

一个新的三维二次混沌系统及其电路实现*

王光义¹⁾ 丘水生²⁾ 许志益¹⁾

1) 杭州电子科技大学电子信息学院, 杭州 310037)

2) 华南理工大学电信学院, 广州 510640)

(2005 年 8 月 19 日收到, 2005 年 11 月 6 日收到修改稿)

为了产生复杂的混沌吸引子, 构造了一个新的三维二次自治混沌系统. 该系统含有三个参数, 每一个方程含有一个非线性乘积项. 利用理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数谱和分岔图对系统的基本动力学特性进行了分析. 结果表明, 该系统具有五个平衡点, 因而与 Lorenz, Rössler, Chen, Lü 等混沌系统是非拓扑等价的; 当其参数满足一定条件时, 系统是混沌的. 与 Lorenz 等混沌系统相比, 该系统具有更大的正 Lyapunov 指数, 能够产生复杂的混沌吸引子和一些有趣的动力学行为. 最后, 设计了实现该系统的混沌电路, 电路实验结果与动力学特性分析、数值仿真完全相符, 从而验证了系统的混沌行为.

关键词: 三维二次自治系统, 混沌, 混沌吸引子, 电路实现

PACC: 0545

1. 引言

在 Lorenz 发现第一个混沌吸引子之后的若干年间^[1], Lorenz 系统作为一个典型的混沌模型得到了广泛、深入的研究. 20 世纪 70 至 80 年代是混沌理论的发展时期, 在此期间 Rössler 构造了一个简单的三维混沌系统^[2]. 上世纪 90 年代初发现了混沌可以控制和同步, 由此使人们把工程中的混沌现象从当初作为一种科学探索逐步转移到极具潜力的工程应用上来. 因此, 有目的地产生混沌不仅是混沌理论研究的需要, 而且已成为混沌应用的关键问题. 在 Lorenz 系统的基础上, 1999 年 Chen 利用混沌反控制 (Chaotification) 方法成功实现了一个与 Lorenz 系统相似但非拓扑等价的新混沌系统^[3], 即 Chen 系统, 由此激发了人们对混沌生成的研究兴趣. 除偶然遇到混沌外, 有目的地产生混沌似有两种方法, 一是 Spratt 的计算机穷举搜索法^[4,5], 二是 Chen 的混沌反控制法^[6]. 利用混沌反控制方法, 文献[7,8]在 Lorenz 系统基础上构造了一个 Lü 系统和一个统一混沌系统. 近几年来, 国内外对混沌和超混沌生成及应用的研究已成为一个热点^[9-21].

近来, 文献 9 在 Lorenz 系统第一个方程中增加了一个非线性乘积项, 构成了一个新的自治混沌系

统. 与只含两个或一个非线性项的系统相比, 该系统有较复杂的动力学特性.

本文利用混沌反控制方法构造了另一个新的三维二次混沌系统. 系统代数结构及其参数的确定基于混沌反控制思想^[9], 即如果使系统出现混沌, 则该系统应是耗散的; 系统应存在一些不稳定的平衡点, 尤其存在一些鞍点; 系统还要存在一些非线性乘积项, 以便产生不同变量间的相互影响; 系统的轨线是有界的. 与 Lorenz, Rössler, Chen, Lü 系统相比, 本文提出的混沌系统多一个非线性项, 因而出现了一些与他们不同的复杂动力学特性, 如存在五个平衡点 (Lorenz, Chen, Lü 系统有三个平衡点, Rössler 系统仅有两个平衡点), 较大的正 Lyapunov 指数和较大的混沌区间, 较复杂的分岔行为等. 与文献 9 的系统相比, 本文提出的混沌系统由于增加的非线性乘积项带有较大的权重系数, 其代数结构也有不同, 因而其分叉、混沌行为更为复杂, 且出现一些有趣的复杂现象. 文中分析了新混沌系统的基本动力学特性, 设计了系统的实现电路, 并通过理论分析、数值仿真和电路实验验证了系统的混沌性.

2. 混沌模型

文献 9 在 Lorenz 系统中增加了一个非线性项

* 国家自然科学基金(批准号: 60372004), 浙江省自然科学基金(批准号: Y105175)和杭州电子科技大学科研基金(批准号: KYS051505010)资助的课题.

yz ,从而获得一个新的混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + yz, \\ \dot{y} &= cx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{1}$$

该系统每个方程中都含有一个非线性乘积项,具有五个平衡点和较大的混沌范围.与 Lorenz 系统相比,它有更复杂的分岔行为和动力学特性.

基于 Lü 系统^[7],我们构造了一个新的三维二次自治系统. Lü 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= cy - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{2}$$

在系统(2)第一个方程的括号中加入一个非线性乘积项 yz ,第二个方程中加入一个受系数控制的状态变量 x ,可得到一个新的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x + yz), \\ \dot{y} &= cx - xz + y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{3}$$

或

$$\dot{x} = f(x), \tag{4}$$

其中 $x = (x, y, z) \in R^3$, $f(x)$ 是(3)式右端矢量场的向量形式, $a, b > 0, c \geq 0$ 均为实常数.当 $a = 35, b = 0.9, c = 25$ 时系统存在一个混沌吸引子,如图 1 所示.

可以证明,系统(3)与系统(1)以及 Lorenz, Chen, Lü 系统是非拓扑等价的.虽然系统(3)与系统(1)相似,但系统(3)中的非线性乘积项 yz 有更大的权重系数,从而加剧了不同变量间的相互影响,使得它具有更复杂的分岔特性和混沌行为(参看图 3 和文献[9]中的图 2).另外,系统(3)的参数 c 可以为零,且当 $c = 0$ 时,它仍呈现混沌特性,尤其当 a, b 变化时,系统呈现与 Lü 系统类似但比之更为复杂的转换特性,即系统可出现类 Lorenz(Lorenz-like)类 Chen 和类 Lü 吸引子,且随着参数 a, b 的变化,系统可以在这三个吸引子之间连续过渡.对于这些有趣的现象,我们将在以后的论文中详细分析.下面主要分析系统(3)的基本动力学特性.

然而,迄今还没有系统的理论方法来设计一个连续的混沌系统^[8].下面采用数学分析和分岔分析(仿真)相结合的方法研究系统的动力学特性.

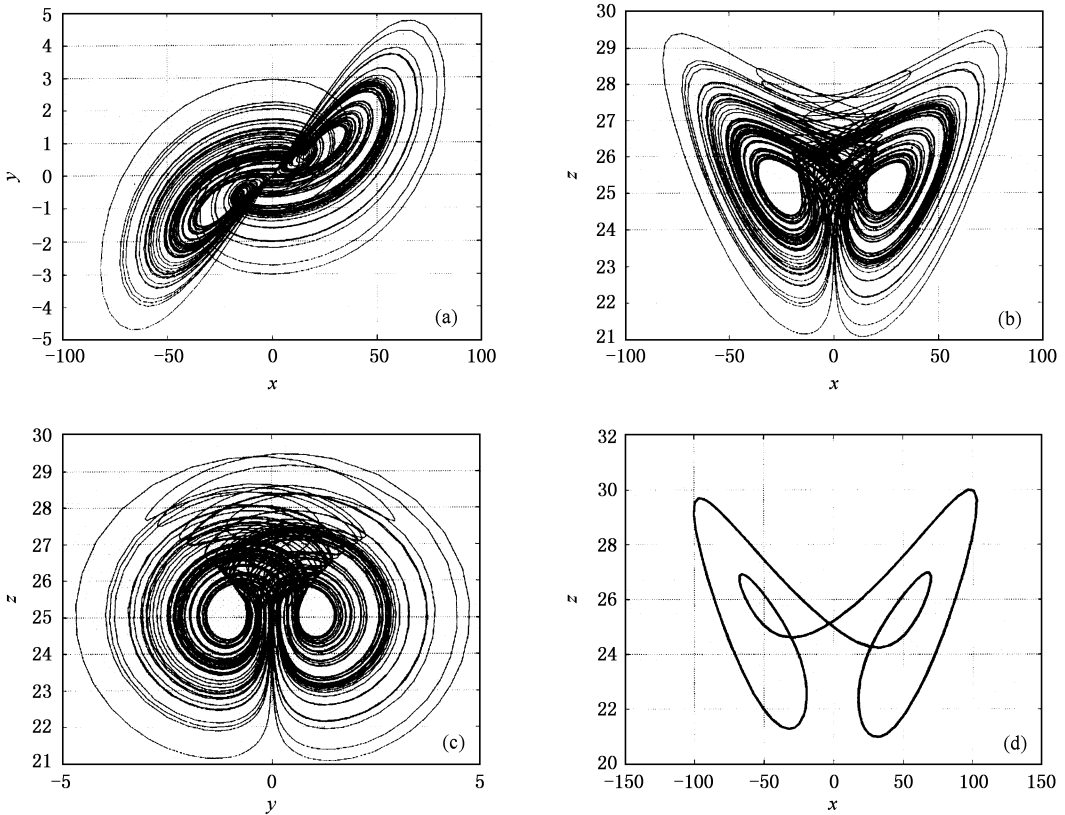


图 1 混沌吸引子及周期轨 (a)(b)(c)分别为吸引子在 $x-y, x-z, y-z$ 平面上的投影 (d)为周期轨在 $x-z$ 平面的投影

3. 基本动力学特性

系统具有自然的对称性, 即作如下变换后:

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z) \quad (5)$$

系统保持不变. 变换(5)可表示为

$$P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto PxP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

它满足

$$f(Px) = Pf(x),$$

即系统(3)关于 z 轴对称, 其轨道在 $x-y$ 平面上的投影对原点对称, 且这种对称性对所有参数均成立.

现在考虑系统的稳定性. 若 $c < 0 < a$ 且满足条件

$$-\frac{3a+2}{a+1} > c > -a(a+1), \quad (6)$$

则系统(3)关于原点是全局、一致渐进稳定的. 若选取 Lyapunov 函数为

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}[x^2 + (a+1)y^2 + z^2],$$

容易验证

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{a+ac+c}{2}(x-y)^2 - \frac{a-ac-c}{2}x^2 \\ & + \frac{3a+ac+c+2}{2}y^2 - bz^2. \end{aligned}$$

为保证 $\dot{V} < 0$, 在 $c < 0 < a$ 时须满足

$$a+ac+c > 0 \text{ 及 } 3a+ac+c+2 < 0,$$

此即为条件(6). 与 Lorenz 系统族中的混沌系统相比, 此稳定条件是苛刻的.

由于散度

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(a+b-1),$$

为了使系统成为耗散的, 要求

$$a+b-1 > 0, \quad (7)$$

例如可选 $a = 35, b = 0.9$, 此时系统以指数形式收敛:

$$V(t) = V(0)e^{-(a+b-1)t}, \quad (8)$$

且 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数率 $-(a+b-1)$ 收缩到零, 所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其渐近运动将被固定在一个吸引子上.

令方程(3)右端为零, 除解得 $x = y = z = 0$ 外, 还有如下解:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{b_1}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{b_2},$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \pm \sqrt{b_1} q_1, \quad y_{3,4} = \pm \sqrt{b_2} q_2, \\ z_{1,2} &= p_1, \quad z_{3,4} = p_2, \end{aligned}$$

其中

$$b_1 = \frac{bp_1}{p_1 - c},$$

$$b_2 = \frac{bp_2}{p_2 - c},$$

$$q_1 = p_1 - c,$$

$$q_2 = p_2 - c,$$

$$p_1 = \frac{(c-1) + \sqrt{(c+1)^2 + 4}}{2},$$

$$p_2 = \frac{(c-1) - \sqrt{(c+1)^2 + 4}}{2}.$$

为保证系统(3)实平衡点的存在, 须满足

$$b_1 > 0, b_2 > 0. \quad (9)$$

在 S_0 处线性化方程(3), 得 Jacobian 矩阵

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

和特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 + (a+b-1)\lambda^2 \\ &\quad - (a-ab+ac+b)\lambda - at(1+c). \end{aligned} \quad (10)$$

为了能够产生混沌, S_0 应为不稳定的. 再考虑(7)式和 Routh-Hurwitz 条件, 有

$$a+b-1 > 0 \quad (a-ab+ac+b) > 0$$

或

$$at(c+1) > 0. \quad (11)$$

从(11)式最后一项看出, $a, b(c+1)$ 须都为正, 或其一为正, 另两皆负. 例如可取

$$a > 0, b > 0, c > 0, \quad (12)$$

在此条件下(9)式亦成立.(9)(11)式是系统(3)产生混沌的必要条件, 此时系统有 5 个平衡点:

$$S_0 = (0, 0, 0),$$

$$S_1(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_1} q_1, p_1),$$

$$S_2(-\sqrt{b_1}, -\sqrt{b_1} q_1, p_1),$$

$$S_3(\sqrt{b_2}, \sqrt{b_2} q_2, p_2),$$

$$S_4(-\sqrt{b_2}, -\sqrt{b_2} q_2, p_2).$$

其实, 若解特征方程(10), 可得特征根

$$\lambda_1 = -b$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{a-1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a+1)^2 + 2ac},$$

$a > 0, b > 0, c > 0$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$; 若 $c = 0$,

则

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -a.$$

两种情况都保证原点是一个三维相空间中的鞍点.

在平衡点 S_1, S_2 线性化系统 (3), 得相同的特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - 1)\lambda^2 + A\lambda + B,$$

其中

$$\begin{aligned} A = & -a + ab - b + b_1 + ap_1 + ap_1^2 \\ & - ac - acp_1 - ab_1q_1^2, \\ B = & -ab + ab_1 + abp_1 + ab_1q_1 + abp_1^2 \\ & + 2ab_1q_1p_1 + ab_1q_1^2 - abc \\ & - abcp_1 - abcq_1. \end{aligned}$$

在 $a = 35, b = 0.9, c = 25$ 时, 线性化系统在 S_1, S_2 的 Jacobian 矩阵具有相同的特征值:

$$\lambda_1 = -43.7317, \lambda_{2,3} = 4.4159 \pm j30.3095,$$

且满足 Shil'nikov^[22]定理, 即对于三阶自治系统平衡点的特征值 γ_1 及 $\sigma_1 \pm j\omega_1$, 若满足

$$\sigma_1\gamma_1 < 0, \text{ 且 } |\gamma_1| > |\sigma_1|,$$

此时, 系统 (3) 的矢量场满足产生混沌的鞍焦点条件. 同时, 如果系统的参数适当, 则可满足形成奇异鞍环的条件, 因而可产生混沌振荡^[23, 24].

在平衡点 S_3, S_4 的线性化系统亦具有相同的特征方程, 在上述典型参数下的特征值为

$$\lambda_1 = -51.4541, \lambda_2 = 14.2193, \lambda_3 = 2.3348.$$

这两个平衡点是不稳定的鞍点, 不满足产生混沌的条件.

4. 分岔分析

图 2 示出了系统的 Lyapunov 指数随参数 b 变化的特性 (固定参数 $a = 35, c = 25$), 图 3 是变量 y 对应的分岔图. 由图 2 看出, 系统 (3) 具有较大的正 Lyapunov 指数, 其典型参数下的值为 $L_1 = 4.3108, L_2 = 0, L_3 = -39.2088$, 相应的 Lyapunov 维数为 $d_1 = 2.11$. 在 $a = 35, b = 4.9, c = 25$ 时, 系统具有最大的正 Lyapunov 指数 $L_1 = 8.7880, L_2 = 0, L_3 = -47.6872$. 而在其各自的典型参数下, Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统的最大 Lyapunov 指数分别为 0.9047, 2.1931 和 1.2937.

由图 2, 3 看出, 当 $b = 0$ 时, 系统轨线被吸引到一个平衡点上. 当 b 由零逐渐增加至 0.55 时, 该区间存在着三个小周期窗口与弱混沌区交替出现. d

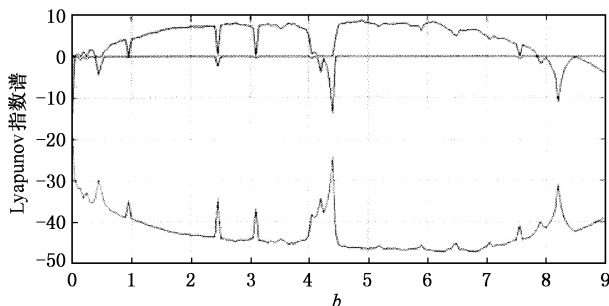


图 2 Lyapunov 指数谱, $a = 35, c = 25, b \in [0, 9]$

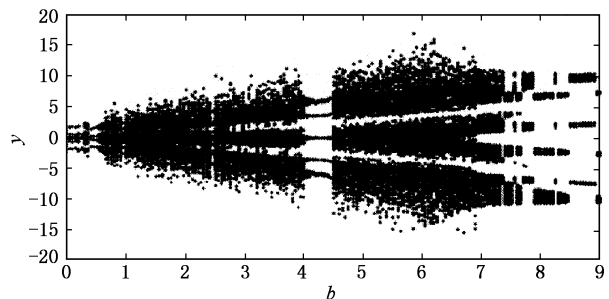


图 3 分岔图, $a = 35, c = 25, b \in [0, 9]$

$\in [0.92, 0.98]$ 对应的周期轨如图 1(d) 所示. $d \in [3.05, 3.09]$ 为拟周期, $d \in [4.05, 4.45]$ 为周期窗口. $d > 4.45$ 之后, 存在带状的混沌区, 且随着 b 的增加, 它变得越来越窄, 最终退化为周期.

5. 混沌系统的电路设计与实现

为了验证系统 (3) 的混沌行为, 我们设计了图 4 所示的混沌电路. 该电路由三路模拟运算电路所组成, 分别实现系统 (3) 中状态变量 x, y, z 的运算. 其中运放 (LF347) 及其外围电路可实现加、减、反相、积分运算, 模拟乘法器 (AD633) 可实现非线性乘积项.

图 4 中 R_4, R_{18} 及 R_{10} 分别对应系统参数 a, b, c . 在图 4 所示电路参数下, 固定 $R_4 = 10k\Omega$ (对应 $a = 35$), $R_{10} = 9k\Omega$ (对应 $c = 25$), 当 $R_{18} = 140k\Omega$ (对应 $b = 0.9$) 时, 在硬件电路实验中示波器上观察到的混沌吸引子如图 5(a)(b)(c) 所示; 当 $R_{18} = 87k\Omega$ (对应 $b = 4.2$) 时, 出现了与图 1(d) 相对应的周期轨, 如图 5(d) 所示.

与其它文献相比, 该混沌电路全都采用反相输入的运算电路, 电路参数与系统参数有着明确的对应关系, 可调电路参数少, 混沌范围大, 实验与数值仿真结果完全符合. 图 4 电路不但验证了系统 (3) 的

混沌行为 还可作为实际应用中(如混沌通信及混沌信息加密)的混沌信号源。

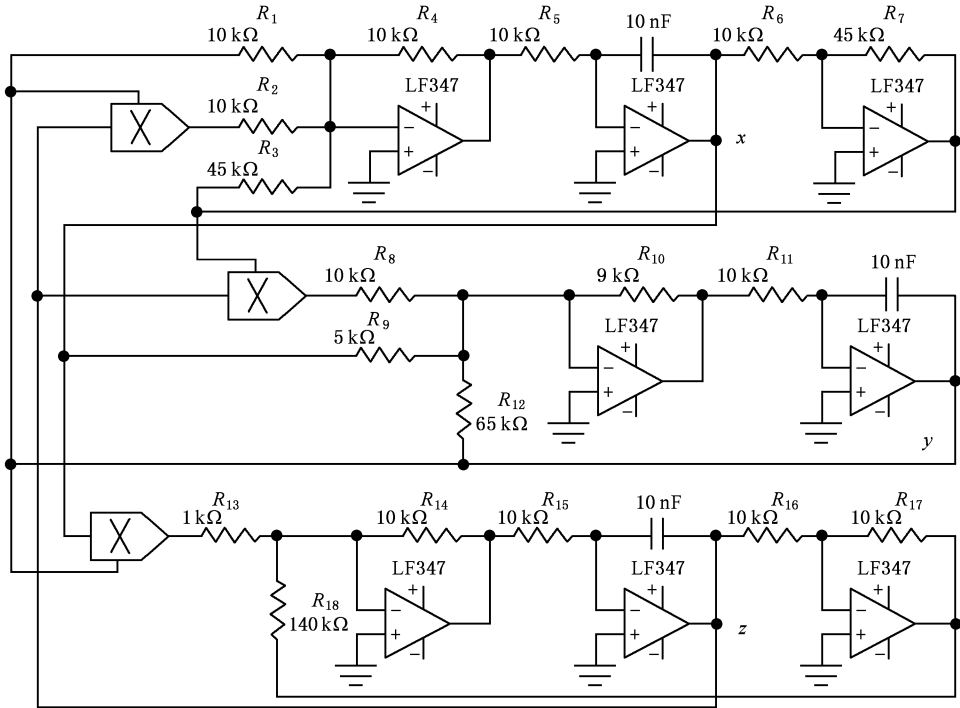


图 4 系统(3)的混沌电路

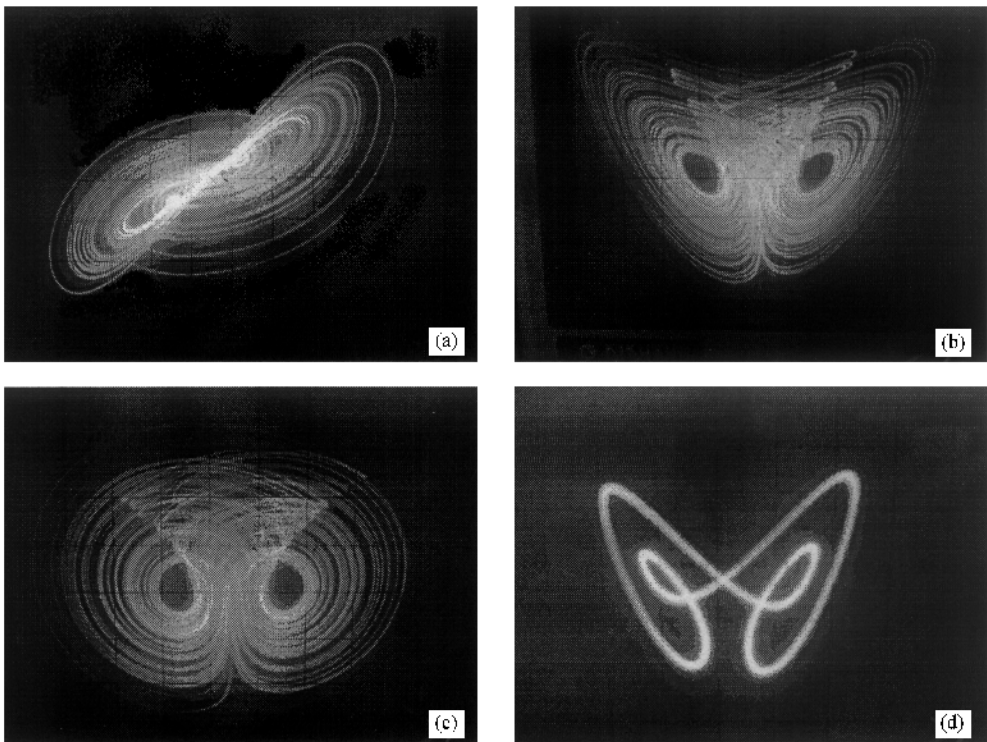


图 5 实验中观察到的混沌吸引子及周期轨 (a)(b)(c)分别为吸引子在 $x-y$ 、 $x-z$ 、 $y-z$ 平面上的投影 (d)为周期轨在 $x-z$ 平面的投影

6. 结 论

本文提出了一个三维自治混沌系统,该系统虽然比 Lorenz, Rössler, Chen 和 Lü 系统多一个非线性项,但它有着与这些系统明显不同的特性,如五个平衡点、较大的 Lyapunov 指数及更复杂的动力学行为. 理论上的动力学分析和数值仿真都说明了系统

的混沌性,这也通过实际的电路设计与实验得到了证实. 所设计的混沌电路都采用了反相输入的运算电路,使得电路参数与系统参数一一对应,可调电路参数少,调节方便. 该系统的一些重要问题如复杂性、控制和同步有待进一步研究. 本文提出的混沌系统和混沌电路,可作为混沌信号源应用于混沌通信和混沌信息加密之中.

-
- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos Sci.* **20** 130
- [2] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [3] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [4] Sprott J C 2000 *Amer. J. Phys.* **68** 758
- [5] Sprott J C 2000 *Phys. Lett. A* **266** 19
- [6] Chen G, Lai D 1998 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **8** 1585
- [7] Lü J, Chen G 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [8] Lü J, Chen G, Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
- [9] Qi G, Du S, Chen G 2005 *Physica A* **2** 295
- [10] Liu W, Chen G 2003 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **13** 261
- [11] Lü J, Chen G, Cheng D 2004 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** 659
- [12] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S *et al* 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [13] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) 禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]
- [14] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) 刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
- [15] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 (in Chinese) 禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111]
- [16] Elwakil A S 2000 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **28** 69
- [17] Elwakil A S, Kennedy M P 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **47** 76
- [18] Li Y, Chen G, Tang W K S 2005 *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, **52** 204
- [19] Wang G Y, Shi X M, Qiu S S, Li Zh Z Z 2005 *ICCCS Proceedings II* 1162
- [20] Lu J G 2005 *Chin. Phys.* **14** 1342
- [21] Lu J G, Xi Y G 2005 *Chin. Phys.* **14** 274
- [22] Silva C P 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **40** 675
- [23] Qiu S S 2000 *J. South China Univ. Tech.* **28** 18
- [24] Qiu S S 1997 *Proc. IEEE ISAS '97* 1033

A new three-dimensional quadratic chaotic system and its circuitry implementation *

Wang Guang-Yi¹⁾ Qiu Shui-Sheng²⁾ Xu Zhi-Yi¹⁾

¹⁾ *Institute of Electronics Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*

²⁾ *Institute of Electronics and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China*

(Received 19 August 2005 ; revised manuscript received 6 November 2005)

Abstract

In order to generate complex chaotic attractors, we construct a new three-dimensional quadratic autonomous chaotic system, in which each equation contains a single quadratic cross-product term and a system parameter. Basic dynamic properties of the new system are investigated via theoretical analysis and numerical simulation using the Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram. Our results show that this system has five equilibria, therefore is not topologically equivalent to the Lorenz, Rössler or the Chen and Lü systems, and the new system is chaotic when its parameters satisfy certain conditions. Compared with the systems mentioned above, the proposed system has larger positive Lyapunov exponent, displays a complex attractor and some other interesting properties. An electronic circuit was designed to realize the new chaotic system. Experimental chaotic behaviors of the system were found to be identical to the dynamic properties predicted by theoretical analysis and numerical simulations.

Keywords : three-dimensional quadratic autonomous system, chaos, chaotic attractor, circuitry implementation

PACC : 0545

* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 60372004), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y105175) and the Science Investigation Foundation of Hangzhou Dianzi University (Grant No. KYS051505010).