

静质量不为零的粒子的量子隧穿辐射^{*}

张靖仪^{1) 2)} 赵 峰¹⁾

1) 北京师范大学物理系, 北京 100875)

2) 湛江师范学院物理系, 湛江 524048)

(2005 年 7 月 27 日收到, 2006 年 1 月 9 日收到修改稿)

用量子隧穿法研究黑洞 Hawking 辐射, 计算了静止质量不为零的粒子穿过 Schwarzschild 黑洞事件视界的出射率. 所得结果满足么正性原理, 且与无质量粒子出射率具有相同的函数形式.

关键词: 黑洞, Hawking 辐射, 量子理论

PACC: 9760L, 0420

1. 引 言

2000 年, Parikh 和 Wilczek 提出了一种计算黑洞 Hawking 辐射修正谱的半经典方法^[1-3]. 其出发点是将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿, 势垒强弱取决于出射粒子自身能量的大小. 这种计算方法的关键是强调粒子出射过程能量守恒, 并且要找到一个在视界处表现良好的坐标系. 用这种方法, Parikh 和 Wilczek 计算了粒子穿过 Schwarzschild 黑洞和 R-N 黑洞的出射修正谱. 所得结果偏离纯热谱, 满足么正性原理, 支持信息守恒的结论. 随后, 人们用这一方法分别计算了 de Sitter 和 anti-de Sitter 时空以及稳态有转动黑洞的 Hawking 辐射修正谱^[4-9], 均满足么正性原理, 支持信息守恒的结论. 然而, 上述研究仅局限于出射粒子为无质量粒子. 对于静止质量不为零的粒子的出射概率问题, 因其世界线为类时曲线, 上述方法必须作适当的修改. 本文将研究有静止质量粒子在穿越视界时的行为, 得出其运动规律. 然后求出其出射谱, 并与无质量粒子进行比较. 为了简便, 我们将粒子当成是正在出射的球面德布罗意波(德布罗意 S 波), 先求出其对应的相速度和群速度. 然后, 利用 Parikh 和 Wilczek 提出的方法来计算静止质量不为零的粒子穿过 Schwarzschild 黑洞事件视界的概率. 文中采用自然单位制, 即取 $G = c = \hbar = 1$.

2. 相速度和群速度

如前文所述, 为了研究穿越黑洞视界的量子隧穿, 必须找一个在视界处消除了坐标奇性的坐标系. 符合这一条件的最好的坐标系就是 Painlevé 坐标系. 在这一坐标系下, 其 Schwarzschild 黑洞时空线元为^[10]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2m}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ = g_{00} dt^2 + 2g_{01} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

Painlevé 坐标系具有许多好的性质^[1-3]. 除了消除了视界处的坐标奇性, 还有三条很重要的性质必须指出. 首先, 在取定 Painlevé 坐标系的情况下, 时空中存在类时 Killing 矢量, 因而时空稳态. 其次, 如果在 (1) 式中取 t 为常数, 则度规将变成三维欧氏度规. 即此坐标系下所有的时空片都是欧氏的. 第三, 用 Painlevé 坐标系表示的时空线元虽然非对角, 但满足朗道坐标钟同时传递性条件. 即时空中可以定义坐标钟同时. 第三条性质对于后面的研究至关重要, 而在相关文献却未见论述. 下面先对这一性质进行介绍.

根据朗道对钟理论, 对于一个作了 $3+1$ 分解的时空, 两个同时事件的坐标时之差为^[11]

$$\Delta T = - \int \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10373003)和湛江师范学院科学研究基金资助的课题.

[†] E-mail: physicsz@tom.com

上述积分一般与路径有关,因而朗道指出,只有时轴正交的坐标系才可以定义同时的概念.后来的研究表明,时轴正交只不过是定义坐标钟同时的充分而非必要条件.如果其线元满足如下关系^[12]:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{g_{0j}}{g_{00}} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

则方程(2)对应的积分将与路径无关,因而是可以定义坐标钟同时的.显然,在 Painlevé 坐标系下的线元(1)满足方程(3).即线元(1)虽然非对角,但仍满足对钟条件,因而在 Painlevé-Schwarzschild 时空中可以定义坐标钟同时.在量子力学中,人们普遍认为粒子作隧穿是一个瞬时过程, Painlevé-Schwarzschild 时空的上述性质对于下面的研究非常重要.

由(1)式很容易求得径向类光测地线方程为

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2m}{r}}, \quad (4)$$

式中正号对应出射粒子,负号对应为入射粒子^[1-3].

需要指出的是,本文研究有静止质量的粒子出射问题.而有静止质量粒子的世界线是类时线,因而不能像文献 1—3 那样将方程(4)作为静质量不为零的粒子的运动方程.下面对有静止质量的粒子的运动情况进行讨论.为了简便,将其看成是球面德布罗意波(德布罗意 S 波).前文已述,用 Painlevé 坐标系描述的时空,时空稳态,且时空片是欧氏的.因而薛定谔方程成立,我们可以用平直时空中非相对论的方法来处理.按照 WKB 法,其近似波动方程为

$$\psi(r, t) = C e^{i \int_{r_i - \epsilon}^r p_r dr - i \omega t}, \quad (5)$$

式中 $r_i - \epsilon$ 表征粒子的初始位置.取定某一特定的相位进行讨论,令

$$\int_{r_i - \epsilon}^r p_r dr - \omega t = \phi_0, \quad (6)$$

则有

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{\omega}{k}, \quad (7)$$

式中 k 为德布罗意波的波数.与相速度的定义相比较,可知 \dot{r} 等于德布罗意波的相速度.对于德布罗意波,其群速度 v_g 和相速度 v_p 的定义及关系为

$$v_p = \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{\omega}{k}, \quad (8)$$

$$v_g = \frac{dr_c}{dt} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (9)$$

$$v_p = \frac{1}{2} v_g. \quad (10)$$

为了得出 \dot{r} 的表达式,先求出其群速度.

前文已述,隧穿过程是一个瞬时过程.粒子进入势垒和穿出势垒是两个同时事件.根据朗道对钟理论,这两个同时事件的坐标时之差为

$$dt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i = -\frac{g_{01}}{g_{00}} dr_c \quad (d\theta = d\varphi = 0) \quad (11)$$

此处, r_c 表示粒子位置, dr_c 表示粒子的位移.由(11)式可求出其群速度为

$$v_g = \frac{dr_c}{dt} = -\frac{g_{00}}{g_{01}}, \quad (12)$$

由关系式(10)可求得相速度的表达式为

$$v_p = \dot{r} = \frac{1}{2} v_g = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_{00}}{g_{01}}. \quad (13)$$

将 g_{00} 和 g_{01} 的具体表达式代入(13)式,得出 \dot{r} 的表达式为

$$\dot{r} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \sqrt{\frac{r}{2m}}. \quad (14)$$

值得注意的是,当考虑粒子自引力的影响时,方程(14)中的黑洞质量将作替换 $m \rightarrow m - \omega$, 其中 ω 对应为出射粒子的能量.

3. 隧穿概率

类似于文献 1—3 的分析,作量子隧穿の出射正能粒子作用量的虚部为

$$\text{Im}S = \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} p_r dr = \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_0^{p_r} dp'_r dr, \quad (15)$$

式中 p_r 为与 r 对应的正则动量, r_i 和 r_f 分别对应粒子出射前后瞬间所在的位置.

为了便于计算,利用 Hamilton 方程将对 dp_r 的积分换成对 dH 的积分.由

$$\dot{r} = \frac{dH}{dp_r} = \frac{d(E - \omega)}{dp_r} = -\frac{d\omega}{dp_r}, \quad (16)$$

得

$$dp_r = -\frac{d\omega}{\dot{r}}. \quad (17)$$

(16)式中的 E 表示物质系统的总能量,而 $E - \omega$ 则表示黑洞在出射一个粒子后的能量.所谓强调粒子出射过程能量守恒,即让总能量 E 保持不变.

将(17)式代入(15)式得

$$\text{Im}S = -\text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_0^{\omega} \frac{d\omega'}{\dot{r}} dr. \quad (18)$$

将(14)式代入(18)式,并考虑出射粒子自引力的影响,则作用量的虚部的具体表达式为

$$\text{Im}S = - \text{Im} \int_{r_i}^{r_f} \int_0^\omega \frac{2\sqrt{\mathcal{X}(m-\omega')r}}{r-\mathcal{X}(m-\omega')} d\omega' dr. \quad (19)$$

交换积分顺序,我们发现被积函数在 $r = \mathcal{X}(m - \omega')$ 处发散.对上述积分进行正规化处理,将 r 复化成复平面,此时 $r = \mathcal{X}(m - \omega')$ 为一个极点.为了使正能解随时间衰减,选积分围线沿上半复平面,并求出对 r 的积分,得

$$\text{Im}S = \int_0^\omega 4\pi(m - \omega') d\omega'. \quad (20)$$

完成对 ω' 的积分,得

$$\text{Im}S = 4\pi m\omega \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{m}\right) = -\frac{1}{2} \Delta S_{\text{BH}}. \quad (21)$$

式中 $\Delta S_{\text{BH}} = \mathcal{S}(m - \omega) - \mathcal{S}(m)$, 表示粒子出射前后

黑洞的熵变.由(21)式可进一步求得静质量不为零的粒子的出射概率,即其出射谱为

$$\Gamma \sim e^{-2\text{Im}S} = e^{\Delta S_{\text{BH}}}. \quad (22)$$

显然,出射谱满足量子力学中的么正性原理,且与无质量粒子的出射谱具有相同的函数形式.

4. 结 论

以上研究表明,对于静止质量不为零的粒子,其出射谱与无质量粒子的出射谱具有相同的函数形式.即偏离纯热谱,满足量子力学中的么正性原理,支持信息守恒的结论.

- [1] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
 [2] Parikh M K, "Energy conservation and Hawking radiation," hep-th/0402166
 [3] Parikh M K, "A secret tunnel through the horizon," hep-th/0405160
 [4] Hemming S, Keski-Vakkuri E 2001 *Phys. Rev. D* **64** 044006
 [5] Medved A J M 2002 *Phys. Rev. D* **66** 124009
 [6] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Mod. Phys. Lett. A* **20** 1673
 [7] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett. B* **618** 14

- [8] Han Y W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5018 (in Chinese) [韩亦文 2005 *物理学报* **54** 5018]
 [9] Jiang Q Q et al 2005 *Chin. Phys.* **14** 1736
 [10] Painlevé P, Hebd C R 1921 *Seances Acad. Sci.* **173** 677
 [11] Landau L D, Lifshitz E M 1975 *The Classical Theory of Field* (London: Pergamon Press)
 [12] Zhang H S, Zhao Z 2001 *J. Beijing Normal Univ.* (Nature Science) **37** 471 (in Chinese) [张宏升、赵 峥 2001 *北京师范大学学报(自然科学版)* **37** 471]

Massive particles' Hawking radiation via tunneling^{*}

Zhang Jing-Yi^{1,2†} Zhao Zheng¹⁾

1 *Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*

2 *Department of Physics, Zhanjiang Normal University, Zhanjiang 524048, China*

(Received 27 July 2005; revised manuscript received 9 January 2006)

Abstract

In this paper the tunneling framework is adopted to investigate the Hawking radiation. The emission rate which massive particles tunnel across the event horizon of the Schwarzschild black hole is calculated. It is consistent with an underlying unitary theory and takes the same functional form as that of massless particles.

Keywords: black holes, Hawking radiation, quantum theory

PACC: 9760L, 0420

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10373003) and the Science Foundation of Zhanjiang Normal University.

[†] E-mail: physicsz@tom.com