第 55 卷 第 7 期 2006 年 7 月
1000-3290/2006/55(07)/3229-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.7,July,2006

厄尔尼诺-南方涛动时滞海-气振子耦合模型*

莫嘉琪[1)2)†]　王　辉[3)]　林万涛[4)]

1)(安徽师范大学,芜湖　241000)

2)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海　200240)

3)(中国气象科学研究院,北京　100081)

4)(中国科学院大气物理研究所,北京　100029)

(2005 年 10 月 24 日收到;2005 年 12 月 7 日收到修改稿)

研究了一个时滞海-气振子模型.利用摄动理论和方法,得到了海-气振子模型解的渐近展开式.

关键词:非线性,时滞,厄尔尼诺-南方涛动,海-气振子

PACC:0230,0200

1. 引　　言

上世纪以来,关于厄尔尼诺-南方涛动(ENSO)年际变化方面已经有许多研究,对赤道海-气耦合系统的认识和模拟有了较大的进展[1].McCreary 提出了一个关于 ENSO 振荡性的机理[2],它是基于赤道副热带在西海岸海水上涌 Rossby 波的影响提出来的.Suarez 和 Schopf 引入了一个 ENSO 时滞振荡机理[3].它是由具有正和负反馈的时滞微分方程来表示的.由赤道东太平洋局部海-气耦合形成的正反馈和在东太平洋耦合区域内的由自由 Rossby 波产生的传播并从西海岸返回的负反馈而形成的.

厄尔尼诺-南方涛动是涉及到赤道太平洋海-气交互的自然现象.ENSO 现象在国际学术界中是非常值得关注的研究对象[4—10].莫嘉琪等人在大气物理,海洋气候,动力系统等方面也研究了一些有关的非线性问题[11—20].近来许多学者已经研究了许多非线性问题的近似求解理论[21—25].本文是利用一个简单而有效的非线性摄动方法来研究 ENSO 时滞海-气振子的模型.

2. 赤道太平洋 SST 模型

ENSO 时滞振荡模型是假设在西太平洋信风作用影响到东太平洋的海表温度(SST)异常.这里假设在 Niño-4 区域(5°S—5°N,160°E—150°W)信风强度异常是线性地影响到 Niño-3 区域(5°S—5°N,150°E—90°W)的 SST 异常.我们能够建立如下赤道太平洋的非线性时滞模型[10]:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=a\tau_1-b_1\tau_1(t-\eta)-\varepsilon T^3,\tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}t}=dT-R_{\tau_1}\tau_1,\tag{2}$$

其中 T 为区域 Niño-3 的 SST 异常,τ_1 为在区域 Niño-4 的信风强度异常,η 为西太平洋转到东太平洋信风传播波的时间,a 为关于 T 的正反馈系数,b_1 为由于在西海岸反射波的负反馈系数,d 为联系到 Niño-3 区域的 SST 异常到 Niño-4 区域的信风强度异常的系数,R_{τ_1} 为信风衰减系数,ε 为 SST 的立方衰减系数.这里还假设 $b_1=c\varepsilon$,其中 c 为正的常数,而 ε 为正的小参数.

3. SST 的摄动解

现来求解非线性时滞耦合系统(1),(2).令

$$T(t)=T_0(t)+T_1(t)\varepsilon+T_2(t)\varepsilon^2+\cdots,\tag{3}$$

$$\tau_1(t)=\tau_{10}(t)+\tau_{11}(t)\varepsilon+\tau_{12}(t)\varepsilon^2+\cdots.\tag{4}$$

将(3),(4)式代入方程(1),(2),按 ε 展开非线性

* 国家自然科学基金(批准号:90111011 和 10471039)、国家重点基础研究发展计划项目(批准号:2003CB415101-03 和 2004CB418304)、中国科学院创新方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:N.E03004).

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

项,合并同次幂项的系数.由 ε^0 项,可得

$$\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t} = a\tau_{10}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{10}}{\mathrm{d}t} = dT_0 - R_{\tau_1}\tau_{10}. \tag{6}$$

不难得到系统(5),(6)的解为

$$T_0(t) = C_{01}\exp(\lambda_1 t) + C_{02}\exp(\lambda_2 t), \tag{7}$$

$$\tau_{10}(t) = \frac{C_{01}\lambda_1}{a}\exp(\lambda_1 t) + \frac{C_{02}\lambda_2}{a}\exp(\lambda_2 t), \tag{8}$$

其中 C_{01},C_{02} 为任意常数,而

$$\lambda_i = \frac{1}{2}[-R_{\tau_1} \mp \sqrt{R_{\tau_1}^2 + 4ad}], i = 1,2.$$

由展开式,对于 ε^1 的系数,有

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = a\tau_{11} + c\tau_{10}(t-\eta) - T_0^3, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{11}}{\mathrm{d}t} = dT_1 - R_{\tau_1}\tau_{11}. \tag{10}$$

由(7)—(9)式,可得

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = a\tau_{11} + c\sum_{i=1}^{2} C_{0i}\lambda_i\exp\lambda_i(t-\eta) - \Big[\sum_{i=1}^{2} C_{0i}\exp(\lambda_i t)\Big]^3.$$

于是可以求得系统(9),(10)的解为

$$\begin{aligned}T_1(t) ={}& C_{11}\exp(\lambda_1 t) + C_{12}\exp(\lambda_2 t) - \frac{acdt}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\exp\lambda_i(t-\eta)\\ &+ \frac{c}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}[\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)]\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\lambda_i^2\exp(-\lambda_i\eta)\\ &- \frac{ad}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i,j,k,r=1}^{2}(-1)^r\frac{C_{0i}C_{0j}C_{0k}[\exp(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)t - \exp(\lambda_r t)]}{(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k-\lambda_r)\lambda_r},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\tau_{11}(t) ={}& \frac{C_{11}\lambda_1}{a}\exp(\lambda_1 t) + \frac{C_{12}\lambda_2}{a}\exp(\lambda_2 t) - \frac{cdt}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\lambda_i\exp\lambda_i(t-\eta)\\ &- \frac{cd}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}[\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)]\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\lambda_i\exp(-\lambda_i\eta)\\ &- \frac{d}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i,j,k,r=1}^{2}(-1)^r\frac{C_{0i}C_{0j}C_{0k}[\exp(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)t - \exp(\lambda_r t)]}{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k-\lambda_r},\end{aligned} \tag{12}$$

其中 C_{11},C_{12} 为任意常数.

将(7),(8),(11),(12)式代入(3),(4)式,便得到耦合模型(1),(2)的一次近似的渐近解

$$\begin{aligned}T ={}& T_0 + T_1\varepsilon + \cdots = \sum_{i=1}^{2} C_i\exp(\lambda_i t) + \Big[-\frac{acdt}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\exp\lambda_i(t-\eta)\\ &+ \frac{c}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}[\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)]\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\lambda_i^2\exp(-\lambda_i\eta)\\ &- \frac{ad}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i,j,k,r=1}^{2}(-1)^r\frac{C_{0i}C_{0j}C_{0k}[\exp(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)t - \exp(\lambda_r t)]}{(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k-\lambda_r)\lambda_r}\Big]\varepsilon\\ &+ O(\varepsilon^2), 0 < \varepsilon \ll 1,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\tau ={}& \tau_{10} + \tau_{11}\varepsilon + \cdots = \sum_{i=1}^{2}\frac{C_i}{a}\lambda_i\exp(\lambda_i t) + \Big[-\frac{cdt}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\lambda_i\exp\lambda_i(t-\eta)\\ &- \frac{cd}{(\lambda_1-\lambda)_2^2}[\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)]\sum_{i=1}^{2}(-1)^i C_{0i}\lambda_i\exp(-\lambda_i\eta)\\ &- \frac{d}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i,j,k,r=1}^{2}(-1)^r\frac{C_{0i}C_{0j}C_{0k}[\exp(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)t - \exp(\lambda_r t)]}{\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k-\lambda_r}\Big]\varepsilon\\ &+ O(\varepsilon^2), 0 < \varepsilon \ll 1,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $C_i = C_{0i} + C_{1i}\varepsilon$, $i = 1,2$.

用上述方法还可以很方便地得到耦合模型(1),

(2)解的更高次的渐近展开式.

4. 解的精度比较

为了说明耦合系统(1),(2)解的渐近式(13),(14)的精度,现在我们选取模型的几个特殊的实际参数[13]:$a = 1.5 \times 10^2$ ℃ m^{2}N^{-1} yr^{-1},$d = 3.6 \times 10^{-2}$ ℃m^{-2}Nyr^{-1},$R = 2.0$yr^{-1},$\eta = 0.4$yr,$c = 0$,$\varepsilon = 0.1 \times 10^{-2}$,$C_{01} = 1$,$C_{02} = C_{11} = C_{12} = 0$,再用数值模拟的方法和展开式(13),(14)进行比较.

现在我们来比较对耦合系统模型用数值方法计算出的 T_{num},$\tau_{1\mathrm{num}}$ 的图形和间断点数值以及用摄动方法计算出的 T_{asp},$\tau_{1\mathrm{asp}}$ 的图形和间断点数值,如图1,图2和表1.

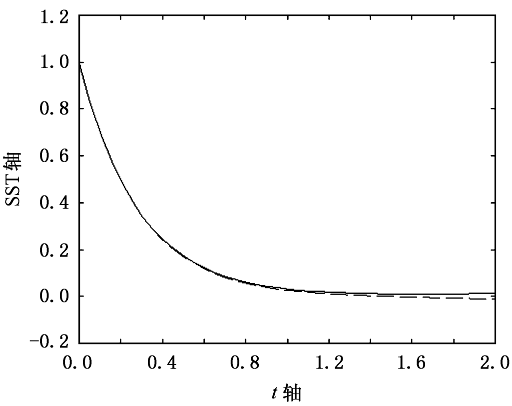

图1 SST 曲线(实线为 T_{asp};虚线为 T_{num})

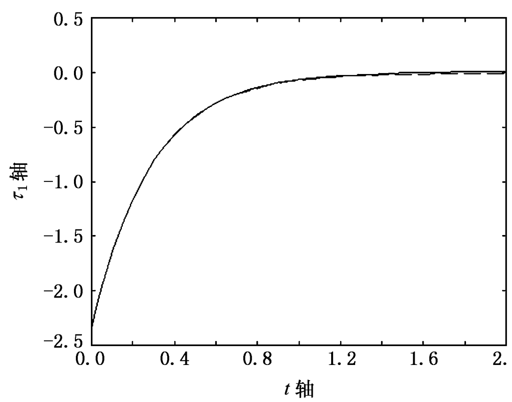

图2 τ_1 曲线(实线为 $\tau_{1\mathrm{asp}}$;虚线为 $\tau_{1\mathrm{num}}$)

表1 T_{num} 与 T_{asp},$\tau_{1\mathrm{num}}$ 与 $\tau_{1\mathrm{asp}}$ 的间断点的数值对照表

T	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
T_{num}	1.000	0.413	0.170	0.069	0.027	0.018	−0.007	−0.006	−0.011
T_{asp}	1.000	0.415	0.173	0.073	0.032	0.016	−0.010	0.010	0.014
$\tau_{1\mathrm{num}}$	−2.353	−0.974	−0.404	−0.169	−0/072	−0.033	−0.018	−0.013	−0.015
$\tau_{1\mathrm{asp}}$	−2.353	−0.973	−0.402	−0.165	−0.066	−0.025	−0.006	0.004	0.011

5. 结　　论

1. 从 T_{asp} 与 $\tau_{1\mathrm{asp}}$ 和 T_{num} 与 $\tau_{1\mathrm{num}}$ 精度比较的曲线图和间断点的数值可以看出,本文用摄动方法来构造赤道太平洋 ENSO 的非线性时滞耦合模型(1),(2)的渐近解(13),(14)具有良好的近似度.这种方法简单可行、有效.

2. 用摄动方法得到的渐近解(13),(14)是一个解析式,因此还可以通过(13),(14)式进行有关的解析运算,从而可以继续通过它们来得到相关的物理量.然而用数值理论得到的数值解和模拟解就不能直接进行这样的运算.

[1] Neelin J D, Battisti D S, Hirst A C *et al* 1998 *J. Geophys. Res.* **103** 262

[2] McCreary J P 1983 *Mon. Wea. Rev.* **111** 370

[3] Suarez M J, Schopf P S 1988 *J. Atmos. Sci.* **45** 3283

[4] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[5] Kushnir Y, Robinson W A 2002 *J. Climate* **15** 2233

[6] Feng G L, Dong W J, Jia X J *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静等 2002 物理学报 **51** 1181]

[7] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 259 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 259]

[8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in

Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达 2002 物理学报 **51** 10]

[9] Biondi F, Gershunov A, Cayan D R 2001 *J. Climate* **14** 5

[10] Wang C Z 2001 *J. Climate* **14** 98

[11] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Progress in Natural Sci*. **13** 768

[12] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Progress in Natural Sci*. **14** 550

[13] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin*. **53** 996 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[14] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin*. **53** 3245 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、朱 江 2004 物理学报 **53** 3245]

[15] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 993 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]

[16] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 1081(in Chinese)[莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[17] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 3967 (in Chinese)[莫嘉琪、林万涛、王 辉 2005 物理学报 **54** 3967]

[18] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 3971 (in Chinese)[莫嘉琪、林一骅、林万涛 2005 物理学报 **54** 3971]

[19] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys*. **14** 875

[20] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chinese Science Bulletin* **48** II 5

[21] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)

[22] Ammari H, Kang H, Touibi K 2005 *Asymptotic Anal*. **41** 119

[23] Khasminskii R Z, Yin G 2005 *J. Diff. Eqns*. **212** 85

[24] Marques I 2005 *Nonlinear Anal*. **61** 21

[25] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 2510 (in Chinese)[吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

A delayed sea-air oscillator coupling model for the ENSO*

Mo Jia-Qi[1)2)†] Wang Hui[3)] Lin Wan-Tao[4)]

1)(*Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

2)(*Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities, at SJTU, Shanghai 200240, China*)

3)(*Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China*)

4)(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

(Received 24 October 2005; revised manuscript received 7 December 2005)

Abstract

A time delay sea-air oscillator model is studied. Using the perturbation theory and corresponding method, the asymptotic expansion of the solution for the sea-air oscillator model is obtained.

Keywords: nonlinearity, time delay, El Niño-Southern Oscillator, sea-air oscillator

PACC: 0230, 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90111011 and 10471039), the National Key Project for Basics Research (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. N. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn