

# 弹性力学的重构核粒子边界无单元法<sup>\*</sup>

秦义校<sup>1)2)</sup> 程玉民<sup>1)†</sup>

1) 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

2) 太原科技大学, 太原 030024)

(2006 年 1 月 17 日收到, 2006 年 2 月 28 日收到修改稿)

将重构核粒子法(RKPM)和边界积分方程方法结合,提出了一种新的边界积分方程无网格方法——重构核粒子边界无单元法(RKP-BEFM).对弹性力学问题,推导了其重构核粒子边界无单元法的公式,研究其数值积分方案,建立了重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程,并推导了重构核粒子边界无单元法的内点位移和应力积分公式.重构核粒子法形成的形函数具有重构核函数的光滑性,且能再现多项式在插值点的精确值,所以本方法具有更高的精度.最后给出了数值算例,验证了本方法的有效性和正确性.

关键词: 重构核粒子法, 弹性力学, 边界无单元法

PACC: 0200, 4630C

## 1. 引 言

起源于 1977 年的光滑粒子法,标志着无网格方法的产生<sup>[1]</sup>.1992 年以来,无网格方法迅速发展,其研究和应用领域不断拓展.目前,无网格方法形成形函数的方法主要有光滑粒子法、移动最小二乘法、单位分解法、径向基函数法、重构核粒子法和复变量移动最小二乘法等.与有限元法一样,无网格方法一般采用变分原理或加权残数法建立未知量求解方程<sup>[2-8]</sup>,而局部边界积分方程法是另外一种形式的全域无网格方法,其在整个求解域的每个离散点为中心的子域构造形函数,在每个子域建立局部边界积分方程,最终建立整体域节点未知量求解方程<sup>[9,10]</sup>.1995 年, Liu 提出了重构核粒子法(reproducing kernel particle method, RKPM)<sup>[11,12]</sup>,该方法在光滑粒子法中引入核函数修正项,使理论上精确重构有限域的近似函数成为可能.基于重构核粒子法建立的无网格方法已广泛应用于力学分析的各领域,成为无网格方法的重要分支.

1997 年, Mukherjee 发表了在求解域的边界配置节点、采用边界积分方程形成求解方程组的边界点法(boundary node method, BNM),这是边界积分方程

的无网格方法的开端<sup>[13,14]</sup>.到目前为止形成的边界积分方程无网格方法还有边界无单元法(boundary element-free method, BEFM)<sup>[15,16]</sup>、杂交边界点法(hybrid boundary node method, HBNM)<sup>[17]</sup>、边界点插值法(boundary point interpolation method, BPIM)<sup>[18,19]</sup>和边界云团法(boundary cloud method, BCM)<sup>[20]</sup>等,其中边界无单元法作为边界积分方程直接解法,避免了处理本质边界条件的困难.

本文采用重构核粒子法构造形函数,提出了重构核粒子边界无单元法(reproducing kernel particle boundary element free method, RKP-BEFM).对弹性力学问题,推导了其重构核粒子边界无单元法的公式,研究其数值积分方案,建立了重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程,并给出了重构核粒子边界无单元法的内点位移和应力积分公式.重构核粒子法形成的形函数具有重构核函数的光滑性,且能再现多项式在插值点的精确值,所以本文方法具有更高的精度.作为直接方法,重构核粒子边界无单元法既具有边界元法半解析、精度高和降维等优点,又具有无网格方法的优点,也可方便地施加边界条件.最后通过数值算例分析,验证了本文方法的有效性和正确性.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10571118)和上海市重点学科建设项目(批准号:Y0103)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: ymcheng@sh163.net; ymcheng@staff.shu.edu.cn

## 2. 重构核粒子法的形函数

### 2.1. 重构核粒子法的核函数

重构核粒子法中,未知函数  $u(x)$  的近似函数  $u^a(x)$  可表示为

$$u^a(x) = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_a(x; x-s) u(s) ds, \quad (1)$$

其中  $\bar{\Phi}_a(x; x-s)$  为改进的核函数

$$\bar{\Phi}_a(x; x-s) = \alpha(x; x-s) \Phi_a(x-s), \quad (2)$$

也称为重构核,  $\Phi_a(x-s)$  为权函数, 对有限域问题一般写成

$$\Phi_a(x-s) = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{x-s}{a}\right), \quad (3)$$

$\alpha(x; x-s)$  称作修正函数

$$\begin{aligned} \alpha(x; x-s) &= \sum_{i=0}^N b_i(x) \chi(x-s)^i \\ &\equiv \mathbf{H}^T(x-s) \mathbf{b}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

这里

$$\mathbf{H}^T(x-s) = [1, (x-s), (x-s)^2, \dots, (x-s)^N], \quad (5)$$

$$\mathbf{b}^T(x) = [b_0(x), b_1(x), \dots, b_N(x)], \quad (6)$$

其中  $b_i(x)$  是满足重构条件的函数.

把(1)式用 Taylor 级数展开, 并将(2)–(6)式代入后得

$$u^a(x) = \bar{m}_0(x) u(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \bar{m}_n(x) u^{(n)}(x), \quad (7)$$

这里力矩

$$\begin{aligned} \bar{m}_n(x) &= \int_{\Omega} (x-s)^n \alpha(x; x-s) \Phi_a(x-s) ds \\ &= \sum_{k=0}^N b_k(x) m_{n+k}(x), \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$m_n(x) = \int_{\Omega} (x-s)^n \Phi_a(x-s) ds. \quad (9)$$

改进核函数的重构条件是

$$\bar{m}_0(x) = 1, \quad (10)$$

$$\bar{m}_i(x) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (11)$$

可得

$$\mathbf{M}(x) \mathbf{b}(x) = \mathbf{g}, \quad (12)$$

这里

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{H}^T(0) = [1, 0, \dots, 0], \quad (13)$$

$$\mathbf{M}(x) = \begin{bmatrix} m_0(x) & m_1(x) & \dots & m_N(x) \\ m_1(x) & m_2(x) & \dots & m_{N+1}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ m_N(x) & m_{N+1}(x) & \dots & m_{2N}(x) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中  $m_i(x)$  由(9)式确定.

因此,  $\mathbf{b}(x)$  可由下式求出:

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{g}. \quad (15)$$

于是, 重构核粒子法的核函数为

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_a(x; x-x_l) &= \Phi_a(x-x_l) \alpha(x; x-x_l) \\ &= \Phi_a(x-x_l) \mathbf{H}^T(x-x_l) \\ &\quad \times \mathbf{M}^{-1}(x) \mathbf{H}(0), \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $s = x_l$  是配置的节点或粒子.

### 2.2. 重构核粒子法的形函数

采用梯形积分, 含有满足重构条件的改进核  $\bar{\Phi}_a$  的重构方程式(1)变为

$$\begin{aligned} u^a(x) &\equiv \sum_{l=1}^{NP} \bar{\Phi}_a(x; x-x_l) u(x_l) \Delta x_l \\ &= \sum_{l=1}^{NP} \Psi_l^a(x) u_l, \end{aligned} \quad (17)$$

这里  $u_l = u(x_l)$ ,  $NP$  是节点或粒子总数,  $\Psi_l^a(x)$  是形函数, 且

$$\begin{aligned} \Psi_l^a(x) &= \bar{\Phi}_a(x; x-x_l) \Delta x_l \\ &= \Phi_a(x-x_l) \mathbf{H}^T(x-x_l) \mathbf{M}^{-1}(x) \\ &\quad \times \mathbf{H}(0) \Delta x_l, \end{aligned} \quad (18)$$

$\Delta x_l$  为一维情况下的梯形积分区间长度, 即

$$\Delta x_l = \frac{1}{2} (x_{l+1} - x_{l-1}). \quad (19)$$

二维情况下的重构核粒子形函数为

$$\Psi_l^a(x) = \bar{\Phi}_a(x; x-x_l) \Delta A_l, \quad (20)$$

其中  $\Delta A_l$  是相应粒子  $l$  的积分面积, 且  $\sum_{l=1}^I \Delta A_l = A_{\Omega}$ . 核函数  $\Phi_a(x-x_l)$  可以通过一维核函数的张量积获得

$$\begin{aligned} \Phi_a(x-x_l) &= \frac{1}{a_1} \Phi\left(\frac{x_1-x_{1l}}{a_1}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{a_2} \Phi\left(\frac{x_2-x_{2l}}{a_2}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

这里  $a_i$  是  $x_i$  方向的伸缩参数. 二维核函数的紧支域几何上呈矩形, 中心为  $x_l$ , 尺寸为  $2a_1 \times 2a_2$ .

二维情况下的修正函数表示为

$$\begin{aligned} & \alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \\ &= \sum_{|\beta|=0}^N b_{\beta_1 \beta_2}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1l})^{\beta_1} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2l})^{\beta_2}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$|\beta| = \sum_{i=1}^2 \beta_i, \quad (23)$$

系数  $b_{\beta_1 \beta_2}(\mathbf{x})$  由重构条件决定.

### 3. 弹性力学的重构核粒子边界无单元法

连续的、均匀的、各向同性的弹性体在体积力  $f_i$ 、面力  $t_i$  和边界位移约束作用下保持平衡, 位移  $u_i$ 、应变  $\epsilon_{ij}$  和应力  $\sigma_{ij}$  在小变形条件下满足如下的弹性力学基本方程:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} + f_i &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ \sigma_{ij} &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ \sigma_{ij} n_j &= \bar{t}_i, & \text{在 } \Gamma_t \text{ 上,} \\ u_i &= \bar{u}_i, & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上,} \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $\delta_{ij}$  是 Kronecker  $\delta$  函数,  $i, j = 1, 2, \Omega$  表示弹性体所在的区域,  $\Gamma$  为  $\Omega$  的边界,  $n_j$  为边界  $\Gamma$  的外法线方向余弦,  $\lambda$  和  $\mu$  是拉梅系数,  $\Gamma_u$  和  $\Gamma_t$  分别表示弹性体边界  $\Gamma$  上给定位移  $\bar{u}_i$  和面力  $\bar{t}_i$  的部分.

当不考虑体积力  $f_i$  时, 弹性力学平面问题的边界积分方程为<sup>[21, 22]</sup>

$$\begin{aligned} C_{ij}(q) u_j(q) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, q) t_j(p) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(p, q) u_j(p) d\Gamma, \quad (25) \end{aligned}$$

其中  $C_{ij}(q)$  为自由项,  $u_{ij}^*$ ,  $t_{ij}^*$  为弹性力学平面问题的 Kelvin 解

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right], \quad (26)$$

其中

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{(平面应变问题),} \\ \frac{\nu}{1+\nu} & \text{(平面应力问题),} \end{cases} \quad (27)$$

$G$  是材料的剪切模量,  $\nu$  是泊松比,  $u_{ij}^*$  的第一个下标  $i$  表示  $p$  点在  $x_i$  方向的位移分量, 第二个下标  $j$  表示作用于源点  $q$  的单位集中力指向  $x_j$  方向,  $r$  为场点  $p$  到单位集中力作用点即源点  $q$  之间的距离.

弹性体内场点  $p$  外法线方向余弦为  $n_i$  的任意截面上的面力  $t_{ij}^*$  为

$$\begin{aligned} t_{ij}^* &= -\frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} (1-2\bar{\nu}) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right\} \\ &\quad - (1-2\bar{\nu}) (n_j r_{,i} - n_i r_{,j}). \end{aligned} \quad (28)$$

由重构核粒子法构造任意边界点  $p$  的位移和面力的试函数

$$\begin{aligned} u_j^a(p) &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^a(p) u_j^I, \\ t_j^a(p) &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I^a(p) t_j^I, \end{aligned} \quad (29)$$

这里  $u_j^I$  和  $t_j^I$  是与  $p$  点相关的  $NP$  个边界节点中任一点  $x_I$  的位移和面力,  $\Psi_I^a(p)$  是与  $p$  点相关  $NP$  个边界节点中任一点  $x_I$  的形函数, 为简便起见, 记  $\Psi_I(p) = \Psi_I^a(p)$ .

将边界任意点  $p$  点的位移和面力的重构核粒子逼近函数(29)式代入整体边界积分方程式(25)得

$$\begin{aligned} C_{ij}(q^n) u_j(q^n) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, q^n) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(p) t_j^{I(p,I)} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(p, q^n) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(p) u_j^{I(p,I)} d\Gamma, \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $I(p, I)$  表示对  $p$  点有影响的  $NP$  个节点中第  $I$  个点的编号.

把整体边界  $\Gamma$  离散化成  $M$  个积分区域, 并依次将每个节点作为力的作用点即源点, 记作  $q^n$  ( $n = 1, \dots, N$ ). 在每个源点上依次施加单位集中力  $f_j^* = 1$ , 于是, 由(30)式可得弹性力学平面问题的重构核粒子边界无单元法的离散化边界积分方程

$$\begin{aligned} & C_{ij}(q^n) u_j(q^n) \\ &= \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(p, q^n) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(p) t_j^{I(p,I)} d\Gamma \\ &\quad - \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(p, q^n) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(p) u_j^{I(p,I)} d\Gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

对不考虑体积力的边值问题, 内点的边界积分方程为<sup>[21]</sup>

$$\begin{aligned} u_i(q) &= \int_{\Gamma} t_i(p) u_{ij}^*(p, q) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} u_i(p) t_{ij}^*(p, q) d\Gamma. \end{aligned} \quad (32)$$

将(29)式代入上式并离散化, 得

$$\begin{aligned} u_i(q) &= \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(p, q) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(p) t_j^{I(p,I)} d\Gamma \\ &\quad - \sum_{e=1}^M \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(p, q) \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(p) u_j^{I(p,I)} d\Gamma. \end{aligned} \quad (33)$$

由方程 (32) 和 (24) 可得到弹性体内任意点的应力

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma, \quad (34)$$

这里

$$D_{kij} = \frac{1}{r} \{ (1 - 2\nu) [\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)}, \quad (35)$$

$$S_{kij} = \frac{2G}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [ (1 - 2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} ] + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1 - 2\nu) [ 2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk} ] - (1 - 4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)}. \quad (36)$$

将 (29) 式代入 (34) 式并离散化, 得

$$\sigma_{ij} = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^{NP} t_k^{(X_p, l)} \int_{\Gamma_e} D_{kij} \Psi_l(p) \lambda d\Gamma - \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^{NP} u_k^{(X_p, l)} \int_{\Gamma_e} S_{kij} \Psi_l(p) \lambda d\Gamma. \quad (37)$$

### 4. 弹性力学的重构核粒子边界无单元法的数值实现

首先形成边界节点重构核粒子形函数.

本文核函数  $\Phi_a(x - x_l)$  采用高斯函数, 即

$$\Phi\left(\frac{x - x_l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{x-x_l}{\hat{c}}\right)^2} - e^{-\left(\frac{a}{\hat{c}}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{a}{\hat{c}}\right)^2}} & d \leq 1, \\ 0 & d > 1, \end{cases} \quad (38)$$

其中  $d = \frac{|x - x_l|}{a}$ ,  $\hat{c}$  是一个常数,  $a > 0$  是紧支域半径.

需要指出, 节点处核函数紧支域的大小的选取非常重要, 它直接关系到边界无单元法的计算精度. 其大小一般要求满足以下两个条件: 一是要保证所有节点的核函数紧支域的并集能覆盖整个求解域, 二是应保证矩阵  $M$  可逆. 为了提高精度和保证矩阵  $M$  不奇异, 节点核函数紧支域应尽可能大些, 但为了保持近似的局部特性, 节点核函数紧支域又不能

太大. 这里注意以下几点: 1) 由于  $\Phi_a$  选为正函数, 所以  $1, (x - s), (x - s)^2, \dots, (x - s)^N$  线性无关, 因此  $M$  是非奇异的; 2) 若  $\Phi_a(x - x_l) \in C^m(\Omega_x)$ , 则  $\Psi_l(x) \in C^m(\Omega)$ ; 3) 矩阵  $M$  及其微分需用相同的积分规则进行积分; 4) 形函数  $\Psi_l(x) \neq \delta_{ll}$ .

由 (14) 式, 本文取

$$M(x) = \begin{bmatrix} m_0(x) & m_1(x) \\ m_1(x) & m_2(x) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

对 (9) 式采用梯形积分, 有

$$m_n(x) = \sum_{l=1}^{NP} (x - x_l)^n \Phi_a(x - x_l) \Delta x_l. \quad (40)$$

代入 (18) 式即形成点  $x_l$  紧支域的形函数  $\Psi_l(x)$ .

由方程 (31) 可得

$$C_{ij}(q^n) \lambda_j(q^n) = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^{NP} t_j^{(X_p, l)} \int_{-1}^1 u_{ij}^*(p, q^n) \Psi_l(\xi) \mathcal{K}(\xi) \lambda \xi - \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^{NP} u_j^{(X_p, l)} \int_{-1}^1 t_{ij}^*(p, q^n) \Psi_l(\xi) \mathcal{K}(\xi) \lambda \xi, \quad (41)$$

其中

$$\mathcal{K}(\xi) = \left[ \left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (42)$$

下面进一步将边界离散方程 (41) 改写为矩阵形式, 最终形成所有边界配置节点位移和面力未知量的矩阵方程.

方程 (41) 可写为

$$C^m U^m + \sum_{e=1}^M \left[ \left( \int_{-1}^1 T^* \Psi \mathcal{K}(\xi) \lambda \xi \right) U^D \right] = \sum_{e=1}^M \left[ \left( \int_{-1}^1 U^* \Psi \mathcal{K}(\xi) \lambda \xi \right) T^D \right], \quad (43)$$

其中

$$C^m = \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m \\ C_{21}^m & C_{22}^m \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$U^m = [u_1^m \quad u_2^m]^T, \quad (45)$$

$$T^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$U^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1(\xi) & 0 & \Psi_2(\xi) & 0 & \dots & \Psi_{NP}(\xi) & 0 \\ 0 & \Psi_1(\xi) & 0 & \Psi_2(\xi) & \dots & 0 & \Psi_{NP}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$U^D = [u_1^{(X_p, 1)} \quad u_2^{(X_p, 1)} \quad u_1^{(X_p, 2)} \quad u_2^{(X_p, 2)} \quad \dots \quad u_1^{(X_p, NP)} \quad u_2^{(X_p, NP)}]^T, \quad (49)$$

$$T^D = [t_1^{(X_p, 1)} \quad t_2^{(X_p, 1)} \quad t_1^{(X_p, 2)} \quad t_2^{(X_p, 2)} \quad \dots \quad t_1^{(X_p, NP)} \quad t_2^{(X_p, NP)}]^T, \quad (50)$$

其中  $NP$  是积分点影响域内的节点, 为便于程序处理方便并节省计算时间,  $NP$  也可理解为所有边界配置节点, 但有相当多与积分点不相关的节点的紧支域并不覆盖积分点, 此时其形函数在积分点值为 0. 这样, 若任一节点  $n$  的位移和面力向量分别记作  $u_i^n$  和  $t_i^n$ , 则边界节点总数为  $N$  时, 节点位移和面力向量  $U$  和  $T$  分别为

$$U = [u_1^1 u_2^1 u_1^2 u_2^2 \dots u_1^N u_2^N]^T \\ = [u_1 u_2 \dots u_{2N}]^T, \quad (51)$$

$$T = [t_1^1 t_2^1 t_1^2 t_2^2 \dots t_1^N t_2^N]^T = [t_1 t_2 \dots t_{2N}]^T. \quad (52)$$

对源点  $n$ , 沿边界积分子域逐一完成积分运算后代数叠加, 可得

$$C^n U^n + \tilde{H}^n U = G^n T, \quad (53)$$

其中

$$\tilde{H}^n = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11}^{n1} & \tilde{h}_{12}^{n1} & \tilde{h}_{11}^{n2} & \tilde{h}_{12}^{n2} & \dots & \tilde{h}_{11}^{nN} & \tilde{h}_{12}^{nN} \\ \tilde{h}_{21}^{n1} & \tilde{h}_{22}^{n1} & \tilde{h}_{21}^{n2} & \tilde{h}_{22}^{n2} & \dots & \tilde{h}_{21}^{nN} & \tilde{h}_{22}^{nN} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$G^n = \begin{bmatrix} g_{11}^{n1} & g_{12}^{n1} & g_{11}^{n2} & g_{12}^{n2} & \dots & g_{11}^{nN} & g_{12}^{nN} \\ g_{21}^{n1} & g_{22}^{n1} & g_{21}^{n2} & g_{22}^{n2} & \dots & g_{21}^{nN} & g_{22}^{nN} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

并且

$$\tilde{h}_{ij}^{nl} = \sum_{e=1}^M \sum_{\alpha=1}^{n_g} t_{ij}^{*} (p(\xi_\alpha), q^n) \Psi_l(\xi_\alpha) \mathcal{K}(\xi_\alpha) W_\alpha, \quad (56)$$

$$g_{ij}^{nl} = \sum_{e=1}^M \sum_{\alpha=1}^{n_g} u_{ij}^{*} (p(\xi_\alpha), q^n) \Psi_l(\xi_\alpha) \mathcal{K}(\xi_\alpha) W_\alpha, \quad (57)$$

其中  $n_g$  是积分点数,  $\xi_\alpha$  是积分点坐标,  $W_\alpha$  是对应于  $\xi_\alpha$  的积分权值.

当方程(53)系数计算完成后, 若  $n = I$ , 则  $u_i^n = u_i^I$ , 它们的系数代数叠加进行合并处理, 得到边界节点位移分量和面力分量之间的矩阵关系式

$$HU = GT, \quad (58)$$

且有形式

$$H = \begin{bmatrix} h_{11}^{11} & h_{12}^{11} & h_{11}^{12} & h_{12}^{12} & \dots & h_{11}^{1N} & h_{12}^{1N} \\ h_{21}^{11} & h_{22}^{11} & h_{21}^{12} & h_{22}^{12} & \dots & h_{21}^{1N} & h_{22}^{1N} \\ h_{11}^{21} & h_{12}^{21} & h_{11}^{22} & h_{12}^{22} & \dots & h_{11}^{2N} & h_{12}^{2N} \\ h_{21}^{21} & h_{22}^{21} & h_{21}^{22} & h_{22}^{22} & \dots & h_{21}^{2N} & h_{22}^{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ h_{11}^{N1} & h_{12}^{N1} & h_{11}^{N2} & h_{12}^{N2} & \dots & h_{11}^{NN} & h_{12}^{NN} \\ h_{21}^{N1} & h_{22}^{N1} & h_{21}^{N2} & h_{22}^{N2} & \dots & h_{21}^{NN} & h_{22}^{NN} \end{bmatrix}. \quad (59)$$

矩阵  $G$  由  $G^n$  可直接组装形成, 与  $H$  的形式相同.

(58) 式中, 如果  $U$  中的第  $m$  行位移为已知, 则  $T$  中的第  $m$  行面力未知, 将这两个元素对换, 并相应的将  $H$  和  $G$  的第  $m$  列元素乘以  $(-1)$  也对换, 左端的列向量全是未知边界量, 记为  $X$ , 其系数矩阵记作  $A$ ; 右端的列向量全是已知边界量, 其与系数矩阵的乘积记为列向量  $B$ , 这样(58)式可化为如下形式的未知量线性方程组:

$$AX = B, \quad (60)$$

由此可确定所有未知的边界节点位移分量和面力分量.

上述推导过程中, 由于边界任意一点的位移和面力是通过形函数用边界节点的位移和面力来表示的, 故可以直接施加边界条件.

由(33)式得内点  $j$  位移计算矩阵式为

$$U^j = \sum_{e=1}^M \left[ \left( \int_{-1}^1 U^* \Psi \mathcal{K}(\xi) \lambda d\xi \right) T^D \right] \\ - \sum_{e=1}^M \left[ \left( \int_{-1}^1 T^* \Psi \mathcal{K}(\xi) \lambda d\xi \right) U^D \right]. \quad (61)$$

同理, 由(37)式可得

$$\sigma_{ij} = \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^{NP} t_k^{(X, p, l)} \sum_{\alpha=1}^{n_g} D_{kij} \Psi_l(\xi_\alpha) \mathcal{K}(\xi_\alpha) W_\alpha \\ - \sum_{e=1}^M \sum_{l=1}^{NP} u_k^{(X, p, l)} \sum_{\alpha=1}^{n_g} S_{kij} \Psi_l(\xi_\alpha) \mathcal{K}(\xi_\alpha) W_\alpha. \quad (62)$$

平面问题的重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程(41)中, 涉及以下两式的积分:

$$\text{Part}_- u_{ij}^I = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^{*} (p, q^n) \Psi_l(p) \lambda d\Gamma \\ = \int_{-1}^1 u_{ij}^{*} (p, q^n) \Psi_l(\xi) \mathcal{K}(\xi) \lambda d\xi, \quad (63)$$

$$\text{Part}_- t_{ij}^I = \int_{\Gamma_e} t_{ij}^{*} (p, q^n) \Psi_l(p) \lambda d\Gamma \\ = \int_{-1}^1 t_{ij}^{*} (p, q^n) \Psi_l(\xi) \mathcal{K}(\xi) \lambda d\xi. \quad (64)$$

这两个积分在(56)式和(57)式中已经被离散化形式取代, 如果源点不在积分子域  $\Gamma_e$  上, 积分无奇异性, 可以直接采用高斯积分法得到足够准确的积分结果. 此时, 在(56)和(57)式中,  $n_g$  是高斯积分点数,  $\xi_\alpha$  是高斯积分点坐标,  $W_\alpha$  是对应于  $\xi_\alpha$  的高斯积分权值.

对(63)式和(64)式, 若源点  $q^n$  位于当前积分域  $\Gamma_e$ . 基本解导致积分奇异性, 奇异积分处理如下:

1) (63)式奇异性处理

对基本解(26)式, 令

$$u_{ij}^* = \hat{u}_{ij}^* + \bar{u}_{ij}^* , \quad (65)$$

其中

$$\hat{u}_{ij}^* = \frac{(3 - 4\nu)\delta_{ij}}{8\pi G(1 - \nu)} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ,$$

$$\bar{u}_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \cdot \frac{(x_i^p - x_i^q)(x_j^p - x_j^q)}{r^2} , \quad (66)$$

这样 (63) 式可化为

$$\text{Part. } u_{ij}^l = \int_{-1}^1 \hat{u}_{ij}^*(p, q^n) \Psi_l(\xi) J(\xi) d\xi$$

$$+ \int_{-1}^1 \bar{u}_{ij}^*(p, q^n) \Psi_l(\xi) J(\xi) d\xi \quad (67)$$

其中,  $l = 1, 2, \dots, NP$ ; 第一部分是一个积分核为

$\ln \frac{1}{r}$  的对数奇异积分, 可采用对数奇异积分进行处

理, 而第二部分则非奇异, 仍然采用高斯积分。

### 2.1.6 式奇异性处理

注意到 (28) 式基本解包含因子  $\frac{1}{r}$ , 可知 (64)

式是一个核带有  $\frac{1}{r}$  的奇异积分, 当源点  $q^n$  位于当前

积分域  $\Gamma_e$  中点, 可采用柯西主值积分进行处理, 当

源点  $q^n$  不位于当前积分域  $\Gamma_e$  的中点, 仍然采用高

斯积分处理, 但应注意此时应采用高斯积分点与边

界配置节点不重合的积分点方案。

综合高斯积分和奇异积分运算, 即可完成 (56)

和 (57) 式计算, 最终完成方程 (60) 求解。在求得边界

基本未知量基础上, 利用 (29) 式可求得边界任意点

未知面力和未知位移。再由方程式 (24) 求出边界任

意点应力。由 (61) 式可求得内点位移, 并进一步求得

内点应力。

## 5. 数值算例

**例 1** 无限大均匀弹性介质柱状空腔受内压问题, 其横截面如图 1 所示。剪切模量  $G = 94500\text{MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.1$ , 空腔直径  $d = 6\text{m}$ , 柱状空腔内压力  $p = 100\text{MPa}$ 。

利用本文提出的重构核粒子边界无单元法进行计算, 在柱状空腔周向均匀配置 24 个节点, 注意按照边界积分规定此时节点顺序应顺时针依次布置。计算所得的介质内  $x_1$  轴上的点的位移和应力与解析解的比较分别如图 2 和图 3 所示。表 1 列出了应力计算的误差。可以看出, 本文提出的重构核粒子边界无单元法具有较高的精度。

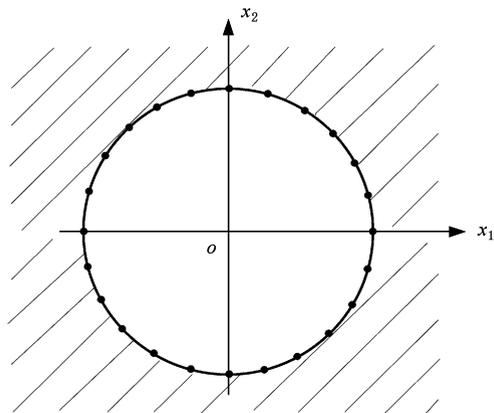


图 1 无限大弹性介质柱状空腔

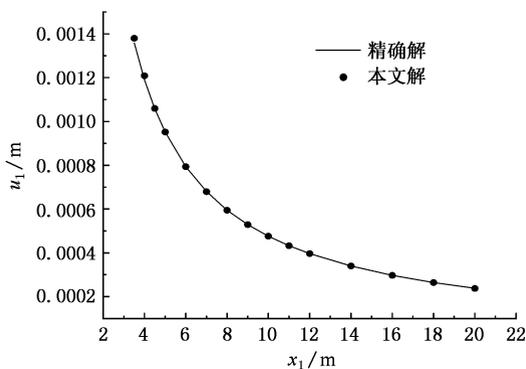


图 2  $x_1$  轴上的点在  $x_1$  方向的位移

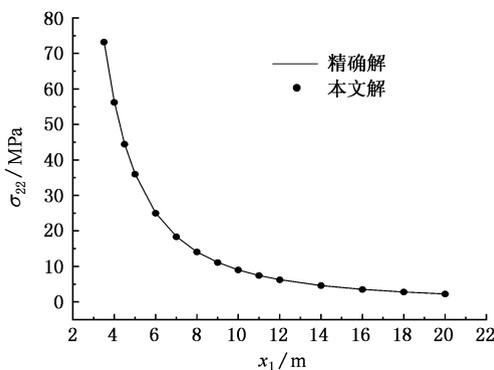


图 3  $x_1$  轴上的点的应力  $\sigma_{22}$

表 1  $x_1$  轴上的点的应力  $\sigma_{22}$  及其误差

离空腔中心距离/m	理论解/MPa	本文解/MPa	误差/%
3.5	73.4	73.128	0.30
4	56.25	56.168	0.15
6	25	24.905	0.38
10	9.0	8.965	0.39
20	2.25	2.241	0.40

**例 2** 研究单位厚度中心圆孔平面板在对边均布力作用下中心孔周围应力集中和变形情况。材料的弹性剪切模量  $G = 80000\text{MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ 。

均布面力为  $p = 100\text{MPa}$  ,中心孔半径  $r = 1.0\text{m}$  ,方板边长  $2a = 20\text{m}$  .

利用本文提出的重构核粒子边界无单元法进行计算.考虑到对称性,取 1/4 模型进行分析.这里边界配置 32 个节点,如图 4 所示.计算所得的  $x_1 = 0$  边界上的节点在  $x_1$  方向的应力如图 5 所示,  $x_2 = 0$

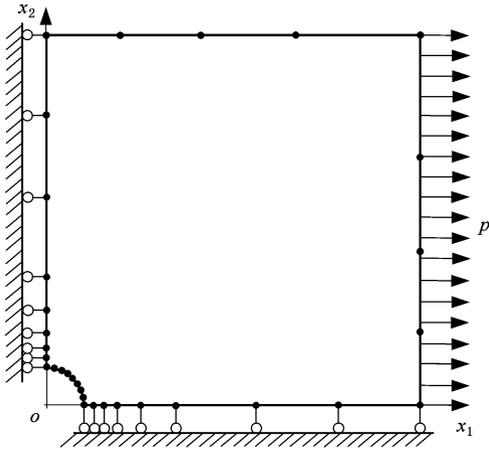


图 4 1/4 中心圆孔方板

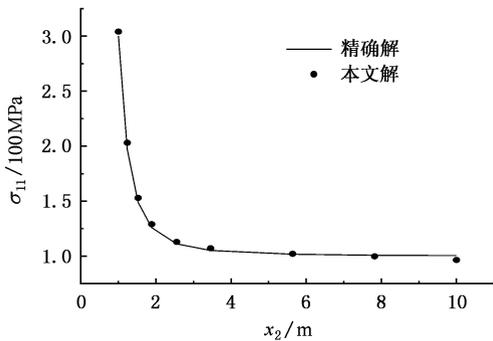


图 5  $x_1 = 0$  边界上的节点在  $x_1$  方向的应力

边界上的节点在  $x_1$  方向的位移如图 6 所示.在图 5 中,  $x_2$  轴线上孔边节点的  $x_1$  方向正应力为  $304.08\text{MPa}$  ,应力集中系数  $k = 3.04$  ,理论值  $k = 3$  .可以看出,本文方法求得的解具有较高精度.

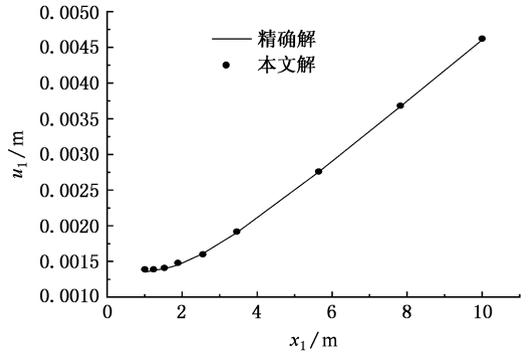


图 6  $x_2 = 0$  边界上的节点在  $x_1$  方向的位移

### 6. 结论与讨论

本文将重构核粒子法和边界积分方程方法结合,提出了重构核粒子边界无单元法.对弹性力学问题,推导了其重构核粒子边界无单元法的公式,研究其数值积分方案,建立了重构核粒子边界无单元法离散化边界积分方程,并推导了重构核粒子边界无单元法的内点位移和应力积分公式.数值算例表明,本文提出的重构核粒子边界无单元法具有较高计算精度.

本文方法是边界积分方程无网格方法的直接解法,边界积分方程中的基本未知量是节点的待求真值,可以方便施加边界条件,便于工程应用.

[ 1 ] Gingold R A , Monaghan J J 1977 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **181** 375  
 [ 2 ] Nayroles B , Touzot G , Villon P 1992 *Computational Mechanics* **10** 307  
 [ 3 ] Belytschko T , Krongauz Y , Organ D *et al* 1996 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139** 3  
 [ 4 ] Liu W K , Jun S , Zhang Y F 1995 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20** 1081  
 [ 5 ] Zhang X , Song K Z , Lu M W *et al* 2000 *Computational Mechanics* **26** 333  
 [ 6 ] Zhang X , Song K Z , Lu M W 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 43 ( in Chinese ) 张 雄、宋康祖、陆明万 2003 *力学学报* **35** 43 ]

[ 7 ] Cheng Y M , Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 ( in Chinese ) [ 程玉民、李九红 2005 *物理学报* **54** 4463 ]  
 [ 8 ] Li S C , Cheng Y M , Wu Y F 2005 *Computational Mechanics* **35** 470  
 [ 9 ] Zhu T , Zhang J D , Atluri S N 1998 *Computational Mechanics* **21** 223  
 [ 10 ] Atluri S N , Kim H G , Cho J Y 1999 *Computational Mechanics* **24** 348  
 [ 11 ] Liu W K , Jun S , Li S *et al* 1995 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38** 1655  
 [ 12 ] Chen J S , Pan C , Wu C T *et al* 1996 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139** 195

- [ 13 ] Mukherjee Y X , Mukherjee S 1997 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40** 797
- [ 14 ] Chati M K , Paulino G H , Mukherjee S 2001 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50** 2233
- [ 15 ] Cheng Y M , Chen M J 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 181 ( in Chinese )  
[ 程玉民、陈美娟 2003 力学学报 **35** 181 ]
- [ 16 ] Cheng Y M , Peng M J 2005 *Science in China Ser. G Physics , Mechanics & Astronomy* **48** 641
- [ 17 ] Zhang J , Yao Z 2002 *Acta Mechanica Solida Sinica* **15** 36
- [ 18 ] Gu Y T , Liu G R 2002 *Computational Mechanics* **28** 47
- [ 19 ] Gu Y T , Liu G R 2003 *Engineering Analysis with Boundary Elements* **27** 905
- [ 20 ] Li G , Aluru N R 2003 *Engineering Analysis with Boundary Elements* **27** 57
- [ 21 ] Ji X , Zang Y L , Cheng Y M 1997 *Advances in Boundary Element Methods and the General Package* ( Shanghai : Tongji University Press ) ( in Chinese ) [ 嵇醒、臧跃龙、程玉民 1997 边界元法进展及通用程序(上海 同济大学出版社) ]
- [ 22 ] Cheng Y , Ji X 1997 *Acta Mechanica Solida Sinica* **10** 246

## Reproducing kernel particle boundary element-free method for elasticity \*

Qin Yi-Xiao<sup>1,2)</sup> Cheng Yu-Min<sup>1)†</sup>

<sup>1</sup> *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics , Shanghai University , Shanghai 200072 , China* )

<sup>2</sup> *Taiyuan University of Science and Technology , Taiyuan 030024 , China* )

( Received 17 January 2006 ; revised manuscript received 28 February 2006 )

### Abstract

By combining the reproducing kernel particle method ( RKPM ) and boundary integral equation method for elasticity , the reproducing kernel particle boundary element-free ( RKP-BEF ) method is presented in this paper. Formulae for the RKP-BEF method are derived. The discrete boundary integral equations of the RKP-BEF method are established by considering the numerical integral schemes and the treatment of singular integrals , and the formulae of the displacement and stress of inner points for the RKP-BEF method are given. The RKP-BEF method has a higher precision as the smoothness of the shape function of RKP method is the same as that of the kernel function , and the values of polynomials at interpolating points can be exactly reconstructed. Numerical examples are given for verifying the effectiveness and correctness of the RKP-BEF method presented in this paper.

**Keywords** : reproducing kernel particle method , elasticity , boundary element-free method

**PACC** : 0200 , 4630C

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10571118 ) and the Shanghai Leading Academic Discipline Program ( Grant No. Y0103 ).

† E-mail : ymcheng@sh163.net ; ymcheng@staff.shu.edu.cn