第 55 卷 第 7 期 2006 年 7 月
1000-3290/2006/55(07)/3438-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.7, July, 2006
©2006 Chin. Phys. Soc.

囚禁离子的非线性 Jaynes-Cummings 模型及其布居数反转演化*

汪仲清 段昌奎 安广雷

(重庆邮电大学光电工程学院,重庆 400065)

(2005 年 8 月 18 日收到;2005 年 9 月 18 日收到修改稿)

从描述囚禁离子与驻波激光场相互作用的 Jaynes-Cummings(J-C)模型出发,导出了囚禁离子谐振动单量子共振激发相互作用的非线性 J-C 模型. 通过求解这一模型的系统状态随时间变化,数值研究了离子布居数反转的演化规律. 结果表明,离子布居数反转演化的崩塌-复原周期与 Lamb-Dick 参数 η 和离子在驻波激光场中的位置有关,随着 η 参数的增大,离子布居数反转的崩塌-复原周期变短,当离子质心的位置从驻波激光场的波节移向波腹时,离子布居数崩塌-复原的周期变长.

关键词:驻波激光场, 囚禁离子, 非线性 J-C 模型, Lamb-Dick 参数

PACC:4250, 0365

1. 引 言

Jaynes-Cummings(J-C)模型描述了二能级原子与单模电磁场的相互作用[1]. 在理论上,可以对 J-C 模型严格求解,这对讨论场的统计性质方面具有可靠性[2]. 在实验方面,人们可以利用高 Q 因子腔体和 Rydberg 原子实现这一理想模型[3—5],进而可以对相关理论结果进行验证. 因此,在探讨光与物质相互作用等问题中,J-C 模型受到了广泛关注[6—10],并揭示了许多量子现象,如拉比振荡[6]、原子布居数反转的崩塌和复原[4]、光子的反聚束效应[7,8]、腔体中场的压缩效应[9]等. 随着研究的发展,J-C 模型不断地被推广到光与物质相互作用的各种过程,如光子腔中的 J-C 模型[10]、Kerr 介质中的 J-C 模型[11,12]、外加驱动场控制下的 J-C 模型[13]、场频随时间变化的 J-C 模型[14,15]、强度耦合的 J-C 模型[16]等. 近年来,人们对原子或离子处在囚禁势场中的 J-C 模型及其特性产生了浓厚的兴趣[17—20],Vogel 和 de Matos Filho 发现当囚禁离子的振动范围远小于 Lamb-Dick 区域时,可以由非线性 J-C 模型来描述[17]. 在此基础上,本文研究在谐振子单量子共振激发的情况下,囚禁在谐振势中的原子或离子与驻波激光场相互作用时系统状态的演化情况,并数值研究这一系统原子布居数反转与 Lamb-Dick 参数以及原子在驻波激光场中的位置之间的关系.

2. 非线性 J-C 模型

考虑一个双能级离子囚禁在一个频率为 ν 的谐振势中(其质心运动可视为谐振子),并与一个驻波激光场相互作用,忽略原子的衰变效应,采用 $\hbar = 1$ 的自然单位,该系统的哈密顿量可写为[17]

$$H = H_0 + H_{\text{int}}(t), \tag{1}$$

其中 H_0 是描述离子质心振动的自由哈密顿

$$H_0 = \nu a^+ a + \frac{1}{2}\omega\sigma_z, \tag{2}$$

ν 是谐振子的频率,ω 是二能级离子的跃迁频率,σ_z 是表示原子赝自旋算符的泡利矩阵. 在旋波近似下,离子与驻波激光场相互作用的哈密顿为

$$H_{\text{int}} = \lambda\cos[\omega_l x/c + \phi](E_0 e^{i\omega_l t}\sigma^- + E_0 e^{-i\omega_l t}\sigma^+), \tag{3}$$

其中 λ 是耦合常数,ϕ 表示离子质心相对驻波位置的初相位,特别当 $\phi = \pi/2$ 时相应于离子处在驻波激光的波节处. E_0 和 ω_l 分别是经典驻波激光场的振幅和频率,σ^+ 和 σ^- 是原子赝自旋升降算符. x 是

* 国家自然科学基金(批准号:10474092)资助的课题.

离子质心坐标,可以表示为

$$x = \frac{\eta c}{\omega_l}(a + a^+), \tag{4}$$

η 是 Lamb-Dick 参数. 在 Lamb-Dick 区域,将驻波激光场的频率调整使系统的谐振子呈单量子共振($\omega_l = \omega - \nu$)激发,囚禁离子的振动能被吸收而通过自发辐射消耗,这样囚禁离子可进入非常低的振动态从而获得很低的温度[20],则在相互作用绘景中系统的哈密顿量可表示为

$$H_{\mathrm{int}} = g[a^+ f(a^+ a)\sigma^- + \sigma^+ f(a^+ a)a], \tag{5}$$

$g = \lambda E_0$ 为正比于离子和辐射场相互作用强度的耦合常数. 非线性耦合算符函数由(4)式代入(3)式展开后得到,其正规积形式为

$$\begin{aligned} f(a^+ a) &= f^{(n)}(a^+ a) \\ &= \frac{1}{2}\exp\left(\mathrm{i}\phi - \frac{\eta^2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\eta)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \\ &\quad \times (a^+)^k a^k + \mathrm{H.C.} \\ &= -\eta\sin\phi\, \mathrm{e}^{-\eta^2/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\eta^{2k}}{k!(k+1)!}(a^+)^k a^k, \end{aligned} \tag{6}$$

在粒子数表象中的非线性函数为

$$\begin{aligned} f(n) &= -\eta\sin\phi\,\mathrm{e}^{-\eta^2/2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\eta^{2k}}{k!(k+1)!}\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= -\eta\sin\phi\,\mathrm{e}^{-\eta^2/2}L_n^1(\eta^2)/(n+1), \end{aligned} \tag{7}$$

$L_n^1(\eta^2)$ 为缔合 Laguerre 多项式.

3. 系统演化与原子布居数反转

由非线性耦合的相互作用哈密顿量(5)式,可以引入谐振子的非线性湮没算符和产生算符

$$A = f(N)a, \quad A^+ = a^+ f(N), \tag{8}$$

$N = a^+ a$ 为粒子数算符,则有

$$[N, A] = -A, \ [N, A^+] = A^+, \tag{9}$$

$$[A, A^+] = (N+1)f^2(N) - Nf^2(N-1), \tag{10}$$

所以非线性耦合哈密顿(5)式为

$$H_{\mathrm{int}} = g(A^+\sigma^- + \sigma^+ A), \tag{11}$$

在相互作用表象中,系统的时间演化算符

$$U(t) = \exp(-\mathrm{i}H_{\mathrm{int}}t) = \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{AA^+}) & -\mathrm{i}\frac{\sin(gt\sqrt{AA^+})}{\sqrt{AA^+}}A \\ -\mathrm{i}A^+\frac{\sin(gt\sqrt{AA^+})}{\sqrt{AA^+}} & \cos(gt\sqrt{AA^+}) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $AA^+ = (N+1)f^2(N)$, $A^+ A = Nf^2(N-1)$.

我们用$|g\rangle$和$|e\rangle$分别表示二能级原子的基态和激发态,如果系统的初态为 $\psi(0) = |e\rangle|\psi\rangle$, $|\psi\rangle$为谐振子的初态. 在粒子数表象中, $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}c_n|n\rangle$, $c_n = \langle n|\psi\rangle$,则 t 时刻系统演化成为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t)|\psi(0)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n\Big\{\cos[gtf(n)\sqrt{n+1}]|e\rangle|n\rangle \\ &\quad - \mathrm{i}\sin[gtf(n)\sqrt{n+1}]|g\rangle|n+1\rangle\Big\}, \end{aligned} \tag{13}$$

原子布居数反转的期待值

$$\begin{aligned} \langle\sigma_z(t)\rangle &= \langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\cos[2gtf(n)\sqrt{n+1}]. \end{aligned} \tag{14}$$

如果谐振子初态为粒子数态$|\psi\rangle = |n\rangle$,则

$$\langle\sigma_z(t)\rangle = \cos[2gtf(n)\sqrt{n+1}], \tag{15}$$

这时原子布居数反转呈现以频率为 $2gf(n)\sqrt{n+1}$ 的拉比振荡. 如果谐振子初态为相干态

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{16}$$

则$|c_n|^2 = \bar{n}^n\mathrm{e}^{-\bar{n}}/n!$, $\bar{n} = |\alpha|^2$ 表示平均粒子数,原子布居数反转分布为

$$\langle\sigma_z(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{n}^n}{n!}\mathrm{e}^{-\bar{n}}\cos[2gtf(n)\sqrt{n+1}]. \tag{17}$$

这表明原子布居数反转的期望值是无限多个频率为 $2gf(n)\sqrt{n+1}$的余弦振荡的带权重 $\exp(-\bar{n})\bar{n}^n/n!$ 叠加,这种叠加使得$\langle\sigma_z(t)\rangle$随时间的变化不再是余弦振荡,我们将通过数值计算来研究其变化规律.

3.1. Lamb-Dick 参数对原子布居数反转的影响

如果将(3)式与(4)式比较可以看出,Lamb-Dick 参数 η 表征了离子在基态振动时的空间扩展与驻波激光波长的比值. 根据(7)式,当参数 $\eta = 0$,非线性函数 $f(n) = 0$,则(17)式表示的原子布居数反转分布$\langle\sigma_z(t)\rangle = 1$,这时原子布居数反转分布没有振荡和崩塌-复原现象. 应用(7)式,取 $\phi = \pi/2$, $\bar{n} = 10$, $\eta = 0.05, 0.1, 0.4$ 和 0.8,对(17)式作数值计算,可以得到原子布居数反转分布随时间的演化关系如图 1(a)—(d) 所示.

由图 1(a)—(d) 可以看出,谐振子初态为相干

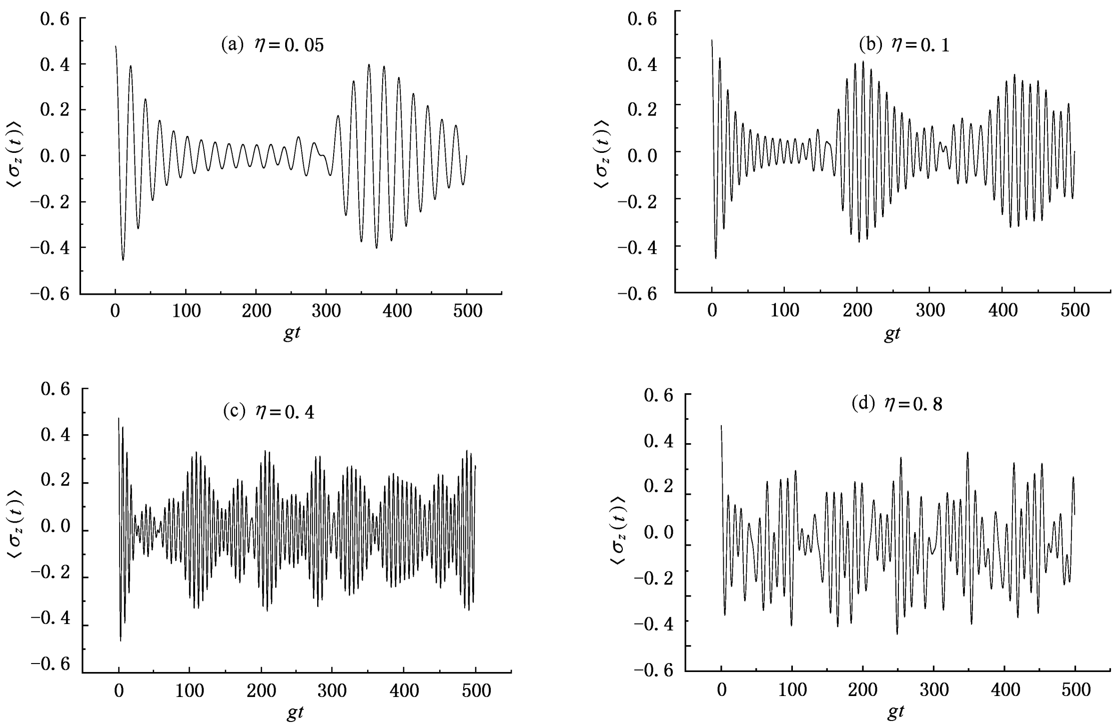

图 1 非线性 J-C 模型原子布居数反转演化与 Lamb-Dick 参数的关系($\phi=\pi/2$,$\bar{n}=10$)

态时,在非线性耦合的 J-C 模型系统中原子布居数反转振荡现象的崩塌-复原演化规律受 Lamb-Dick 参数 η 的影响. 当 η 取较小值($\eta=0.05$)时,即原子基态振动的空间扩展较小,原子布居数反转振荡的频率较小,而崩塌-复原的周期较长;随着 η 值的增大($\eta=0.1$,0.4,即原子基态振动的空间扩展变大),原子布居数振荡的频率变大,崩塌-复原的周期变短. 当 η 大到一定值时,例如 $\eta=0.8$,原子布居数崩塌-复原似乎呈现周期性,但轮廓变得不明显,而原子布居数反转振荡现象的频率反而变小. 在实际的计算中,我们发现当 η 在 0.4—0.5 之间取值时,原子布居数反转振荡的频率开始变小,崩塌-复原的周期轮廓开始不明显.

3.2. 原子在驻波场中的位置对其布居数反转的影响

由(3)式可知,离子质心在驻波激光场中的位置由初相位 ϕ 确定. 取 $\bar{n}=10$,$\eta=0.4$,$\phi=\pi/3$ 和 $\pi/6$ 对(17)式进行数值计算,原子布居数反转分布随时间的演化关系如图 2(a)—(b)所示. 可以看出,随着原子的质心从驻波激光场的波节向波腹($\phi=\pi/2\to 0$)移动,原子布居数振荡的频率逐渐变小,崩塌-复原的周期变长. 由(7)式还可以看出,当囚禁离子处于驻波激光的波腹处,即 $\phi=0$ 或 π,非线性函数 $f(n)=0$,则(17)式表示的原子布居数反转分布

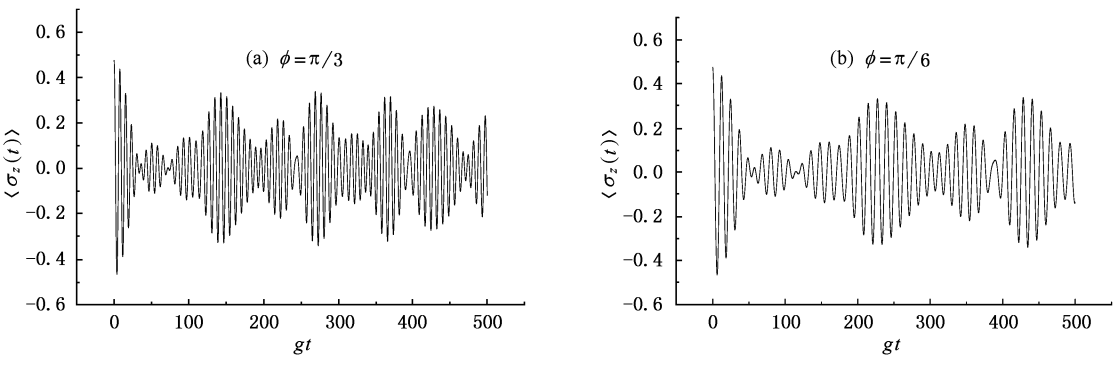

图 2 非线性 J-C 模型原子布居数反转演化与初相位 ϕ 的关系($\eta=0.4$,$\bar{n}=10$)

$\langle\sigma_z(t)\rangle = 1$，这时原子布居数反转的振荡及其崩塌-复原现象消失.

通过上述讨论我们可以得知，非线性 J-C 模型可以通过调节 Lamb-Dick 参数和离子在驻波激光场中的位置来调节原子布居数反转的振荡频率与崩塌-复原周期. 为了便于比较，图 3 给出了标准 J-C 模型下原子布居数反转随时间演化的结果. 可以看出，非线性 J-C 模型原子布居数反转的崩塌-复原周期通常比标准 J-C 模型的周期长很多.

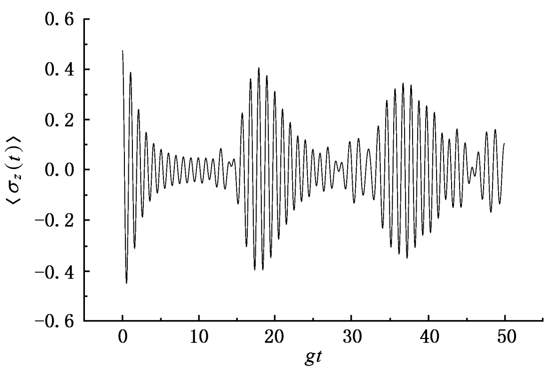

图 3 标准 J-C 模型原子布居数反转随时间的演化（$\bar{n} = 10$）

4. 结 论

在本文中，从描述囚禁原子或离子与驻波激光场相互作用的 J-C 模型出发，得到了谐振子单量子共振激发相互作用的非线性 J-C 模型. 通过求解这一模型下系统态和原子布居数反转的演化规律，数值研究了囚禁离子布居数反转与 Lamb-Dick 参数 η 以及离子在驻波激光场中位置之间的关系. 结果表明，随着参数 η 的增大，非线性 J-C 模型中原子布居数反转振荡频率变大，崩塌-复原的周期变短. 当离子质心的位置从驻波激光场的波节移向波腹，原子布居数振荡的频率变小，崩塌-复原的周期变长. 与标准 J-C 模型相比，非线性 J-C 模型原子布居数反转崩塌-复原一般具有较长的周期.

[1] Jaynes E T，Cummings F W 1963 *Proc*. *IEEE* **51** 89

[2] Joshi A，Puri R R 1987 *J*. *Mod*. *Opt*. **34** 1421

[3] Meschede D，Walther H 1985 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **54** 551

[4] Rempe G，Walther H，Klein N 1987 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **58** 353

[5] Brue M，Schmidt-Kaler F，Maali A *et al* 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **76** 1800

[6] Eberly J H，Narozhny N B，Sanchez-Mondragon J J 1980 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **44** 1323

[7] Short R，Mandel L 1983 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **51** 384

[8] Tian Y H，Peng J S，Xu D H *et al* 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1439 (in Chinese) [田永红、彭金生、徐大海等 1999 物理学报 **48** 1439]

[9] Arvinda P K，Guanhui H 1988 *Physica* C **150** 427

[10] Quang T，Knight P L，Buzek V 1991 *Phys*. *Rev*. A **44** 6092

[11] Joshi A，Puri R R 1992 *Phys*. *Rev*. A **45** 5056

[12] Huang C J，Wen L 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1978 (in Chinese) [黄春佳、文 立 2002 物理学报 **51** 1978]

[13] Alsing P，Gao D S，Carmichael H J 1992 *Phys*. *Rev*. A **45** 5135

[14] Law C K，Zhu S Y，Zhu S Y，Zubairy M S 1995 *Phys*. *Rev*. A **52** 4095

[15] Xu J P，Yang Y P 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2139 (in Chinese) [许静平、羊亚平 2004 物理学报 **53** 2139]

[16] Bužek V 1989 *Phys*. *Rev*. A **39** 3196

[17] Vogel W，de Matos Filho R L 1995 *Phys*. *Rev*. A **52** 4214

[18] Fang M F，Liu X 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2363 (in Chinese) [方卯发、刘 翔 2001 物理学报 **50** 2363]

[19] Qu Z J，Liu S D Yang C L 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1156 (in Chinese) [曲照军、柳盛典、杨传路 2005 物理学报 **54** 1156]

[20] Blockley C A，Walls D F 1993 *Phys*. *Rev*. A **47** 2115

Nonlinear jaynes-cummings model of a trapped ion and the evolution of the ion population inversion*

Wang Zhong-Qing Duan Chang-Kui An Guang-Lei

(*College of Optical and Electronic Engineering*, *Chongqing University of Post and Telecommunications*, *Chongqing* 400065, *China*)

(Received 18 August 2005; revised manuscript received 18 September 2005)

Abstract

Starting from the Jaynes-Cummings (J-C) model describing the interaction of a trapped ion with a standing-wave laser field, we derive the interaction Hamiltonian on the nonlinear J-C model of the trapped ion excitated resonantly with 1-quantum vibrational mode. After solving the time-dependent states of this model, we study the evolution of population inversion for the ion numerically. It is shown that the period of the quantum collapse and revival of the population inversionis related with the Lamb-Dick parameter and the position of the ion in the standing-wave laser field. With the increasing of the parameter, it will decrease the period of the collapse and revival. When moving the ion from the node of the standing-wave laser to the antinode, the period of the collapse and revival becomes longer.

Keywords: standing-wave laser field, trapped ion, nonlinear J-C model, Lamb-Dick parameter

PACC: 4250, 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10474092).