第 55 卷 第 7 期 2006 年 7 月
1000-3290/2006/55(07)/3233-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.7,July,2006

激光脉冲放大器传输波的计算*

莫嘉琪[1)2)†] 张伟江[2)3)] 何 铭[2)3)]

1)(安徽师范大学,芜湖 241000)

2)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)

3)(上海交通大学数学系,上海 200240)

(2005 年 8 月 31 日收到;2005 年 10 月 19 日收到修改稿)

研究了一个非线性激光脉冲放大器传输系统,利用广义泛函-变分迭代理论和方法,得到了相应系统的近似解.从而为设计激光脉冲放大器提供了便利.

关键词:激光,放大器,非线性

PACC:0230,4220

1. 引 言

激光脉冲传输问题就是给出输入脉冲波形和放大器参数,由放大器的变率方程求出输出脉冲波形.激光放大器的变率方程,在无损耗的情形下激光脉冲传播的解析解早已有所研究[1,2].但在实际的情况下,耗损对激光脉冲传播的影响是很重要的,所以必须考虑它的影响.然而,对于有耗损的情形下的变率方程,由于系统的非线性,一般难以求出较简捷的精确解.因此对于有损耗的激光脉冲传播问题,过去大多是用数值模拟的方法求出模拟解.这往往不能达到实际要求.

非线性问题在国际学术界是一个十分关注的对象[3].近来,许多学者做了大量的工作[4—11].近十年来许多近似方法被发展和优化,包括平均法,边界层法,渐近展开法和多重尺度法等.莫嘉琪等利用微分不等式等理论和方法也研究了一些非线性问题[12—18].本文是利用简捷而方便的数学解析的广义泛函-变分迭代方法[19]来得到激光传输放大器的非线性变率方程的近似解.

考虑如下典型的具有损耗的激光传输变率系统[20]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{\sigma} c \phi \Delta - \gamma \phi, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\partial t} = -\bar{\sigma} c \Delta, \tag{2}$$

其中 ϕ 为光子数密度,Δ 为反转粒子数密度,c 为波速,γ 为光子在传输过程中的损耗,$\bar{\sigma}$ 为受激辐射截面.

取归一化系数

$$\eta = \frac{\gamma x}{c}, \tau = \gamma\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$I = \frac{\sigma c \Delta}{\gamma}, \sigma = \frac{\sigma c \Delta}{\gamma}, \tag{3}$$

系统(1),(2)便为

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} = (\sigma - 1) I, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = -\sigma I. \tag{5}$$

在无损耗的情形下的激光传输变率系统(4),(5)的解为[21]

$$I(\tau,\eta) = \frac{R'_0(\tau)\exp(R_0(\tau) + \sigma_0 \eta)}{1 + (\exp R_0(\tau) - 1)\exp(\sigma_0 \eta)}, \tag{6}$$

$$\sigma(\tau,\eta) = \frac{\sigma_0}{1 + (\exp R_0(\tau) - 1)\exp(\sigma_0 \eta)}, \tag{7}$$

其中 σ_0,R_0 为激光放大器输入数据.显然(6),(7)式,对于有损耗的变率系统的解有较大的误差.为此,还需利用广义泛函-变分迭代方法进一步来求得有损耗的激光传输变率系统(4),(5)的近似解.

* 国家自然科学基金(批准号:90111011 和 10471039),国家重点基础研究发展计划项目(批准号:2003CB415101-03 和 2004CB418304),中国科学院创新方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221),上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:N.E03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

2. 广义泛函-变分迭代

为了得到耦合问题(4),(5)的近似解,现引入一组泛函 $F_1[I]$,$F_2[\sigma]$:

$$F_1[I] = I - \int_{-\infty}^{\eta} \lambda_1 \left[\frac{\partial I}{\partial \tilde{\eta}} - (\tilde{\sigma}\,\tilde{I} - I) \right] d\tilde{\eta}, \quad (8)$$

$$F_2[\sigma] = \sigma - \int_{-\infty}^{\tau} \lambda_2 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{\tau}} + \tilde{\sigma}\tilde{I} \right] d\tilde{\tau}, \quad (9)$$

其中 $\tilde{\sigma}$,$\tilde{I}$ 分别为 σ,I 的限制变量($\tilde{\sigma}$,$\tilde{I}$ 分别在(8),(9)式中只看作为单纯的函数 $\tilde{\sigma}$,$\tilde{I}$,但不作为相应泛函 $F_1[I]$,$F_2[\sigma]$的函数变量.即在相应的计算中分别对 $\tilde{\sigma}$,$\tilde{I}$ 的变分为零:$\delta\tilde{\sigma} = \delta\tilde{I} = 0$)[19],$\lambda_i\,(i=1,2)$为对应的 Lagrange 乘子.

泛函(8),(9)的变分 $\delta F_i\,(i=1,2)$分别为

$$\delta F_1[I] = \delta I - (\lambda_1 \delta I)\big|_{\tilde{\eta}=\eta} + \int_{-\infty}^{\eta} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{\eta}} - \lambda_1 \right] \delta I \, d\tilde{\eta}, \quad (10)$$

$$\delta F_2[\sigma] = \delta \sigma - (\lambda_2 \delta \sigma)\big|_{\tilde{\tau}=\tau} + \int_{-\infty}^{\tau} \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial \tilde{\tau}} \right] \delta \sigma \, d\tilde{\tau}. \quad (11)$$

令 $\delta F_1[I] = 0$,$\delta F_2[\sigma] = 0$. 于是由(10),(11)式有

$$\frac{d\lambda_1}{d\tilde{\eta}} = \lambda_1, \frac{d\lambda_2}{d\tilde{\tau}} = 0, \tilde{\eta} < \eta, \tilde{\tau} < \tau,$$

及

$$\lambda_1(\eta) = 1, \lambda_2(\tau) = 1.$$

这时

$$\lambda_1 = \exp(-(\eta - \tilde{\eta})), \lambda_2 = 1. \quad (12)$$

由(12)和(8),(9)式,构造如下变分迭代:

$$I_{n+1} = I_n - \int_{-\infty}^{\eta} \exp(-(\eta - \tilde{\eta})) \times \left[\frac{\partial I_n}{\partial \tilde{\eta}} - (\sigma_n - 1) I_n \right] d\tilde{\eta}, \quad (13)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \int_{-\infty}^{\tau} \left[\frac{\partial \sigma_n}{\partial \tilde{\tau}} + \sigma_n I_n \right] d\tilde{\tau}. \quad (14)$$

首先选取零次近似 I_0,σ_0 为对应系统(4),(5)的无损耗系统的解(6),(7):

$$I_0(\tau,\eta) = \frac{R'_0(\tau)\exp(R_0(\tau) + \sigma_0\eta)}{1 + (\exp R_0(\tau) - 1)\exp(\sigma_0\eta)}, \quad (15)$$

$$\sigma_0(\tau,\eta) = \frac{\sigma_0}{1 + (\exp R_0(\tau) - 1)\exp(\sigma_0\eta)}. \quad (16)$$

现以(15),(16)式作为系统(4),(5)解的初始近似.再将(15),(16)式代入广义泛函-变分迭代关系式(13),(14),便可得到系统(4),(5)解的一次近似

$$\begin{aligned} I_1(\eta,\tau) &= I_0(\eta,\tau) - \int_{-\infty}^{\eta} \exp(-(\eta - \tilde{\eta})) \\ &\quad \times \left[\frac{\partial I_0}{\partial \tilde{\eta}} - (\sigma_0 - 1) I_0 \right] d\tilde{\eta} \\ &= R'_0(\tau)\exp(R_0(\tau)) \\ &\quad \times \left[\frac{\exp(\sigma_0\eta)}{1 + (\exp R_0(\tau) - 1)\exp(\sigma_0\eta)} \right. \\ &\quad \left. - K(\eta,\tau) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(\eta,\tau) &= \sigma_0(\eta,\tau) - \int_{-\infty}^{\tau} \left[\frac{\partial \sigma_0}{\partial \tilde{\tau}} + \sigma_0 I_0 \right] d\tilde{\tau} \\ &= \frac{\sigma_0}{1 + (\exp R_0(\tau) - 1)\exp(\sigma_0\eta)}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} K(\eta,\tau) &= \frac{\exp(-\eta)}{\sigma_0} \int_0^{\exp(\sigma_0\eta)} t^{1/\tau_0} \\ &\quad \times [1 + \exp(R_0(\tau) - 1)t]^{-1} dt. \end{aligned}$$

继续利用迭代关系式(13),(14),能依次得到系统(4),(5)的更高次的近似解 $\{I_n,\sigma_n\}$,$n = 2,3,\cdots$.

3. 精确解的讨论

由传输系统(4),(5)和迭代关系式(13),(14)的结构可以证明[22],用上述广义泛函-变分方法得到的非线性传输系统(4),(5)的解序列 $\{I_n(\eta,\tau)\}$,$\{\sigma_n(\eta,\tau)\}$在所讨论的区域内其本身和各自的偏导数是一致收敛的.令

$$\begin{aligned} \bar{I}(\eta,\tau) &= \lim_{n\to\infty} I_n(\eta,\tau), \bar{\sigma}(\eta,\tau) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\eta,\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

由广义泛函-变分迭代关系式(13),(14),将各等式的两边取极限,不难得到

$$\int_{-\infty}^{\eta} \exp(-(\eta - \tilde{\eta})) \left[\frac{d\bar{I}}{d\tilde{\eta}} - (\bar{\sigma} - 1)\bar{I} \right] d\tilde{\eta} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} \left[\frac{d\bar{\sigma}}{d\tilde{\tau}} + \bar{\sigma}\bar{I} \right] d\tilde{\tau} = 0.$$

由上述关系式和 $\bar{I}(\eta,\tau)$,$\bar{\sigma}(\eta,\tau)$的连续可微性,便可推知由(19)式决定的 $\bar{I}(\eta,\tau)$,$\bar{\sigma}(\eta,\tau)$,为激光传输变率系统(4),(5)的一组精确解.

4. 结 论

1. 用广义泛函-变分迭代方法得到的序列

$\{I_n(\eta,\tau)\}$，$\{\varepsilon_n(\eta,\tau)\}$，通过归一化变换(3)，便得到对应于原激光传输系统(1)，(2)的各次近似解.

2. 利用近似解序列 $\{I_n(\eta,\tau)\}$，$\{\varepsilon_n(\eta,\tau)\}$为基础，根据它们可有效地控制激光脉冲放大器的输入-输出参数.

3. 采用本广义泛函-变分迭代方法得到解的"收敛速度"在于它构造了特殊的广义泛函和选用了合适的 Lagrange 乘子，并利用变分原理达到最佳结果. 其次所得到解的"近似速度"，还在于零次近似的选取. 本文选用相应的无损耗激光传输系统的解作为零次近似，这是很自然的. 从而再进一步优化和深入地用逼近理论得到对应的原非线性问题的解.

4. 从数学理论观点来看，广义泛函-变分迭代方法是一个解析的方法. 它不同于一般的数值求解方法，更不是简单的模拟方法. 可以由得到的近似表示式再用解析运算进行定性和定量的研究. 然而，利用数值解法或单纯地模拟就难以进一步用解析的理论更深入、更精确的探讨.

[1] Bellmam R，Birnbaum G，Wagner W G 1963 *J. Appl. Phys.* **34** 780

[2] Schulz-Dubois E O 1964 *Bell Sys. Tech. J.* **63** 625

[3] de Jager E M，Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam：North-Holland Publishing Co)

[4] Akhmetov D R，Lavrentievm Jr. M M 2003 *Asymptotic Anal.* **35** 65

[5] Hwangm S 2004 *J. Diff. Eqs.* **200** 191

[6] Zhang F 2004 *J. Diff. Eqs.* **205** 77

[7] Ammari H Kang H 2005 *Asymptotic Anal.* **41** 119

[8] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21

[9] Ouyang C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1900 (in Chinese) [欧阳成 2004 物理学报 **53** 1900]

[10] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 2590]

[11] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[12] Mo J Q 1989 *Science in China* A **32** 1306

[13] Mo J Q 1993 *J. Math. Anal. Appl.* **178** 289

[14] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog. Natur. Sci.* **14** 1126

[15] Mo J Q，Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[16] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 993 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993]

[17] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[18] Mo J Q，Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875

[19] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou：Science and Technology Publisher) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程与科学计算中的近似非线性分析方法(郑州：河南科学技术出版社)]

[20] Liu R H，Tan W H 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 10291 (in Chinese) [刘仁红、谭维翰 1995 物理学报 **44** 1029]

[21] Liu R H，Cai X J，Yang L *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 31401 (in Chinese) [刘仁红、蔡希洁、杨琳等 2005 物理学报 **54** 3140]

[22] Hartman P 1982 *Ordinary Differential Equations* (Stuttgart：CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek)

Calculation of the transmission wave of a laser pulse amplifier*

Mo Jia-Qi[1)2)†] Zhang Wei-Jiang[2)3)] He Ming[2)3)]
1)(*Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)
2)(*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU*, *Shanghai* 200240, *China*)
3)(*Department of Mathematics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

(Received 31 August 2005; revised manuscript received 19 October 2005)

Abstract

A nonlinear transmission system for the laser pulse amplifier is discussed. Using the generalized functional-variational iteration theory and method, the corresponding approximate solution of the system is obtained, which facilitates the design of laser pulse amplifiers.

Keywords: laser, amplifier, nonlinear
PACC: 0230, 4220

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90111011 and 10471039), the National Key Project for Basics Research (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. N. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn