

一个新的四维混沌系统理论分析与电路实现^{*}

张宇辉 齐国元[†] 刘文良 阎彦

(天津科技大学电子信息与自动化学院, 天津 300222)

(2005 年 8 月 9 日收到, 2005 年 10 月 31 日收到修改稿)

分析了一个新的复杂的四维混沌系统的基本特性,该系统每个方程中包含一个三次交叉乘积项,共有 9 个平衡点,它们相对于原点和坐标轴具有完美的对称性,并且相对于线性特性和不变流形具有很好的相似性.描述了两个同时共存的对称双翼吸引子.最后,设计了一个模拟电路来实现这个新的四维混沌系统,表明数值仿真和电路实现具有很好的一致性,同时说明在应用上由于频率不同导致的仿真与物理实现之间的重要区别.

关键词: 四维混沌系统, Lyapunov 指数, 共存双翼吸引子, 电路实现

PACC: 0545, 2960

1. 引言

几十年来,混沌在数学、物理及工程应用领域得到了极大的研究和技术开发^[1-6].产生或强化混沌对研究混沌动力学特性和应用混沌通信加密等方面是非常重要的,大体上有两种方法:一种方法是基于一些已经存在的混沌系统来形成多卷波混沌吸引子.例如,在 Chua 电路基础上利用一些非光滑的非线性函数如线性分段函数^[7,8]、阶梯函数^[9]、迟滞函数^[10]以及饱和函数^[11]等来实现多种广义 Chua 电路.这些非线性函数不含有二次项,形成卷状的混沌吸引子.众所周知,在广义 Chua 混沌电路中很少出现周期轨.另一种方法是在 Lorenz 系统基础上发现新的三维混沌吸引子,这些系统中一般含有二次非线性项,没有非光滑的函数.比如, Vaněček 等^[12]提出了广义 Lorenz 系统, Chen 和 Lü 等^[13-16]发现 Lorenz 系统族,以及 Čelikovský 和 Chen 提出了广义 Lorenz 系统典型型,该典型型覆盖了很宽泛的带有二次项的三维自治混沌系统.通常,这些形成的 Lorenz 系统族只有一个混沌吸引子,有二个蝴蝶翼翅,在形状上与广义 Chua 电路形成卷状的吸引子不同.

最近, Qi 等^[17]构造了一个新的四维自治混沌系统,它的每个方程中含有三次非线性交叉乘积项.在很宽的参数范围系统产生复杂的动力学特性,包括

混沌, Hopf 分岔, 倍周期分岔, 周期轨, 汇和源等.

本文的主要目的是进一步分析新的四维混沌系统的基本特性,分析显示,系统拥有 9 个实平衡点,它们相对于原点和坐标轴对称,根据平衡点的线性化后的相似特性,9 个平衡点能分成三类.另外,我们发现系统同时存在两个对称双翼吸引子,这是以往广义 Lorenz 系统未出现的现象.为了通信中的同步应用,在物理上我们设计了模拟电路,表明数值仿真和电路实现具有很好的一致性.

2. 四维系统的一些基本特性

定义函数

$$f_1(x) = a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4,$$

$$f_2(x) = b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4,$$

$$f_3(x) = -cx_3 + x_1 x_2 x_4,$$

$$f_4(x) = -dx_4 + x_1 x_2 x_3,$$

Qi 等^[17]提出的四维自治混沌系统的动力学方程描述为

$$\dot{x}_i = f_i(x), i = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 是状态变量, a, b, c, d 是正值参数.

2.1. 平衡点

为了更好的分析系统,首先找出系统的平衡点,

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60374037),天津市高等学校科技发展基金(批准号 20051528)资助的课题.

[†] E-mail: qi_gy@yahoo.com.cn

从而分析平衡点附近的线性化特性及流形. 平衡点的分布和线性化特性影响着系统的动力学特性. 系统(1)的平衡点通过解以下代数方程得到,

$$f_i(x) = 0, i = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

计算得到系统共有 9 个平衡点(包括零点), 并且分成三类, 每一类具有相同的特征值. 令

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{cd}, \\ p &= \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}, \\ g &= p + a + b, \\ h &= p - a + b, \\ m &= p - a - b, \\ n &= p + a - b, \\ x_1^1 &= \sqrt{gq(2a)}, \\ x_2^1 &= \sqrt{2aq/g}, \\ x_3^1 &= \sqrt{hd(2q)}, \\ x_4^1 &= \sqrt{hq(2d)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \sqrt{mq(2a)}, \\ x_2^2 &= \sqrt{2aq/m}, \\ x_3^2 &= \sqrt{nd(2q)}, \\ x_4^2 &= \sqrt{nq(2d)}. \end{aligned} \quad (4)$$

第一类非零平衡点包括

$$\begin{aligned} S_1 &= [x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1], \\ S_2 &= [-x_1^1, -x_2^1, x_3^1, x_4^1], \\ S_3 &= [x_1^1, x_2^1, -x_3^1, -x_4^1], \\ S_4 &= [-x_1^1, -x_2^1, -x_3^1, -x_4^1]; \end{aligned} \quad (5)$$

第二类非零平衡点包括

$$\begin{aligned} S_5 &= [x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2], \\ S_6 &= [-x_1^2, -x_2^2, x_3^2, x_4^2], \\ S_7 &= [x_1^2, x_2^2, -x_3^2, -x_4^2], \\ S_8 &= [-x_1^2, -x_2^2, -x_3^2, -x_4^2]; \end{aligned} \quad (6)$$

第三类是零平衡点 $S_0 = [0, 0, 0, 0]$.

注意到这些平衡点中 $S_i, i = 1, \dots, 4$ 关于原点对称, 同样 $S_i, i = 5, \dots, 8$ 也是如此, $S_{1,2}, S_{3,4}, S_{5,6}$ 和 $S_{7,8}$ 是关于坐标平面 x_3-x_4 对称的, 而 $S_{1,3}, S_{2,4}, S_{5,7}$ 和 $S_{6,8}$ 是关于 x_1-x_2 对称的.

2.2. 相似性

在 s_0 处对系统(1)线性化, 有 Jacobian 矩阵

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix}, \quad (7)$$

矩阵 A_0 的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_{01} &= \frac{1}{2}(b - a + p), \\ \lambda_{02} &= \frac{1}{2}(b - a - p), \\ \lambda_{03} &= -c, \\ \lambda_{04} &= -d, \end{aligned} \quad (8)$$

与之相对应的特征向量为

$$\begin{aligned} v_{01} &= \left[-\frac{1}{2b}(a + b - p), 1, 0, 0 \right]^T, \\ v_{02} &= \left[-\frac{1}{2b}(a + b + p), 1, 0, 0 \right]^T, \\ v_{03} &= [0, 0, 1, 0]^T, \\ v_{04} &= [0, 0, 0, 1]^T, \end{aligned} \quad (9)$$

由于 a, b, c, d 均为正, 所以 $\lambda_{01} > 0$, 这表明平衡点 S_0 是一不稳定鞍点. 因此在 S_0 处线性化后的稳定流形和不稳定流形表述为

$$E^s(S_0) = \text{span}\{v_{02}, v_{03}, v_{04}\},$$

$$E^u(S_0) = \text{span}\{v_{01}\}.$$

对于非零平衡点, 由于它们的特征向量太长这里不再表述. 但是我们仍然能获得它们的丰富的特性.

结论 1 第一类平衡点 $S_i, i = 1, \dots, 4$ 是相互相似的, 因为它们具有一组相同的特征值, 第二类平衡点 $S_i, i = 5, \dots, 8$ 也是相互相似的, 同样它们也具有一组相同的特征值.

为了证明这一点, 令 A_i 是 $S_i, i = 1, \dots, 8$ 的 Jacobian 矩阵, 得到

$$\begin{aligned} A_1 = A_4 &= \begin{bmatrix} -a & a + x_3^1 x_4^1 & x_2^1 x_4^1 & x_2^1 x_3^1 \\ b - x_3^1 x_4^1 & b & -x_1^1 x_4^1 & -x_1^1 x_3^1 \\ x_2^1 x_4^1 & x_1^1 x_4^1 & -c & x_1^1 x_2^1 \\ x_2^1 x_3^1 & x_1^1 x_3^1 & x_1^1 x_2^1 & -d \end{bmatrix}, \\ A_2 = A_3 &= \begin{bmatrix} -a & a + x_3^1 x_4^1 & -x_2^1 x_4^1 & -x_2^1 x_3^1 \\ b - x_3^1 x_4^1 & b & x_1^1 x_4^1 & x_1^1 x_3^1 \\ -x_2^1 x_4^1 & -x_1^1 x_4^1 & -c & x_1^1 x_2^1 \\ -x_2^1 x_3^1 & -x_1^1 x_3^1 & x_1^1 x_2^1 & -d \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_5 = A_8 = \begin{bmatrix} -a & a + x_3^2 x_4^2 & x_2^2 x_4^2 & x_2^2 x_3^2 \\ b - x_3^2 x_4^2 & b & -x_1^2 x_4^2 & -x_1^2 x_3^2 \\ x_2^2 x_4^2 & x_1^2 x_4^2 & -c & x_1^2 x_2^2 \\ x_2^2 x_3^2 & x_1^2 x_3^2 & x_1^2 x_2^2 & -d \end{bmatrix},$$

$$A_6 = A_7 = \begin{bmatrix} -a & a + x_3^2 x_4^2 & -x_2^2 x_4^2 & -x_2^2 x_3^2 \\ b - x_3^2 x_4^2 & b & x_1^2 x_4^2 & x_1^2 x_3^2 \\ -x_2^2 x_4^2 & -x_1^2 x_4^2 & -c & x_1^2 x_2^2 \\ -x_2^2 x_3^2 & -x_1^2 x_3^2 & x_1^2 x_2^2 & -d \end{bmatrix}. \quad (11)$$

在矩阵 A_1 和 A_2 之间以及 A_5 和 A_6 之间存在一个变换矩阵 D_{12} , 使得

$$D_{12}^{-1} A_1 D_{12} = A_2, \\ D_{12}^{-1} A_5 D_{12} = A_6, \quad (12)$$

其中 $D_{12} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1)$, 并且 D_{12} 是一个正交变化矩阵, 因此

$$D_{12}^{-1} = D_{12}^T = D_{12}. \quad (13)$$

令 $V_i = [v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}]$ 表示 S_i , $i = 1, \dots, 8$ 的特征向量所构成的矩阵, 则容易得到

$$V_1 = V_4, V_2 = V_3, \\ V_5 = V_8, V_6 = V_7, \\ D_{12}^{-1} V_1 D_{12} = V_2, \\ D_{12}^{-1} V_5 D_{12} = V_6. \quad (14)$$

用 $W^s(S_i)$, $W^c(S_i)$, $W^u(S_i)$ 分别表示 S_i 稳定流形、不稳定流形和中心流形.

结论 2 $W^s(S_i)$, $W^c(S_i)$, $W^u(S_i)$ 满足系统 (1) 的对称性和相似性.

表 1 参数为 $a = 35, b = 10, c = 1, d = 10$ 时系统 (1) 的三类平衡点及相应的特征值

I	x_1	x_2	x_3	x_4	特征值	II	x_1	x_2	x_3	x_4	特征值	III(S_0)特征值
S_1	2.16	1.46	7.28	2.30	$\lambda_1 = -38.54$	S_5	0.78	-4.05	11.49	-3.63	$\lambda_1 = -72.13$	$\lambda_1 = 16.76$
S_2	-2.16	-1.46	7.28	2.30	$\lambda_2 = -3.74$	S_6	-0.78	4.05	11.49	-3.63	$\lambda_2 = -3.67$	$\lambda_1 = -41.76$
S_3	2.16	1.46	-7.28	-2.30	$\lambda_3 = 3.14 + 23.12i$	S_7	0.78	-4.05	-11.49	3.63	$\lambda_3 = 19.9022 + 18.50i$	$\lambda_1 = -1$
S_4	-2.16	-1.46	-7.28	-2.30	$\lambda_4 = 3.14 - 23.12i$	S_8	-0.78	4.05	-11.49	3.63	$\lambda_4 = 19.9022 - 18.50i$	$\lambda_1 = -10$

表 1 表明这三类平衡点在该组参数下都是鞍点, 为系统产生混沌的提供了可能性. 实际上, 当参数为 $a = 35, b = 10, c = 1, d = 10$ 时, 系统是混沌系统, 此时 Lyapunov 指数是 $\lambda_1 = 3.3152, \lambda_2 = 0.0042, \lambda_3 = -4.1591, \lambda_4 = -35.1674$, Lyapunov 维数是 $d_L = 2.7995$.

图 1 为系统轨迹在不同相平面和三维空间的数值仿真结果. 当取不同的初值情况下每个图中显示

2.3. 吸引子的耗散性

首先系统 (1) 是耗散的, 因为梯度(能量函数)为

$$\nabla V = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} + \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} \\ = b - (a + c + d), \quad (15)$$

因而为了确保系统 (1) 是耗散的, 必须满足

$$b - (a + c + d) < 0, \quad (16)$$

则指数收敛速度为

$$\frac{dV}{dt} = (b - (a + c + d))V, \quad (17)$$

所以, 体积为 $V(0)$ 的随着时间以指数收敛, 即 t 时刻的体积为 $V(t) = V(0)e^{(b-(a+c+d))t}$. 这样, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 每个小体积元以指数速率 $b - (a + c + d)$ 收敛到 0.

3. 两个同时存在的双翼吸引子

对于系统 (1), 当固定三个参数, 相对于第四个参数的分岔和 Lyapunov 指数谱的分析已经在文献 [17] 中说明. 表明系统 (1) 具有丰富的动力学特性包括混沌, 倍周期分岔, 汇, 源等. 另外一些动力学行为在文献 [17] 也作了观察和报道. 有趣的是, 在本文中观察到了一个新现象就是两个同时存在的双翼吸引子.

取参数 $a = 35, b = 10, c = 1, d = 10$, 系统 (1) 具有三类平衡点, 通过 (5) 和 (6) 式计算得出, 它们相应的特征值通过 (10) (11) 和 (8) 式给出, 如表 1 所示.

了两个同时存在的双翼吸引子. 其中上吸引子初值取 $x_0 = [1, 1, 1, 1]^T$, 下吸引子初值取 $x_0 = [1, 1, -1, -1]^T$, 并且用 $\circ, *, +, \square, \diamond$ 表示 S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 的位置. 第二类平衡点省略了, 因为在上述参数情况下这二类吸引子并不围绕它们运动.

从图 1 可以明显看出混沌系统的轨迹是关于原点和坐标轴对称的.

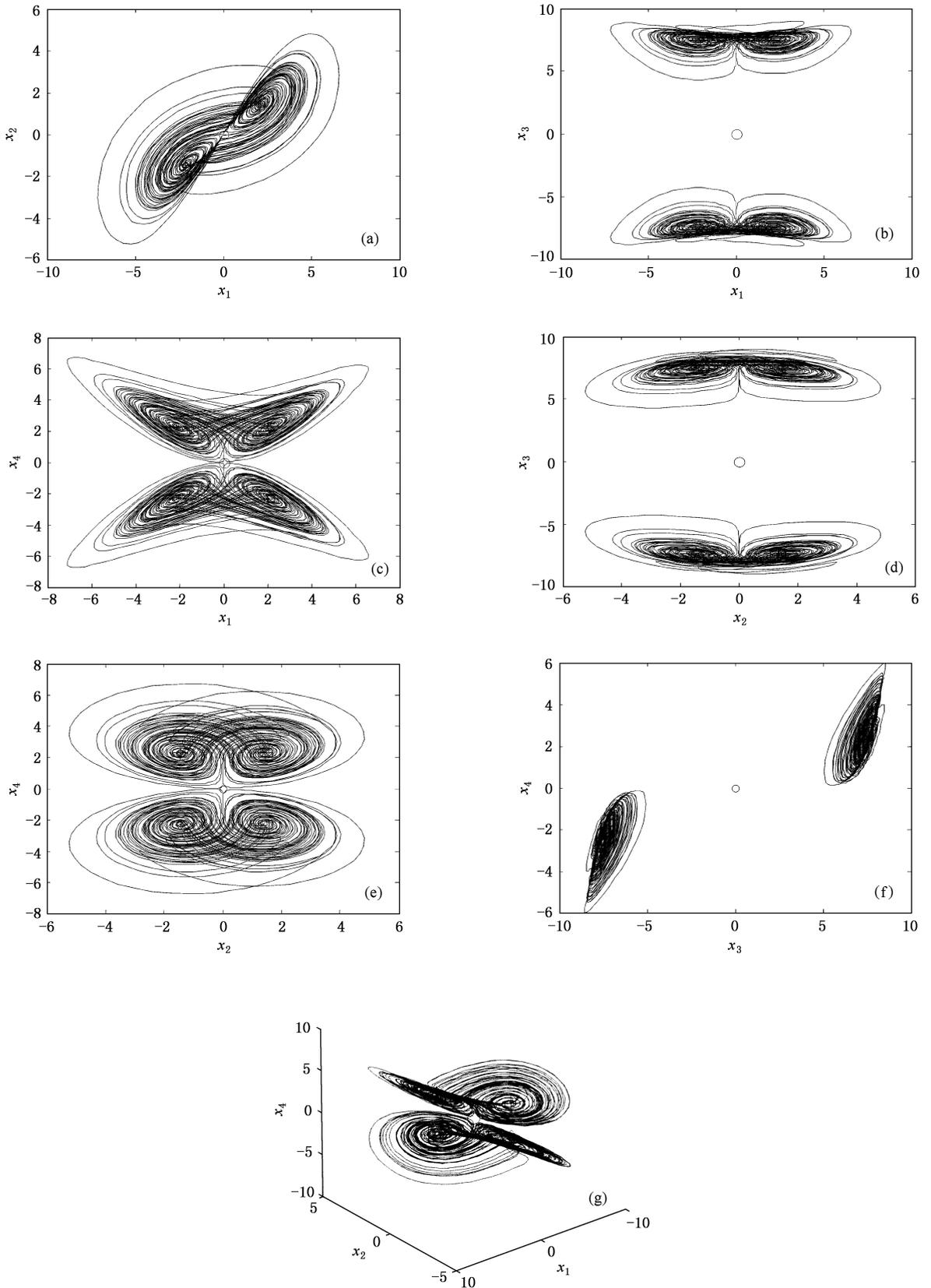


图 1 带有双翼的两个同时存在的混沌吸引子, 系统参数 $a = 35$, $b = 10$, $c = 1$, $d = 10$ (a) x_1 - x_2 平面投影 (b) x_1 - x_3 平面投影 (c) x_1 - x_4 平面投影 (d) x_2 - x_3 平面投影 (e) x_2 - x_4 平面投影 (f) x_3 - x_4 平面投影 (g) x_1 - x_2 - x_4 下的三维图

4. 四维混沌系统的电路实现

回顾一下电路实现 Lorenz 系统主要有两种方法:一是通过线性分段函数来代替二次乘积项 xz 和 yz ^[18],另一种是使用绝对值函数和开关函数来代替二个非线性项^[19,20].与 Lorenz 系统实现方法不同,这里系统(1)的实现是通过直接用模拟乘法器来代替

非线性乘积项,并不改变原来的非线性特性,将保持原系统的轨迹形状.

我们设计了一个模拟电路来实现系统(1),如图2所示.电路包含8个模拟乘法器来实现系统(1)中的4个三次交叉乘积项,15个运算放大器和线性电阻、电容,来实现加法、减法、乘法和积分.电路直接实现了原始方程,并且考虑了运算放大器和模拟乘法器的工作电压范围和各自的饱和特性.

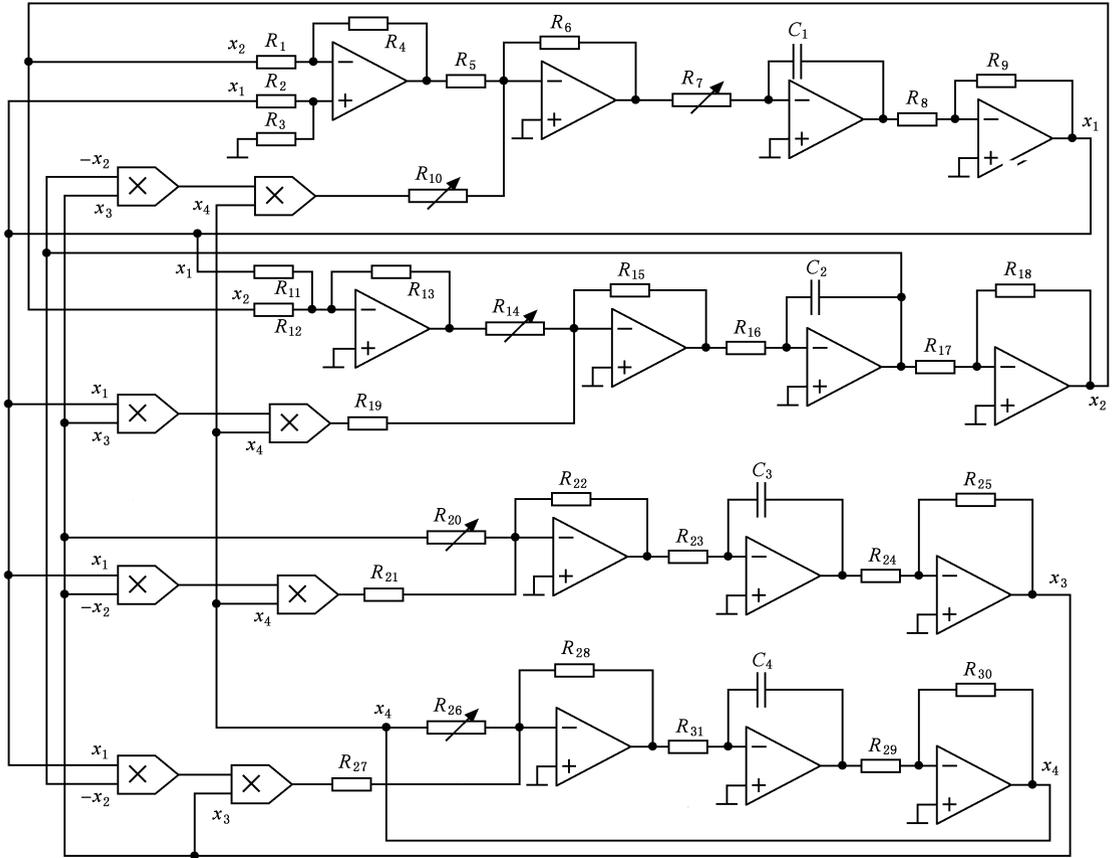


图2 四维系统(1)的电路实现,其中所有工作电压为 $\pm 15\text{V}$ (固定电阻: $R_1, R_2, R_3, R_4, R_8, R_9, R_{15}, R_{17}, R_{18}, R_{22}, R_{24}, R_{25}, R_{28}, R_{29}, R_{30} = 10\text{k}\Omega$; $R_5, R_6, R_{16}, R_{23}, R_{31} = 100\text{k}\Omega$; $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{19}, R_{21}, R_{27} = 1\text{k}\Omega$.可变电阻: $R_7 = 28.57\text{k}\Omega$; $R_{10} = 35\text{k}\Omega$; $R_{14}, R_{26} = 10\text{k}\Omega$; $R_{20} = 100\text{k}\Omega$.可变电容: $C_1, C_2, C_3, C_4 = 1\text{nF}$;其中系统(1)参数为 $a = 35, b = 10, c = 1, d = 10$,模拟乘法器:AD633,运算放大器:KF347)

在图2中具有可变电阻和电容,它们是 $R_7, R_{10}, R_{14}, R_{20}$ 和 C_1, C_2, C_3, C_4 . 首先取电容 $C_1, C_2, C_3, C_4 = 1\mu\text{F}$. 考虑到模拟乘法器 AD633 的输出是二乘积项的十分之一,从图2得到

$$\dot{x}_1 = \frac{1000}{R_7}(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{100}{R_{14}}(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4,$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{100}{R_{20}}x_3 + x_1 x_2 x_4,$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{100}{R_{28}}x_4 + x_1 x_2 x_3. \quad (18)$$

比较(1)和(18)式,得到

$$R_7 = \frac{1000}{a}(\text{k}\Omega),$$

$$R_{10} = a(\text{k}\Omega),$$

$$R_{14} = \frac{100}{b}(\text{k}\Omega),$$

$$R_{20} = \frac{100}{c}(\text{k}\Omega),$$

$$R_{26} = \frac{100}{d} (\text{k}\Omega).$$

取 $a = 35$, $b = 10$, $c = 1$, $d = 10$ 时, 则 $R_7 = 28.57\text{k}\Omega$, $R_{10} = 35\text{k}\Omega$, $R_{14} = 10\text{k}\Omega$, $R_{20} = 100\text{k}\Omega$, $R_{26} = 10\text{k}\Omega$, 这和图 2 的电阻数值是完全对应的. 考虑到运算快速性, 我们将可变电容从 $1\mu\text{F}$ 改为 1nF , 然而并不改变系统的相平面图, 只是改变了状态变量的变化率, 证明如下:

假设所有电容 C_i ($i = 1, \dots, A$) 都缩小到 $1/n$, 但电阻并不改变, 则电路系统方程

$$\dot{x}_i = n f_i(x), \quad i = 1, \dots, A. \quad (19)$$

比较系统 (1) 和 (19), 系统的速度放大了 n 倍, 因此

当改变电容时并不改变系统的相平面图只不过改变显示的效率. 实际上, 该方法可以应用于电子电路信号频谱带宽放大和扩展, 在通信加密中可以采用该方法将混沌信号扩频.

当系统参数取 $a = 35$, $b = 10$, $c = 1$, $d = 10$ 时, 图 3 为吸引子通过模拟电路的实现观察的结果, 这和图 1 数值仿真中的下吸引子有很好的 consistency. 当电路电容初值发生变化, 同样能出现上吸引子. 注意, 我们看到的是形状的一致性, 实际上, 电子实现和数值仿真信号频率是不同的. 该电子信号是在模拟示波器上即刻观察到的, 而图 1 为仿真结果, 数据需要运行一定的时间, 是积累后再绘制的结果. 由前

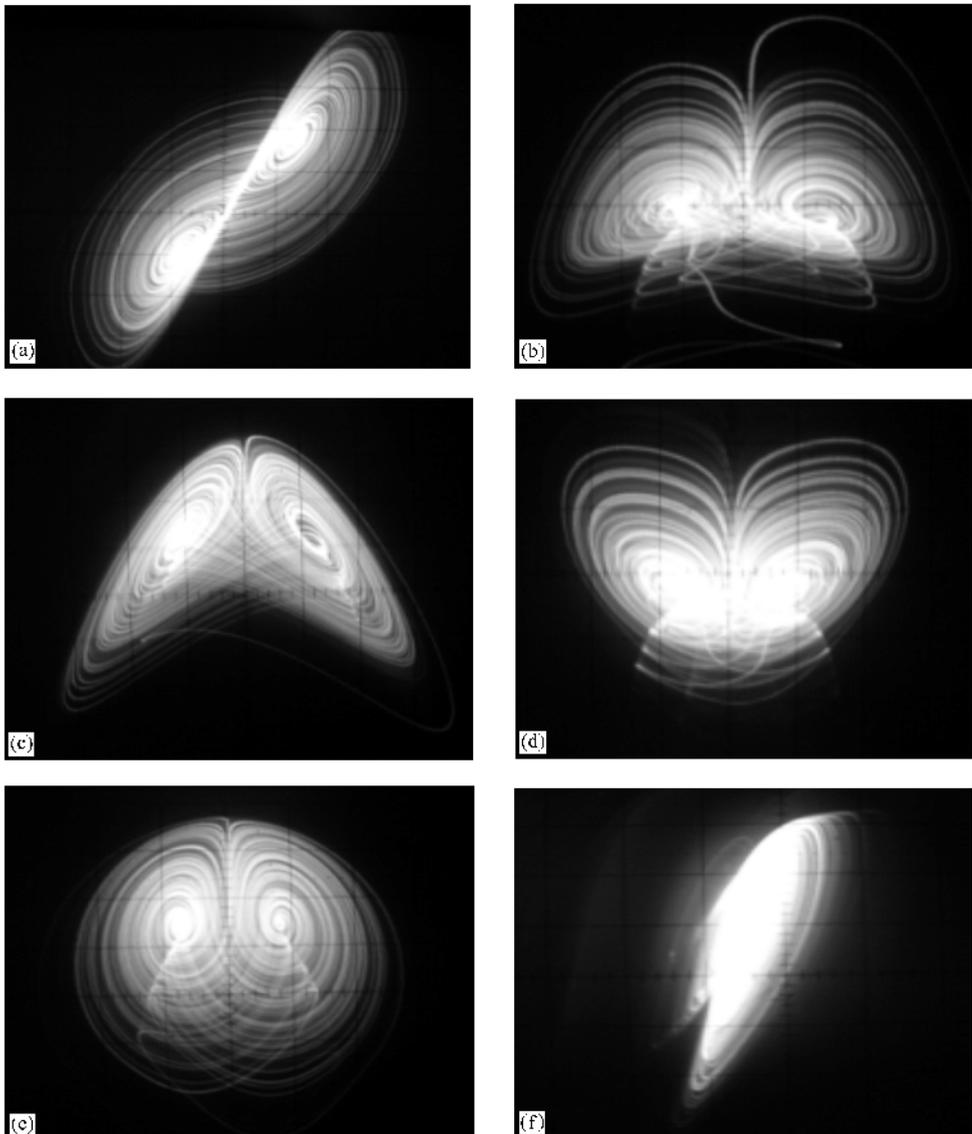


图 3 系统 (1) 取 $a = 35$, $b = 10$, $c = 1$, $d = 10$ 时通过电路观察到的下吸引子的相图, 每格 1V 电压 (a) $x_1 - x_2$ 平面投影 (b) $x_1 - x_3$ 平面投影 (c) $x_1 - x_4$ 平面投影 (d) $x_2 - x_3$ 平面投影 (e) $x_2 - x_4$ 平面投影 (f) $x_3 - x_4$ 平面投影

面分析如果将可变电容从 $1\mu\text{F}$ 改为 1nF , 即 $n = 1000$ 那么电子实现信号频率是仿真信号频率的 1000 倍. 电路实现是物理实现, 其高频特性在混沌加密和混沌信号驱动流体搅拌上有重要意义.

5. 结 论

本文深入分析了新的具有三次非线性交叉乘积

项的四维自治混沌系统的一些基本特性. 系统具有 9 个平衡点, 按照不同的线性化特性能够分成三类, 显示出新的系统具有更复杂的性质, 有丰富的对称性和相似性. 新的四维系统显示出两个同时存在的双翼吸引子的特性. 最后, 通过电路实现了这个系统, 并且看出电路实现和数值仿真之间具有很好的致性, 同时说明在应用上由于频率不同导致的重要区别.

-
- [1] Lu J, Xi Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 274
- [2] Chen G, Dong X 1998 *From chaos to order: methodologies, perspectives and applications.* (World Scientific, Singapore)
- [3] Chen G, Lü J 2003 *Dynamical analysis, control and synchronization of the generalized lorenz systems family* (Science Press, Beijing) (in Chinese) 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族动力学分析、控制与同步(科学出版社, 北京)
- [4] Wang P J, Wu G Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3034 (in Chinese) [王培杰、吴国祯 2005 物理学报 **54** 3034]
- [5] Hao J H, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) 郝建红、李伟 2005 物理学报 **54** 3491]
- [6] Jie Q, Xu G 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 641
- [7] Chua L O, Roska T 1993 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **140** 147
- [8] Suykens J A K, Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **140** 861
- [9] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J, Ozoguz S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos.* **12** 23
- [10] Lü J, Han F, Yu X, Chen G 2004 *Automatica* **40** 1677
- [11] Lü J, Chen G, Yu X 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* **51** 2476
- [12] Vančėek A, Čelikovský S 1996 *Control Systems: From linear analysis to synthesis of chaos.* (Prentice-Hall, London)
- [13] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [14] Ueta T, Chen G 2000 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10** 1917
- [15] Lü J, Chen G, Cheng D, Čelikovsky S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **12** 2917
- [16] Lü J, Chen G, Cheng D 2004 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **14** 1507
- [17] Qi G, Du S, Chen G, Chen Z, Yuan Z 2005. *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 1671
- [18] Baghious E H, Jarry P 1993 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3** 201
- [19] Elwakil A S, Kennedy M P 2001 *IEEE Trans. on Circ. Sys. I.* **48** 289
- [20] Elwakil A S, Kennedy M P 2002 *IEEE Trans. on Circ. Sys. I.* **49** 527

Theoretical analysis and circuit implementation of a new four dimensional chaotic system^{*}

Zhang Yu-Hui Qi Guo-Yuan[†] Liu Wen-Liang Yan Yan

(*Department of Electronic Information and Automation , Tianjin University of Science and Technology , Tianjin 300222 , China*)

(Received 9 August 2005 ; revised manuscript received 31 October 2005)

Abstract

This paper further analyzes some basic properties of a new complex four-dimensional continuous autonomous chaotic system , in which each equation contains a cubic cross-product term. The new system has 9 equilibria which display graceful symmetry with respect to the origin and coordinate planes , and they are similar with respect to their linearized characteristics and invariant manifolds. Two coexisting symmetric double-wing chaotic attractors are described. Finally , an analog circuit is designed to implement the new system , which shows a good agreement between numerical simulation and experimental results , and explains their significant distinction in applications due to difference in frequencies .

Keywords : four-dimensional chaotic system , Lyapunov exponent , coexisting double-wing chaotic attractor , circuit implementation

PACC : 0545 , 2960

^{*} Projection supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60374037) and the Science and Technology Development Foundation of Tianjin Colleges (Grant No. 20051528).

[†] E-mail : qi_gy@yahoo.com.cn