

含崩塌概率的一维沙堆模型的自组织临界性^{*}

周海平^{1)B)} 蔡绍洪^{2)B)} 王春香^{1)B)}

1) 贵州大学物理系, 贵阳 550025)

2) 贵州财经学院, 贵阳 550004)

3) 贵州省光电子技术及应用重点实验室, 贵阳 550025)

(2005 年 9 月 7 日收到, 2005 年 9 月 19 日收到修改稿)

提出了一个含崩塌概率的一维沙堆模型,并用元胞自动机方法对该模型进行计算机模拟.结果表明在崩塌概率 p 从 0 到 1 的变化过程中存在两个临界点 p_1 和 p_2 .当 $p_1 < p < p_2$ 时模型具有自组织临界行为,并且系统在从平凡行为到自组织临界行为之间有一个快速的转变.当模型具有自组织临界性时,这种自组织临界行为具有普适性,两个临界指数分别是 1.50 ± 0.02 和 1.58 ± 0.15 .该模型能够较好地解释一维米粒堆实验中出现的自组织临界现象.

关键词:自组织临界性, BTW 模型, 崩塌概率

PACC: 0565

1. 引 言

自组织临界现象是广泛存在于自然与社会中的一类现象,如雪崩,地震,股市崩盘等都可归纳为自组织临界现象.这种现象最本质的特征就是在不调控外界参数的情况下,系统会自动地演化到某个临界状态,在这个状态下,事件发生的概率与事件本身的规模成幂指数关系.自组织临界现象中最有名的例子是沙堆演化^[1],考虑一个很平的台子,往上面缓缓堆沙,每次只加一粒.起初,落下的沙粒就停在原地,当我们继续加沙时,沙堆就变得越来越高,这时,再加上一颗沙子有可能会使部分沙粒发生崩塌,而崩塌的沙粒又会引起别的沙粒也发生崩塌,依此类推.我们把从第一颗沙粒崩塌开始到所有沙粒不再崩塌的整个过程称为一次雪崩,在这个过程中崩塌的沙粒数称为雪崩大小,记为 S ,所持续的时间称为弛豫时间,记为 T ,随着沙粒的不断加入,沙堆变得越来越陡,这时单个沙粒的倒塌可能会引起系统中大量沙粒的倒塌,最终沙堆的坡度会达到某个固定值,这时加入的沙粒的数量和从台子边缘落下的沙粒的数量相等,并且此时雪崩发生的概率 D 与雪崩大小 S 和弛豫时间 T 满足幂律关系,即

$$D(S) \propto S^{-\alpha}, \quad D(T) \propto T^{-\beta}. \quad (1)$$

1987 年 Bak 等人通过观察沙堆,做了一些简化之后提出了著名的 BTW 沙堆晶格模型^[2],考虑一个有 N 个晶格点的晶格,整数 z_i 代表 i 晶格点与相邻晶格点的高度差, z^c 代表临界高度差,也称为临界倾角,当 $z_i \geq z^c$ 时, i 晶格点的沙粒会崩塌到与其相邻的晶格点上,这种崩塌能够一直传递下去,直到所有晶格点的高度差都小于 z^c 为止.他们用元胞自动机的方法在计算机上进行模拟,结果发现二维和三维的沙堆系统具有自组织临界性质,而一维沙堆系统不具备自组织临界性,BTW 模型提出以后,很多人在其基础上做了进一步的研究^[3-13],同时,一些实验也随之进行^[14,15],典型的一个是 1996 年由 Frette 等人完成的工作^[15].他们用米粒代替沙粒,将米粒放入两片平行且立于桌面的平行玻璃板间,玻璃板的间距小于米粒的长度,这样米粒会因玻璃板的限制而形成一维米堆,不断地将米粒加入玻璃板间,随着米堆的增高会引起米粒崩塌,崩塌过程中若米粒抵达边缘处,就会因崩塌而离开系统.Frette 等人记录了每次雪崩影响的米粒数,结果发现圆米堆没有自组织临界特性而长米堆则有自组织特性,显然,一维 BTW 模型不能解释这种现象,这说明一维 BTW

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10347003)、贵州省科学技术基金(批准号:20043017)和贵州省委组织部特助基金资助的课题.

[†] E-mail: hpzhou2885@sina.com

沙堆模型遗漏了真实沙堆的某些细节. 基于此, 我们对这一模型进行改进提出了一个含崩塌概率的新的一维沙堆模型, 并用元胞自动机方法对该模型进行计算机模拟, 研究其自组织临界性质, 并用该模型来解释米粒堆实验.

2. 模型与模拟

2.1. 模 型

图 1 是一个长度为 L 的一维沙堆模型, 沙堆的左边被一挡板挡住, 右边是开放的, 沙粒逐个沿着挡板落下, 因此沙粒只能从左往右崩塌, 当沙粒超出边界时便离开系统. 我们用 h_i 表示位置 i 处的沙堆高度, z_i 表示位置 i 处的局域倾角, $z_i = h_i - h_{i+1}$, 若往 i 位置加入一颗沙粒, 则有 $z_i \rightarrow z_i + 1$, $z_{i-1} \rightarrow z_{i-1} - 1$. 若某时刻有一颗沙粒从 i 位置滑向 $i+1$ 位置, 则有 $z_i \rightarrow z_i - 2$, $z_{i+1} \rightarrow z_{i+1} + 1$, $z_{i-1} \rightarrow z_{i-1} + 1$; 若沙粒从右边界滑出系统, 则 $z_L \rightarrow z_L - 1$, $z_{L-1} \rightarrow z_{L-1} + 1$.

崩塌判据: 当 $z_i < z^c$ 时, 沙粒不发生崩塌; 当 $z_i > z^c$ 时, 沙粒发生崩塌; 当 $z_i = z^c$ 时, 沙粒以概率 p 崩塌 ($0 < p < 1$).

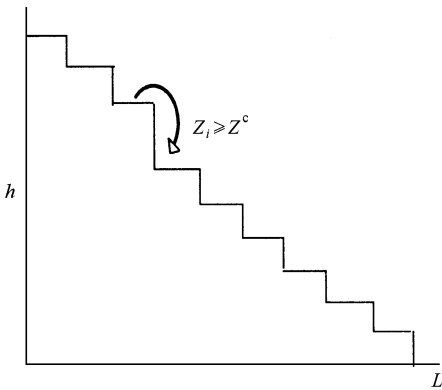


图 1 一维沙堆模型

2.2. 模 拟

假设在 t 时刻 i 位置的一颗沙粒滑向 $i+1$ 位置, 此时 z_{i+1} , z_{i-1} , z_i 均发生了变化, 那么 $t+1$ 时刻这三个位置的沙粒都会按前面规定的崩塌判据进行演化. 若 i 位置在 t 时刻不发生崩塌, 那么在 z_i 不变的情况下这种稳定状态将能够保持下去. 若 t 时刻沙堆中有多个位置满足崩塌条件, 那么这些沙粒

应同时崩塌. 起初所有位置的沙粒高度都为零, 然后沿着左边的挡板逐个加入沙粒, 添加沙粒的过程中会伴随着大小不等的雪崩, 只有当前一次雪崩结束时才允许继续添加下一颗沙粒, 在沙堆达到临界状态之后再加入 10^6 颗沙粒, 我们把临界倾角定为 2, 把沙粒从一个位置运动到与其相邻位置所经历的时间当作一个时间单位, 记录每加一颗沙粒引起的雪崩大小和弛豫时间, 统计不同雪崩大小和弛豫时间的分布情况, 并计算平均弛豫时间 T .

$$T = \sum_{i=1}^N T_i / N, \quad (2)$$

N 为沙堆达到临界状态之后继续加入的沙粒数, T_i 为加入第 i 颗沙粒的雪崩弛豫时间. 模拟过程中采用元胞自动机方法, 这样可以很好地处理沙堆演化过程中多粒子并行运动问题.

3. 结果与讨论

在具体的模拟过程中可以改变崩塌概率和系统大小, 对于每组条件都模拟 20 次, 然后对这 20 个样本作平均, 每个样本都是在系统演化到临界状态之后再加入 10^6 颗沙粒进行模拟, 统计雪崩大小和弛豫时间的分布情况, 同时计算出平均弛豫时间.

3.1. 崩塌概率对平均弛豫时间的影响

由图 2 可以看出当 $p < 0.05$ 或 $p > 0.98$ 时, T 的变化非常显著, 我们把这两个点称为临界点, 用 p_1 和 p_2 表示. 在 $p_1 < p < p_2$ 时, T 保持稳定.

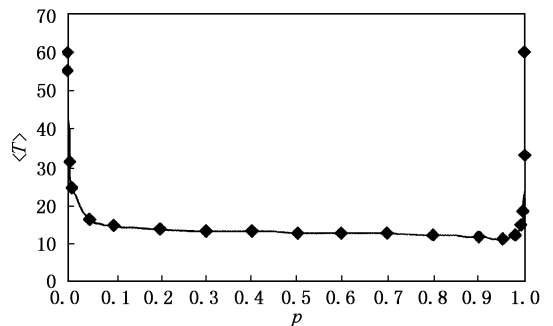


图 2 平均弛豫时间随崩塌概率的变化趋势, $L=60$

3.2. 崩塌概率不同时雪崩大小和弛豫时间的分布情况

图 3(a) 展现了沙堆达到临界状态后雪崩大小的分布情况, (b) 为弛豫时间的分布情况. 我们发现大雪崩发生的概率很小而小雪崩发生的概率很大,

并且它们呈幂指数关系 $D(S) \propto S^{-\alpha}$, $\alpha = 1.50 \pm 0.02$ 弛豫时间与雪崩概率也体现了这种关系 $D(T) \propto T^{-\beta}$, $\beta = 1.58 \pm 0.15$, 在 $p_1 < p < p_2$ 时, 这

种标度关系不会随崩塌概率 p 的变化而变化. 在 $p < p_1$ 或 $p > p_2$ 时, 这种标度关系不再成立, 其数值模拟结果如图 4 所示.

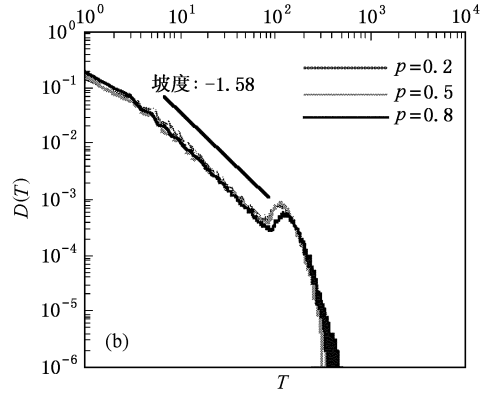
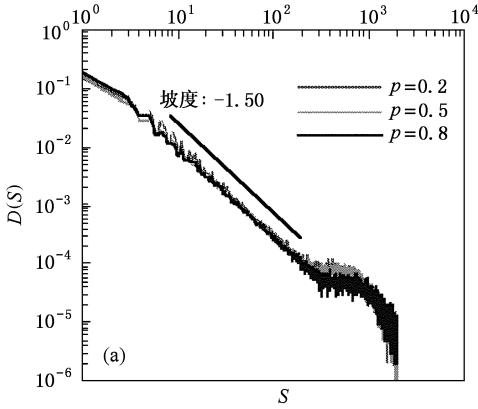


图 3 (a)崩塌概率不同时雪崩大小的分布情况, $L = 60$ (b)崩塌概率不同时弛豫时间的分布情况, $L = 60$

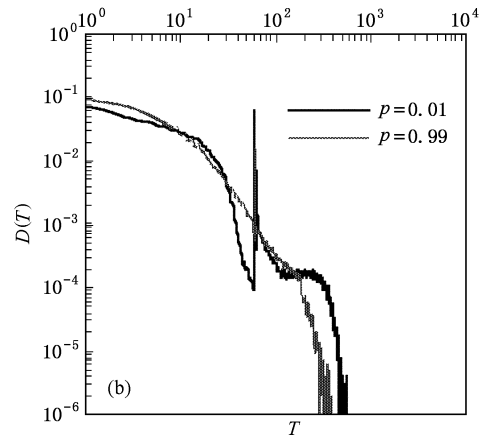
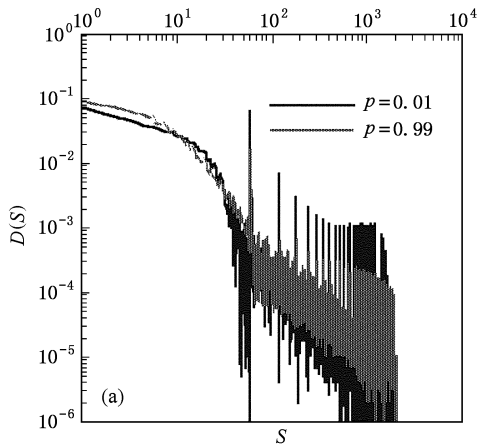


图 4 (a)崩塌概率取临界值时雪崩大小的分布情况, $L = 60$ (b)崩塌概率取临界值时弛豫时间的分布情况, $L = 60$

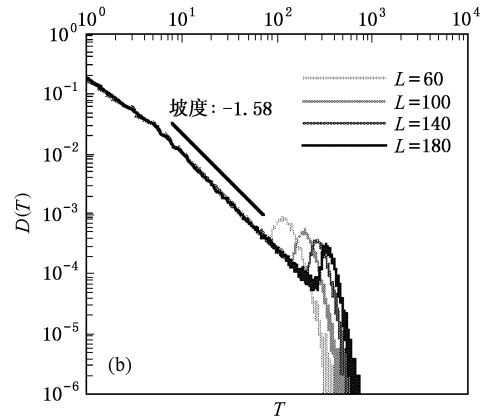
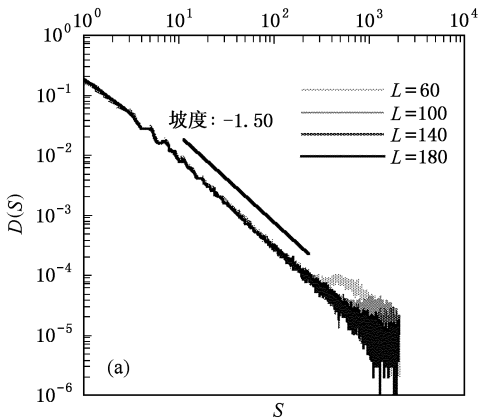


图 5 (a)系统大小不同时雪崩大小的分布情况 $p = 0.5$ (b)系统大小不同时弛豫时间的分布情况 $p = 0.5$

3.3. 系统大小不同时雪崩大小和弛豫时间的分布情况

图 5 主要考察系统大小对以上两种分布关系的

影响 (a)为系统大小不同时雪崩大小分布的情况, (b)为系统大小不同时弛豫时间的分布情况. 从图中可以看出雪崩大小和弛豫时间的分布都服从幂律

标度关系,并且这种标度关系不随系统大小的变化而改变.

3.4. 讨 论

在真实的米粒实验中^[15],长米有自组织临界性,而圆米则没有,合理的解释是米粒实验中,圆米只有一种构型,并且在 $z = z_c$ 时崩塌概率为1,这正好与一维 BTW 模型一致,所以不会出现自组织临界现象,而长米则不同,它具有两种构型,分别是竖直构型和水平构型,当米粒处于竖直构型时,局域倾角达到 2 便立即崩塌,而米粒处于水平构型时,只有当局域倾角大于 2 时才崩塌,因为米粒的两种构型各占有一定的比例,若米粒的竖直构型以概率 P 出现,那么当米堆某位置的局域倾角达到 2 时会以概率 P 发生崩塌,这正好与我们的模型一致,所以长米粒堆具有自组织临界性.

4. 结 论

在本文的沙堆模型中,当 p 取0或1时,又转化成了一维 BTW 沙堆模型,此时沙堆不具有自组织临界性,而当 $p_1 < p < p_2$ 时,沙堆具有自组织临界性,而且此时这种性质不会随 p 与 L 的变化而改变,这体现了一定的普适性.在 $0 < p < p_1$ 与 $p_2 < p < 1$ 时,沙堆处于一种过渡阶段,此时也不会出现自组织临界现象,通过这个阶段沙堆实现了从无自组织临界性到有自组织临界性的转变,且这种转变的速度非常快.自组织临界性的概念提出以后,人们对这种现象给予了极为高度的关注,并且已经在各个不同的领域对其进行了研究^[16-18],本文的结论揭示了一条新的通往自组织临界性的途径,这为人们进一步研究自组织临界现象提供了新的视角.

- [1] Bak P 1996 *How Nature Works* (New York :Copernicus)
 [2] Bak P , Tang C , Weisenfeld K 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 381
 [3] Kadanoff L , Nagel S R , Wu L , Zhou S M 1989 *Phys. Rev. A* **39** 6524
 [4] Dhar D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1613
 [5] Manna S S 1991 *Physica D* **179** 249
 [6] Chau H F 1994 *Physica D* **205** 292
 [7] Priezzhev V B 1993 *Physica. Scripta.* **49** 663
 [8] Priezzhev V B , Stat J 1994 *Phys.* **74** 955
 [9] Bhowal A 1998 *Physica A* **253** 301
 [10] Bengrine M , Benyoussef A , Mhirech F , Zhang S D 1999 *Physica A* **272** 1

- [11] Hu C K , Ivashkevich E V , Lin C Y , Priezzhev V B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4048
 [12] Hu C K , Lin C Y 2003 *Physica A* **318** 92
 [13] Gong L Y , Tong P Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2757 (in Chinese)
 [巩龙 、童培庆 2003 物理学报 **52** 2757]
 [14] Jaeger H M , Liu C H , Nagel S R 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 40
 [15] Frette V , Christensen K , Malthé-Sorensen A , Feder J , Jossang T , Meakin P 1996 *Nature (London)* **379** 49
 [16] Wu Z L 2001 *Chin. Phys.* **10** 395
 [17] Wu Z L 2001 *Chin. Phys.* **10** 914
 [18] Xu G S , Wan B N , Song M 2003 *Chin. Phys.* **12** 189

Self-organized criticality in one-dimensional sandpile model with avalanche probability included *

Zhou Hai-Ping¹ [✉]† Cai Shao-Hong² [✉] Wang Chun-Xiang¹ [✉]

1 [✉] Department of Physics ,Guizhou University ,Guiyang 550025 ,China)

2 [✉] Guizhou College of Finance and Economics ,Guiyang 550004 ,China)

3 [✉] Key Laboratory for Photoelectric Technology and Application , Guiyang 550025 , China)

(Received 7 September 2005 ; revised manuscript received 19 September 2005)

Abstract

Proposed an one-dimensional sandpile model which include avalanche probability , and performed computer simulation by cellular automata method. The results show that there are two critical points p_1 and p_2 when avalanche probability p transits from 0 to 1. The self-organized criticality(SOC) behavior can be found in the model when $p_1 < p < p_2$. There is a sharp transition between the trivial behaviour and the SOC behaviour in the model. When there is SOC , the SOC behaviour is universal , the two critical exponents are 1.50 ± 0.02 and 1.58 ± 0.15 . With the model , the SOC phenomenon appearing in the experiment of one-dimensional rice-pile is well explained.

Keywords : SOC , BTW model , avalanche probability

PACC : 0565

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347003) and Science and Technology Foundation of Guizhou Province , China (Grant No. 20043017) and Especial Imburse Foundation of Provincial Party Committee Organization Department , Guizhou , China.

† E-mail : hpzhou2885@sina.com