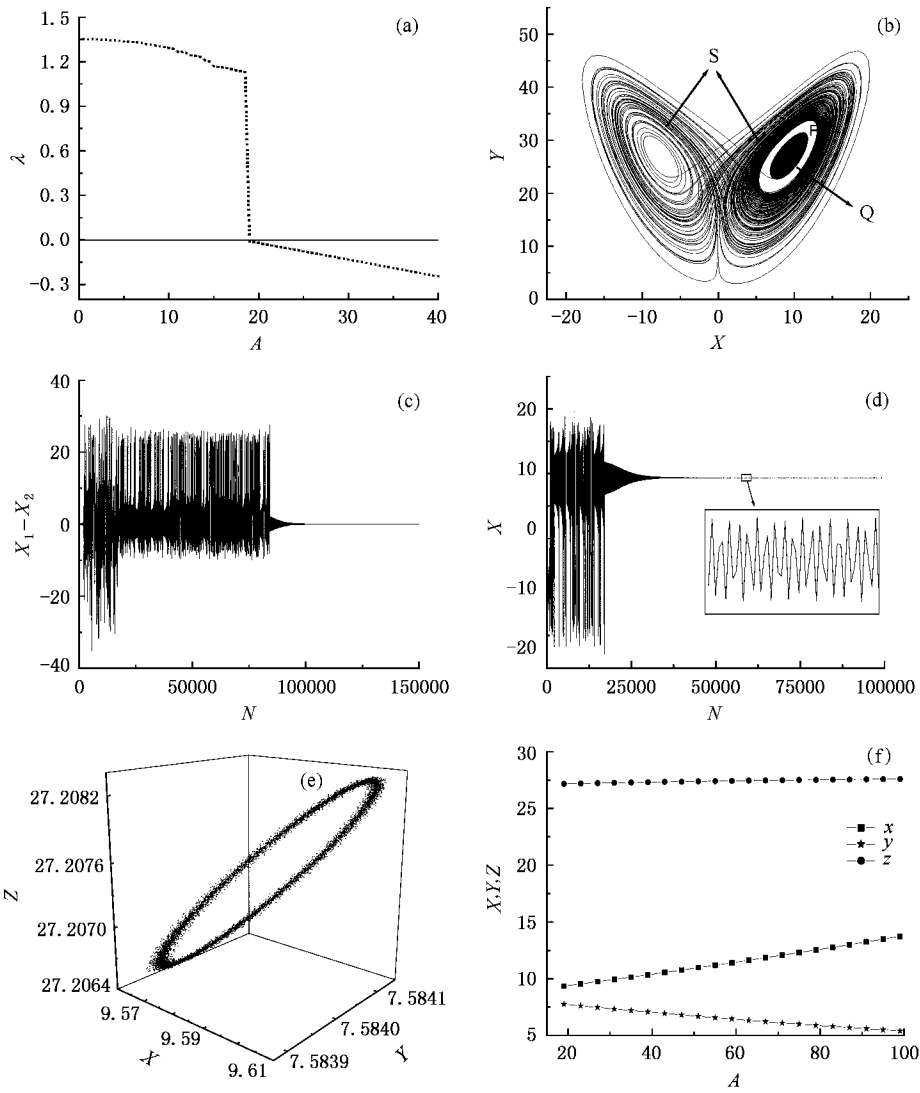


图 1 (a)最大 Lyapunov 指数 λ 随外强迫振幅 A 的变化 (b)相空间在 X - Y 平面上的投影 (c)从两个邻近初值出发的轨道其 X 分量之差 ($X_1 - X_2$) 随时间的变化 (N 为迭代步数(下同)) (d) Lorenz 系统的 X 分量 (e) 去掉 8×10^4 步后系统的相空间图 (f) 稳定点的 3 个坐标随外强迫振幅的变化

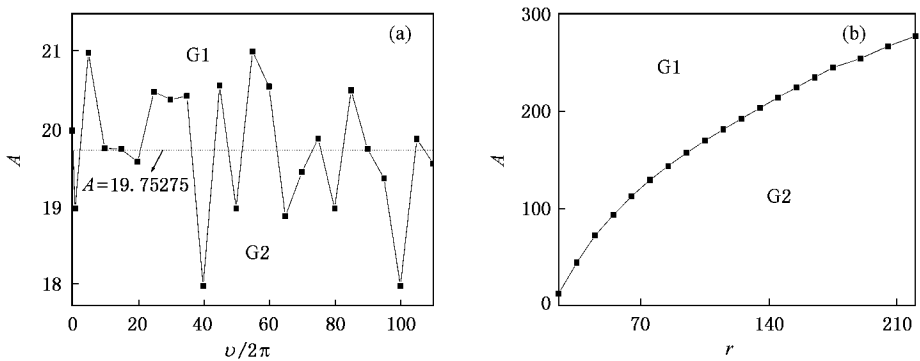


图 2 外强迫临界振幅的阈值图 (a) A 与 ν (b) A 与 r

随着 ν 的增大, 临界振幅 A 的值一直在 $A_1 = 19.75275$ 附近振荡变化, 且其变化的幅度较小, 这可以从图 2(a) 中得到证实. 当 Rayleigh 数 r 取不同的值时, 图 2(b) 给出了准周期外强迫的临界振幅 A 相应的变化, 由图中不难发现, 准周期外强迫的临界振幅几乎随着系统的 Rayleigh 数的增加而线性增大.

4. 结果与讨论

本文研究了准周期外强迫作用下 Lorenz 系统的动力学行为, 描述了产生 SNA 的一种新机制, 它的产生伴随着系统 Lyapunov 指数的突变, 即当外部准周期强迫的振幅增加到某个阈值时, 系统的动力学特征发生了根本性的变化, 系统由混沌状态转变为 SNA. 并且发现在外强迫的不断作用下, 系统的混沌特性可以完全消除, 其相空间最终被压缩到一个准周期环上, 即系统适应外强迫的作用, 其状态变量被压缩到一个稳定的不动点上, 并以该不动点为中心作准周期运动. 随着准周期外强迫振幅的加大, Lorenz 系统的不稳定不动点逐渐沿着 X 轴的正方向和 Y 轴的负方向移动, 而不稳定不动点在 Z 轴方向

的分量变化十分缓慢, 其值有微弱的增大趋势, 在外部强迫幅度变化较小的情况下, 这种变化几乎可以忽略.

受准周期外强迫作用的系统能够产生丰富的动力学行为. 从本文的研究结果可以看出, 它可以将系统的不稳定轨道稳定到一个稳定点上, 并以该稳定不动点为中心作准周期振荡. 鉴于此, 在实际中我们可以利用其来控制混沌. 另外, 根据 Pecora 等人^[20, 21]的思想, 两个完全相同或几乎完全一样的非线性系统在同一个人外部驱动的作用下可以实现同步, 而 SNA 由于其最大非零 Lyapunov 指数为负, 因此, 两个完全一样且能够产生 SNA 的非线性系统很容易在外部驱动的作用下达到同步. 由于 SNA 本身所具有的奇怪吸引子特性, 它在一定的有限时间间隔内仍然具有混沌系统所具有的某些性质, 故可以用此类非线性系统所产生的复杂信号来隐藏通信信号实现保密通信. 因此, SNA 在商业和军事等领域有着良好的应用前景, 目前有关这方面的研究已经开始^[8]. 众所周知, 大气系统是一个典型的非线性系统, 但是许多气候因子的变化还是具有某种准周期性, 本文的工作也许能为气象学的研究提供一种新的思路.

-
- [1] Choe Chol-Ung, Höhne Klaus, Benner Hartmut, Kivshar Yuri S. 2005 *Phys. Rev. E* **72** 036206
- [2] Park Eun-Hyoung, Zaks Michael A, Kurths Jürgen 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6627
- [3] Grebogi E, Ott C, Pelikan S, Yorke J A 1984 *Physica D* **13** 261
- [4] Kaneko K 1984 *Prog. Theor. Phys.* **71** 1112
- [5] Nishikawa T, Kaneko K 1996 *Phys. Rev. E* **54** 6114
- [6] Heagy J F, Hammel S M 1994 *Physica D* **70** 140
- [7] Yalcinkaya T, Lai Y C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 5039
- [8] Ramaswamy Ramakrishna 1997 *Phys. Rev. E* **56** 7294
- [9] Prasad Awadhesh, Mehra Vishal, Ramaswamy Ramakrishna 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4127
- [10] Vadivasova T E, Sosnovtseva O V, Balanov A G, Astakhov V V 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4618
- [11] Prasad Awadhesh, Biswal Bibudhananda, Ramaswamy Ramakrishna 2003 *Phys. Rev. E* **68** 037201
- [12] Wang X G, Zhan M, Lai Choy-Heng, Lai Y C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 074102
- [13] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 30 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 30]
- [14] Feng G L, Dong W J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2347 (in Chinese) [封国林、董文杰 2003 物理学报 **52** 2347]
- [15] Hou W, Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3940 (in Chinese) [侯 威、封国林、董文杰 2005 物理学报 **54** 3940]
- [16] He W P, Feng G L, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** in press (in Chinese) [何文平、封国林、李建平 2006 物理学报 **55** 待发表]
- [17] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [18] Pikovsky A S, Feudel U 1995 *Chaos* **5** 253
- [19] Lai Y C 1996 *Phys. Rev. E* **53** 57
- [20] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [21] Pecora L M, Carroll T L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374

Dynamics of the Lorenz system under quasiperiodic driving ^{*}

He Wen-Ping^{1,2)} Feng Guo-Lin^{2,3)†} Gao Xin-Quan³⁾ Chou Ji-Fan¹⁾

1) (*Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000; Department of Physics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China*)

2) (*Key Laboratory of Regional Climate-Environment for Temperate East Asia, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

3) (*Laboratory for Climate Studies of China Meteorological Administration, National Climate Center, Beijing 100081, China*)

(Received 27 December 2005 ; revised manuscript received 14 January 2006)

Abstract

We have investigated the dynamics of the Lorenz system under quasiperiodic driving. When the forcing amplitude is increased to certain critical value, the dynamics changes fundamentally. Therefore a new mechanism for the creation of the strange nonchaotic attractor is advanced in this paper. When the forcing amplitude is increased, the strange attractor is replaced by a strange nonchaotic attractor, eventually the phase space is suppressed into an invariant quasiperiodic torus. Numerical results show that the critical amplitude of the force is roughly proportional to the Rayleigh parameter, but slightly influenced by its frequency.

Keywords : quasiperiodicity, Lorenz system, strange nonchaotic attractor

PACC : 9260X

^{*} Project supported by the National Natural Sciences Foundation of China (Grant No. 40325015) and the National Key Program Development for Basic Research (Grant No. 2006CB400503).

[†] Corresponding author. E-mail: feng_gl@sina.com