

基于 Gross-Pitaevskii 能量泛函求解谐振势阱中 玻色凝聚气体基态波函数^{*}

徐志君^{1)†} 施建青¹⁾ 李 珍¹⁾ 蔡萍根¹⁾

1) 浙江工业大学应用物理系 杭州 310032)

2) 波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

(2005 年 10 月 24 日收到, 2005 年 11 月 9 日收到修改稿)

基于 Gross-Pitaevskii (G-P) 平均场能量泛函和变分方法, 对囚禁在谐振势阱中的玻色凝聚气体, 在 $T = 0\text{K}$ 时的基态波函数提出一种新解法. 运用这一方法能得到基态波函数的解析表达式, 求解出系统的化学势与凝聚原子数的关系等. 其结果与 Edwards 和 Dalfovo 等人直接数值求解 G-P 方程所得到的结果相一致, 并在 $N a_s / a \gg 1$ 大原子数 N 的极限条件下, 与托马斯-费米近似模型的结论也趋向一致. 该方法计算简单, 而且能够进行解析处理.

关键词: 玻色凝聚气体, G-P 泛函, 谐振势阱, 基态波函数

PACC: 0365, 0530J, 0260

1. 引 言

自 1995 年实现玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 以来, 对这一物质新态的理论和实验研究一直是物理学界研究的热点之一. 其中对囚禁在谐振势阱 (harmonic trap) 中玻色凝聚气体 (Bose-condensed gas) 的基态性质的研究是一个重要而基础的问题. 近年来在理论上和实验上已有比较充分的研究^[1-18]. 但迄今为止, 理论上的研究工作主要是在平均场理论的基础上, 利用各种数值计算方法求解自洽的 Gross-Pitaevskii (G-P) 方程^[19-22]. 或者在凝聚气体原子数 N 较大时进行托马斯-费米近似处理^[23, 24]. 本文则在高斯近似模型求解基态波函数的基础上, 直接基于 G-P 平均场能量泛函, 提出求解玻色凝聚气体基态波函数的新方法. 首先假设含有若干待定参数的类似于高斯指数型分布的基态波函数, 然后导出凝聚气体基态 G-P 平均场能量泛函, 在已知凝聚气体原子数 N 、原子间的相互作用性质和外加谐振势阱的条件下, 直接运用求解 G-P 平均场能量泛函极小值的方法确定基态波函数中的待定参数, 从而得到玻色凝聚气体的基态波函数和相应的基态特性. 本文以各向同性的球对称谐振势阱为实例进行计算, 并将所得结论

与 Edwards 和 Dalfovo^[21, 22] 等人的数值计算结果进行比较分析. 计算表明, 这一工作结果是可靠的, 其中所发展的求解基态波函数的新方法比各种基于 G-P 方程直接进行数值计算的方法更加简单, 而且能得到简单的解析表达式. 此方法还可以方便地推广到一般势阱的情况.

2. 谐振势阱中基态玻色凝聚气体 G-P 能量泛函和 G-P 方程

囚禁在谐振磁阱中的稀薄玻色凝聚气体, 原子间的平均距离远远大于原子间相互作用力程. 这样的弱相互作用玻色凝聚系统, 能被 Gross-Pitaevskii 理论^[25, 26] 精确地描述. 在温度大大低于临界凝聚温度 T_c 时, 质量为 m 的玻色凝聚气体的基态能量泛函为

$$E(\Psi) = \int d^3 r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (1)$$

其中 $\Psi(\mathbf{r})$ 是凝聚体的基态波函数, $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ 为外加的各向同性的球对称谐振势能, ω

^{*} 波谱与原子分子物理国家重点实验室开放基金 (批准号: T152501) 和浙江省教育厅科研基金 (批准号: 20040599) 资助的课题.

[†] E-mail: xzj@zjut.edu.cn; xuzhijun@zj165.com

为谐振角频率. $\frac{1}{2}g|\Psi(\mathbf{r})|^4$ 表示其他玻色子产生的平均场效应, $g = 4\pi a_s \hbar^2/m$ 为耦合常数, a_s 为 s 波散射长度. 波函数满足如下归一化条件:

$$\int d^3r |\Psi(\mathbf{r})|^2 = N. \quad (2)$$

在 $T \rightarrow 0$ 的极限条件下, N 就是被势阱囚禁的总原子数. 玻色凝聚气体的基态特性, 主要由基态波函数决定. 基态波函数所满足的波动方程可通过对方程 (1) 变分而得到, 即通常所称的不含时的 G-P 方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = \mu \Psi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

方程 (3) 的本征值不是线性定态薛定谔方程的能量, 而是化学势 μ . 求解方程 (3) 是研究玻色凝聚气体基态性质的主要理论出发点, 但由于方程 (3) 中存在非线性项 $g|\Psi(\mathbf{r})|^2$, 难以求解出基态波函数的解析表达式. 因此往往直接对方程 (3) 进行数值求解或在一定极限条件下进行近似求解 (如托马斯-费米近似等)^[19-24], 得到了与实验相符的结论.

为便于下文的分析和计算, 以谐振特征长度 $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$ 为长度单位, 以谐振特征能量 $\hbar\omega$ 为能量单位, 即进行如下变换: $r \rightarrow r/a$ 和 $E \rightarrow E/\hbar\omega$. 相应地也将波函数进行变换, 即 $\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \sqrt{a^3/N} \Psi(\mathbf{r})$, 则波函数 $\Psi(\mathbf{r})$ 在新坐标中也将归一化. 基于上述变换, 玻色凝聚气体单原子的能量泛函可简化为

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[|\nabla \Psi(\mathbf{r})|^2 + r^2 |\Psi(\mathbf{r})|^2 + 4\pi\gamma |\Psi(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (4)$$

G-P 方程可简化为

$$\left[-\nabla^2 + r^2 + 8\pi\gamma |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = 2\mu \Psi(\mathbf{r}), \quad (5)$$

其中无量纲参数 $\gamma = Na_s/a$ 是表征玻色凝聚气体相互作用强度的一个重要参数, 它与凝聚气体的原子数 N 、原子间相互作用的性质 (排斥作用, $a_s > 0$, 吸引作用, $a_s < 0$) 和势阱的强弱等有关. 显然, 方程 (5) 中的化学势也以 $\hbar\omega$ 为单位.

3. 类高斯指数分布型波函数的假设和求解

如果不考虑玻色凝聚气体原子间的相互作用, 即方程 (5) 中略去相互作用项 $8\pi\gamma |\Psi(\mathbf{r})|^2$, 则玻色凝聚气体就成为单体问题, 方程 (5) 也回到线性薛定

谔方程. 因此, 单原子基态波函数为高斯函数, 即

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \pi^{-3/4} \times \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right), \quad (6)$$

显然, 其密度分布 $n(\mathbf{r}) = N\phi_0(\mathbf{r})^2$ 是典型的高斯分布.

但是, 各原子间存在相互作用, 相互作用主要改变玻色凝聚原子云的大小. 原子间排斥相互作用越强, 凝聚原子云的尺度将愈大. 相应地高斯函数中的谐振特征参量 a 也将增大. 若原子间存在吸引相互作用, 则凝聚原子云的尺度将变小. 因此, 只要考虑原子间的相互作用, 凝聚原子云的密度分布将偏离高斯分布. 为此, 我们假设玻色凝聚气体基态波函数仍然具有高斯函数的形式, 只是在考虑相互作用后, 将高斯函数中的谐振特征参量修正为 b . 引入无量纲参量 $\alpha = b/a$, 则在高斯近似模型中, 其基态波函数可表示为

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4} \alpha^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right). \quad (7)$$

方程 (7) 满足归一化条件. 将方程 (7) 代入 (4) 式得到玻色凝聚气体单原子能量泛函为

$$\frac{E}{N} = \frac{3(\alpha^4 + 1)}{4\alpha^2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \alpha^3} \gamma, \quad (8)$$

显然, 玻色凝聚气体单原子能量 E/N 是参量 α 的函数. 对能量 E/N 求极小值, 得到关于参量 α 的方程

$$\alpha^5 - \alpha - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma = 0. \quad (9)$$

解此方程, 可求得参量 α , 从而得到玻色凝聚气体的基态波函数. 求得方程 (9) 的解析解是困难的, 但对给定的 γ 值, 可以方便地得到其数值解.

运用上述高斯近似模型所求得的结果与 Edwards 和 Dalfovo 等人的数值计算结果有较大偏差 (见图 2(a) 和 (b)). 为此, 我们在高斯近似模型的基础上, 提出所谓的类高斯指数分布型波函数假设, 即认为基态波函数具有如下的形式:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi} \times \Gamma(3/\beta) \times \sigma} \times \exp\left(-\frac{r^\beta}{2\sigma^\beta}\right), \quad (10)$$

其中 $\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du$ ($\text{Re}z > 0$) 为伽马函数, β 和 σ 是两个待定的无量纲参数, 其中 $\sigma = q/a$, 而 q 类似于高斯函数中的高斯宽度. 方程 (10) 同上述各式一样, 均已进行了无量纲变换, 且波函数已归一化. 将方程 (10) 代入 (4) 式得到基态玻色凝聚气体单原子能量泛函表达式

$$\frac{E}{N} = \frac{\alpha(\beta+1)\Gamma(1/\beta) + 4[2^{-3/\beta}\beta \times \gamma + \sigma^5 \Gamma(5/\beta)]}{8\sigma^3 \Gamma(3/\beta)} \quad (11)$$

有了能量泛函(11)式,就可以通过能量泛函对 σ 和 β 求变分使能量取极小值确定参数 σ 和 β ,从而得到凝聚体基态波函数的具体形式.对(11)式变分得

$$2^{-3/\beta}\beta\gamma + \frac{1}{6}\alpha(1+\beta)\Gamma(1/\beta) - \frac{2}{3}\sigma^2\Gamma(5/\beta) = 0, \quad (12)$$

$$4[\beta\gamma(\beta + \log 8) + \alpha\beta\gamma + 2^{3/\beta}\sigma^5\Gamma(5/\beta)] \times \Gamma'(3/\beta)\Gamma(3/\beta) - 5 \times 2^{3/\beta}\sigma^5\Gamma'(5/\beta) + 2^{3/\beta}\sigma\Gamma(1/\beta)[\beta^2 - (1+\beta)\Gamma'(1/\beta)\Gamma(1/\beta) + \alpha(1+\beta)\Gamma'(3/\beta)\Gamma(3/\beta)] = 0. \quad (13)$$

(13)式中的 Γ' 表示伽马函数对 β 的导数.求解方程(12)和(13)的解析解是困难的,但在给定 γ 值的条

件下可以方便地得到其数值解,从而求出基态波函数的解析表达式.值得注意的是同时满足(12)式和(13)式所求的 σ 和 β 仅是方程(11)的驻点,而不一定是系统单原子能量的极小值,但根据解的物理意义以及其二阶导数 $\epsilon''_{\sigma\sigma} > 0$ (或 $\epsilon''_{\beta\beta} > 0$)和 $\epsilon''_{\sigma\beta} - \epsilon''_{\sigma\sigma}\epsilon''_{\beta\beta} < 0$ 可确定其极小值所对应的解.

对吸引相互作用的玻色凝聚系统,通过对方程(12)和(13)的数值求解发现, γ 也存在一个临界值,其大小为 $\gamma_c \approx -0.580$,即当 $\gamma < \gamma_c$ 时,系统单原子能量 E/N 不存在极小值.其结果与 Ruprecht 等人^[27,28]接从 G-P 方程得到的数值计算值($\gamma_c \approx -0.575$)相符.吸引相互作用玻色凝聚气体的这一特点可以从凝聚系统单原子能量 E/N 与 σ , β 和参量 γ 的关系(图1)中清晰地表现出来.

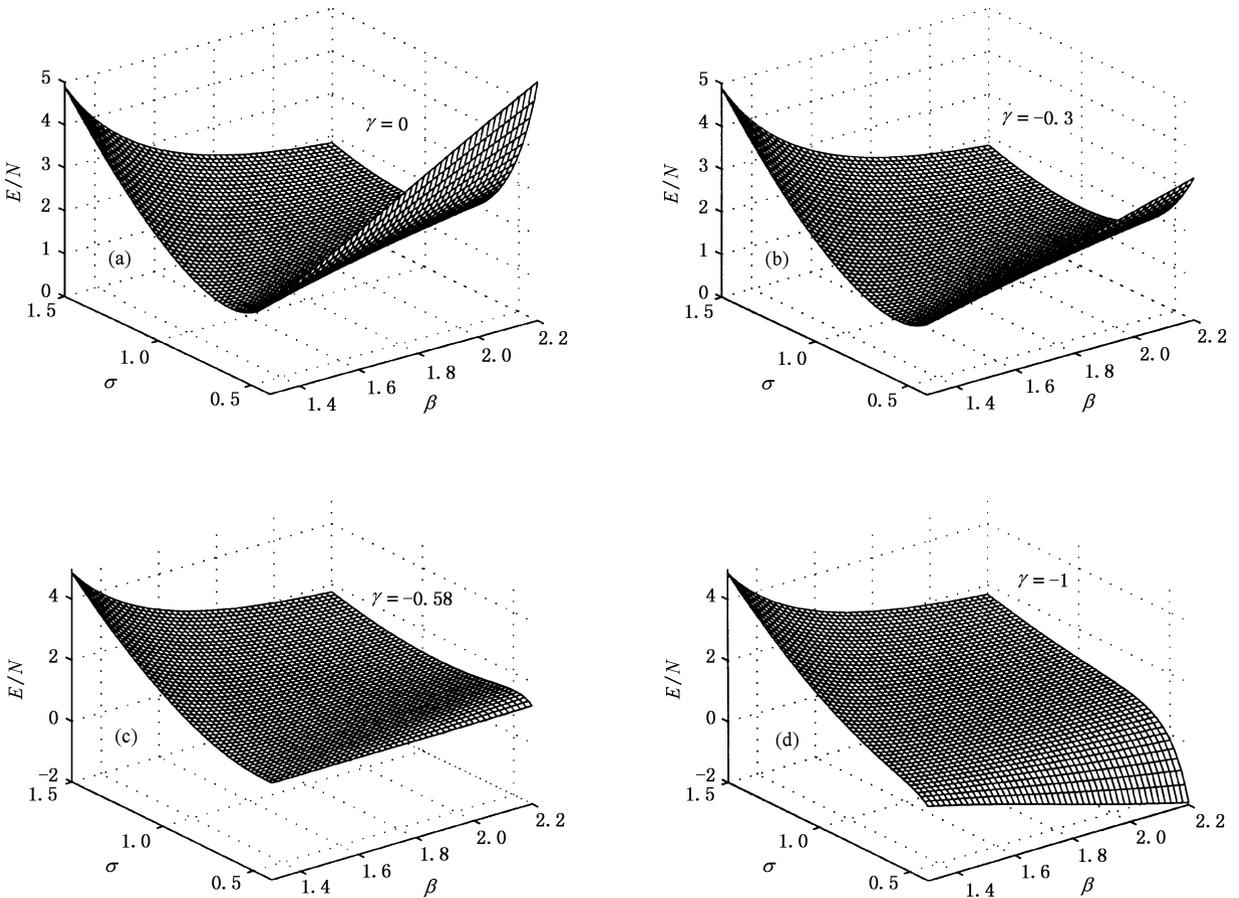


图1 参量 γ 取不同值时凝聚系统单原子能量与参量 β 和 σ 之间的关系((c)对应于系统的临界状态,当 $\gamma < \gamma_c = -0.58$ 时,系统单原子能量不存在极小值,没有定态解.图中 E/N 以 $\hbar\omega$ 为单位)

4. 计算与结果

4.1. 基态波函数

在文献[19—24]中,均给出了不同条件下 G-P 方程的数值解.为了便于比较,在参数 γ 取不同值时,把由方程(10)所确定的波函数用图 2(c) (排斥相互作用)和(d) (吸引相互作用)直观地表示出来,其结果与 Edwards 和 Dalfovo 等人的数值解一致(图 2

中的圆点所对应的数据来自文献[29]的图 8 和图 9).图 2(a)和(b)是高斯近似模型所求的结果.从中可以清楚地看到,由于不考虑相互作用,高斯分布与原子数 N 无关,而高斯近似模型和类高斯指数分布模型所求的结果,均随着凝聚原子数的增加,排斥作用增强,中心密度减小,波函数变得越来越“胖”.但与类高斯指数分布模型所得结果相比,高斯近似模型所描述的中心密度的减小要缓慢些.其结果与精确的数值解有较大的误差,只有当 γ 值在 0 附近时,近似程度较好.

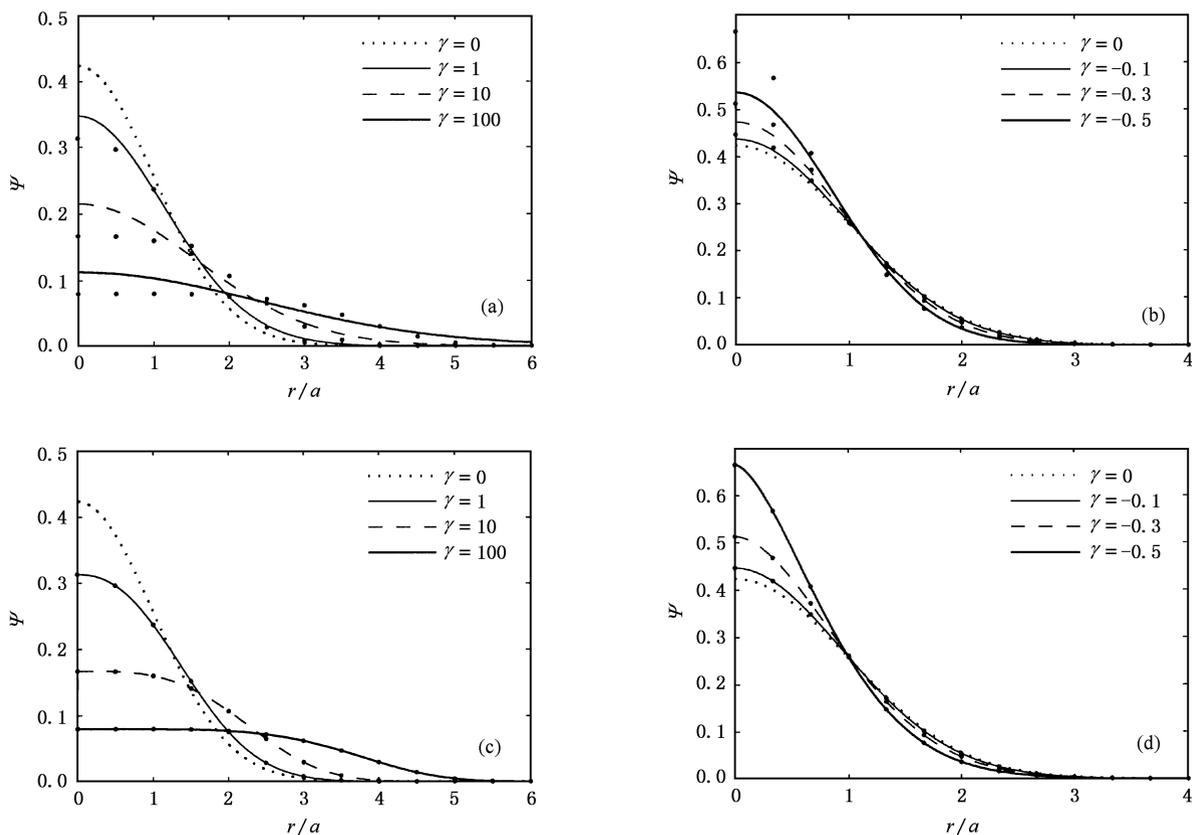


图 2 参数 γ 取不同值时的波函数.(a)和(b)是高斯近似模型所求的波函数.(c)和(d)是方程(10)所对应的波函数.(b)和(d)对应的 γ 值为负,为吸引相互作用(图中圆点所对应的数据来自文献[29]的图 8 和图 9. 横坐标以 a 为单位,且波函数已归一化)

在大原子数 N 的极限条件下,托马斯-费米近似模型能给出简单的解释结果,而且与实验相符^[21].在此模型中,凝聚原子云动能与势能或者与相互作用能相比可以忽略不计,即可将方程(5)中的动能项略去,由此可得到基态波函数

$$\Psi(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{[2\mu - r^2]}{8\pi\gamma}}, & (2\mu > r^2), \\ 0, & (2\mu \leq r^2). \end{cases} \quad (14)$$

由波函数归一化条件,可得到化学势 μ 与原子数 N

之间的关系

$$\mu = \frac{1}{2}(15\gamma)^{2/5} = \frac{1}{2}\left(15\frac{Na_s}{a}\right)^{2/5}. \quad (15)$$

因此,将我们所得到的波函数与托马斯-费米近似模型所得到的波函数进行比较,能进一步验证本文所构造的波函数的可靠性.当凝聚原子数较少($\gamma = 10$)时,托马斯-费米近似模型的解与方程(10)有显著差异,但是,当凝聚原子数 N 增加,如 $\gamma = 100$ 时,除凝聚原子云边缘表面波函数有差异外,这两者

已很接近了. 如果对托马斯-费米近似模型的表面波函数进行修正(见文献[24])则在在大原子数 N 的极限条件下, 方程(10)所描述的基态波函数与托马斯-费米近似模型的结果趋向一致, 如图 3(b) 所示.

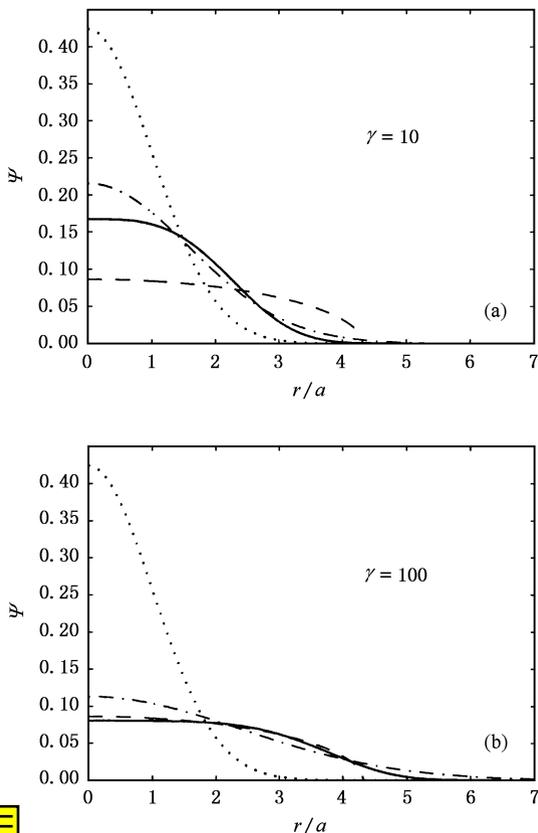


图3 基态波函数的对比(点虚线表示无相互作用时的高斯分布, 点划线是高斯近似波函数, 虚线是托马斯-费米近似波函数, 实线是方程(10)所对应的波函数)

4.2. 化学势与相互作用参数 γ 的关系

在大原子数 N 及排斥相互作用的条件下, 托马斯-费米近似模型理论^[21]和实验^[30]均已经证明了系统的化学势有 $\mu \propto \gamma^{5/2}$ 的关系. 在已知波函数的条件下, 也可以方便地求得玻色凝聚系统的化学势. 对高斯近似模型, 有

$$\mu = 3(\alpha^4 + 2)(4\alpha^2) + \sqrt{2\pi}\gamma/\alpha^3, \quad (16)$$

而对类高斯指数分布模型, 有

$$\mu = \frac{\alpha(\beta + 1)\Gamma(1/\beta) + 4\sigma^5\Gamma(5/\beta) + 8\sigma^{\beta-1}\gamma\beta \times \gamma}{8\sigma^3\Gamma(3/\beta)}. \quad (17)$$

由此, 可以得到凝聚系统化学势 μ 随参数 γ 的变化关系, 如图 4 所示. 其中虚线表示托马斯-费米近似条件下的化学势与 γ 的关系, 具有典型的 $\mu \propto \gamma^{5/2}$ 函

数形式. 当 γ 变得越来越大时, 由方程(10)构造的波函数所求得的化学势趋近于 $\mu \propto \gamma^{5/2}$, 而高斯近似却出现明显的偏离. 这进一步表明了本文构造的波函数是精确和可靠的.

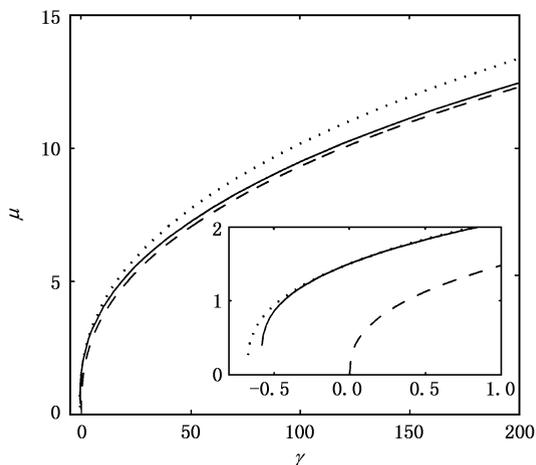


图4 玻色凝聚系统基态化学势 μ 随参数 γ 的变化(点虚线表示高斯近似, 虚线表示托马斯-费米近似, 实线表示由类高斯指数分布模型所求的结果. 内插图是在 $\gamma = 0$ 附近的放大表示)

4.3. 位力定理

在玻色凝聚系统中, 总能量是由动能 E_{kin}/N 、谐振势能 E_{ho}/N 和相互作用能 E_{pot}/N 等组成的, 它们要满足位力定理

$$2E_{kin}/N - 2E_{ho}/N + 3E_{pot}/N = 0. \quad (18)$$

位力定理是检验 G-P 方程基态波函数解正确性的一个有效工具. 为此, 我们选取不同 γ 值进行计算, 确定基态波函数有关参数以及系统化学势、系统单原子能量(动能、谐振势能和相互作用能), 并将结果列于表 1. 化学势和能量均以 $\hbar\omega$ 为单位. 表中所列的数字完全满足位力定理, 这表明, 我们构造的类似高斯指数型分布的波函数是合理的, 所求的结果是可靠的.

从表 1 还可以看到, 当 $\gamma = 0$ 时, 系统单原子相互作用能为零, 动能和谐振势能相等, 化学势和单原子能量相等, 均为无相互作用模型的分析值 1.5. 这说明理想的高斯分布只是本文新解的一个特例. 当凝聚原子数 N 增加, 即 γ 值增大时, 原子间的排斥作用将使凝聚原子云中心密度减小, 原子云向外扩展, 在原子云的边缘处, 谐振势能变大. 因此, 原子数增加的结果导致单原子的势能和相互作用能增加而动能减小, 原子云分布也逐渐变“胖”(见图 2). 在大

原子数 N 的极限条件下, 谐振势能和相互作用能要比动能大得多, 即满足托马斯-费米近似的条件, 此

表 1 γ 取不同值时基态波函数参数 σ 和 β 值以及系统化学势、单原子能量等值的计算结果

| γ | σ | β | μ | E/N | E_{kin}/N | E_{ho}/N | E_{pot}/N |
|----------|----------|---------|-------|-------|--------------------|-------------------|--------------------|
| -0.58 | 0.483 | 1.403 | 0.393 | 1.164 | 1.547 | 0.389 | -0.772 |
| -0.5 | 0.674 | 1.616 | 0.854 | 1.239 | 1.101 | 0.523 | -0.385 |
| -0.3 | 0.848 | 1.818 | 1.205 | 1.364 | 0.880 | 0.642 | -0.158 |
| -0.1 | 0.956 | 1.947 | 1.415 | 1.459 | 0.783 | 0.719 | -0.043 |
| 0 | 1.00 | 2.00 | 1.50 | 1.50 | 0.75 | 0.75 | 0 |
| 1 | 1.284 | 2.351 | 2.066 | 1.811 | 0.587 | 0.969 | 0.255 |
| 10 | 2.072 | 3.353 | 4.018 | 3.073 | 0.356 | 1.773 | 0.945 |
| 100 | 3.457 | 4.736 | 9.490 | 6.884 | 0.183 | 4.094 | 2.607 |
| 1000 | 5.577 | 5.539 | 23.57 | 16.88 | 0.082 | 10.11 | 6.687 |

时本文所解结果就趋向于托马斯-费米近似模型。

4.4. 基态波函数径向分布平均值

已知波函数, 可以得到反映凝聚原子尺度特征的波函数径向分布的平均值. 在高斯近似模型中, 有

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{3/2} \alpha; \text{ 在托马斯-费米模型中, 有 } \sqrt{\langle r^2 \rangle}$$

$= \sqrt{6\mu/7}$; 而在类高斯指数分布模型中, 有 $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\Gamma(5/\beta)\Gamma(3/\beta)}\sigma$. 显然, 上述径向分布的平均值均以谐振特征参数 a 为单位. 表 2 列出了不同方法得到的化学势和波函数径向分布的平均值, 结果表明, 在大凝聚原子数 N 的极限条件下, 我们构造的类高斯指数分布模型所解结果与托马斯-费米近似

表 2 化学势和凝聚原子云径向分布平均值

| γ | 托马斯-费米近似模型 | | 高斯近似模型 | | 类高斯指数分布模型 | |
|----------|------------|------------------------------|--------|------------------------------|-----------|------------------------------|
| | μ | $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ | μ | $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ | μ | $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ |
| 1 | 1.477 | 1.125 | 2.089 | 1.398 | 2.066 | 1.392 |
| 10 | 3.710 | 1.783 | 4.214 | 1.923 | 4.018 | 1.883 |
| 100 | 9.320 | 2.826 | 10.17 | 2.958 | 9.490 | 2.861 |
| 1000 | 23.41 | 4.480 | 25.37 | 4.665 | 23.57 | 4.497 |

模型趋向一致。

5. 结果及讨论

本文基于 G-P 平均场能量泛函, 提出了玻色凝聚气体具有类似于高斯指数型分布的基态波函数, 然后运用变分求解能量泛函极小的方法确定波函数中的待定值参数, 求出了不同条件下基态波函数的表达式, 其结果与直接从 G-P 方程出发, 进行数值计算所得到的结果一致. 在已求得的基态波函数的基础上, 对玻色凝聚气体基态的化学势、凝聚原子云分布的平均尺度等物理量进行分析和计算. 研究表明, 囚禁在谐振势阱中的玻色凝聚原子云, 用类高斯指数型分布来构造波函数能确切描述其基态特征. 随

着凝聚原子数的增加和排斥相互作用的增强, 系统化学势、凝聚原子云分布的平均尺度等物理量均与极限条件下所得结果一致. 本文所发展的这一方法, 数学计算简单, 结果可靠, 而且能进行解析处理. 基于这一思想, 我们可以将其运用到 BEC 研究的其他方面, 比如 BEC 的涡旋态也可采用类似的方法. 另外, 当前作为一种非常有效的研究 BEC 宏观量子性质的光晶格势 (optical lattices) 中玻色凝聚气体, 外加的光晶格子把磁阱中的 BEC 晶化为许多原子数在 200—2000 左右的子玻色凝聚气体. 对这一系统基态性质的研究, 目前通行的做法仍然用托马斯-费米近似模型, 由于每个光晶格中原子数较少, 用托马斯-费米近似的误差就较大, 因此, 将本文的方法运用这一领域, 将是很有意义的.

- [1] Anderson M H , Ensher J R , Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B , Mewes M O , Andrews M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Bradley C C , Sackett C A , Tollett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [4] Liu W M , Fan W B , Zheng W M *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [5] Liu W M , Wu B , Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [6] Wu Y , Yang X X , Xiao Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2200
- [7] Wu Y , Yang X , Sun C P 2000 *Phys. Rev. A* **62** 063603
- [8] Huang G X , Szeftel J , Zhu S 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053605
- [9] Huang G X , Makarov V A , Velarde M G 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023604
- [10] Xiong H W , Liu S J , Huang G X *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033609
- [11] Xiong H W , Liu S J , Huang G X 2003 *Phys. Rev. A* **67** 055601
- [12] Xiong H W , Liu S J , Huang H X 2002 *J. Phys. B :At. Mol. Opt. Phys.* **35** 4863
- [13] Xiong H W , Liu S J , Huang G X *et al* 2003 *J. Phys. B :At. Mol. Opt. Phys.* **36** 3315
- [14] Liu S J , Xiong H W , Huang G X , Xu Z J 2003 *Phys. Rev. A* **68** 065601
- [15] Yan K Z , Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 (in Chinese)
- [16] Xu Y , Jia D J , Li X G *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2831 (in Chinese) [徐 岩、贾多杰、李希国等 2004 物理学报 **53** 2831]
- [17] Hu Z F , Du C G , Li S Q 2003 *Chin. Phys. Lett.* **12** 708
- [18] Xu Z J , Cheng C , Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 (in Chinese) [徐志君、程 成、熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835]
- [19] Holland M J , Cooper J 1996 *Phys. Rev. A* **53** R1954
- [20] Edwards M , Dodd R J , Clark C W *et al* 1996b *Phys. Rev. A* **53** R1950
- [21] Dalfovo F , Stringari S 1996 *Phys. Rev. A* **53** 2477
- [22] Edwards M , Burnett K 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1382
- [23] Baym G , Pethick C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 6
- [24] Dalfovo F , Pitaevskii , Stringari S 1996 *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **101** 537
- [25] Pitaevskii L P 1961 *Sov. Phys. JETP* **13** 451
- [26] Gross E P 1963 *J. Math. Phys.* **4** 195
- [27] Fetter A L 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4245
- [28] Ruprecht P A , Holland M J , Edwards M 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4704
- [29] Dalfovo F , Giorgini S , Pitaevskii L P *et al* 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [30] Mewes M O , Andrew M R , van Druten N J *et al* 1996a *Phys. Rev. Lett.* **77** 416

Solution of the ground state wave function of Bose-condensed gas in a harmonic trap based on the Gross-Pitaevskii function *

Xu Zhi-Jun^{1,2)} Shi Jian-Qing¹⁾ Li Zhen¹⁾ Cai Ping-Gen¹⁾

¹ *Department of Applied Physics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China*

² *The State Key Laboratory of Magnetic Resonance & Atomic & Molecular Physics, Wuhan 430071, China*

(Received 24 October 2005 ; revised manuscript received 9 November 2005)

Abstract

Based on the Gross-Pitaevskii (G-P) energy functional and variational method, we present a new method to find the ground state wave function for Bose-condensed gas in a harmonic trap at zero temperature. With this method we are able to find the analytic expression of ground state wave function and explore the relevant quantities, such as energy, chemical potential and so on. These results agree well with previous ground state numerical solutions of the G-P equation given by Dalfovo *et al.* Under the large number of particles N limit for repulsive interaction, our results and Thomas-Fermi approximation model approach to reaching unanimity. This new method is simple compared to other methods used to solve numerically the G-P equation, and one can obtain the analytic and reliable results.

Keywords : Bose-condensed gas, G-P function, harmonic trap, ground state wave function

PACC : 0365, 0530J, 0260

* Project supported by the State Key Laboratory of Magnetic Resonance & Atomic & Molecular Physics Foundation (Grand No. T152501) and the Foundation of Education Commission of Zhejiang Province, China (Grant No. 20040599).