

等离子体的 SO-FDTD 算法和对电磁波反射系数的 计算分析*

杨宏伟^{1)†} 陈如山¹⁾ 张 云²⁾

1) 南京理工大学通信工程系, 南京 200094)

2) 南京农业大学物理系, 南京 200095)

(2005 年 10 月 28 日收到, 2005 年 12 月 12 日收到修改稿)

将一类色散介质的介电常数写成有理分式函数形式, 进而导出 FDTD 中电位移矢量 D 和电场强度 E 之间的关系, 形成 SO-FDTD 方法. 应用该方法计算了冷等离子体平板对电磁波的反射系数, 通过与解析结果的比较, 验证了该算法的高效性和高精度. 同时, 应用 SO-FDTD 方法, 计算了等离子体层对垂直入射电磁波的反射系数, 结果表明: 等离子体厚度、电子密度、电子密度的分布形式和入射波频率是影响反射系数的重要因素.

关键词: 等离子体, 电磁波, FDTD 方法

PACC: 5225, 5240, 5265, 4270

1. 引 言

计算色散介质中电磁波传播和散射问题的时域方法已得到了很大发展, 其中时域有限差分(FDTD)法^[1]是一种简单而有效的时域方法. 近年来, 又出现了大量处理色散介质电磁仿真的 FDTD 算法文献, 包括递推卷积(RC)法^[2]、辅助方程(ADE)法^[3,4]、 Z 变换法^[5]、分段线性递推卷积(PLRC)法^[6]、电流密度卷积(JEC)法^[7]、分段线性电流密度卷积(PLJERC)算法^[8]等. 在计算过程中, 由于色散介质的介电常数是频率的函数, 即色散介质的本构关系常是频域关系, 在时域成为卷积关系, 这就为直接应用 FDTD 方法计算带来困难. 处理色散介质的本构关系有时域卷积法等, 文献[9]从 Z 变换定义出发讨论了时域、频域及离散时域之间的转换关系以及卷积定理, 给出了色散介质的 D 与 E 的递推关系, 本文通过差分近似引入离散时域移位算子(SO)直接得到时域和离散时域之间的算子过度关系, 其概念简明扼要, 无需应用 Z 变换可得到与解析解近似的结果. 当频域本构关系可以表示为有理分式函数

时, 首先将其过渡到时域, 再转换到离散时域, 进而导出从 D 到 E 的递推计算公式. 该式适合于常用的一类色散介质的 FDTD 计算.

本文将移位算子方法应用于计算等离子体反射系数, 与解析解进行比较之后, 计算了等离子体平板对电磁波的反射系数与等离子体中电子密度、电子密度分布形式、等离子体厚度和入射频率之间的关系, 并分析了这些关系的变化规律和形成这些规律的原因.

2. SO-FDTD 算法

在碰撞冷等离子体色散介质中, Maxwell 方程组和相关的方程为

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (3)$$

对一维情况, 应用 FDTD 方法, 可以得到从 E 分量计算 H 分量, 再计算 D 的公式:

* 国家自然科学基金(批准号: 60431010)、国家杰出青年科学基金(批准号: 60325103)资助的课题.

† E-mail: phd_hwyang@yahoo.com.cn

$$\mathbf{D}_x^{n+1}(k) = \mathbf{D}_x^k(k) - \frac{\Delta t}{\Delta Z} \left[\mathbf{H}_y^{n+1/2} \left(k + \frac{1}{2} \right) - \mathbf{H}_y^{n+1/2} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_y^{n+1/2} \left(k + \frac{1}{2} \right) = \mathbf{H}_y^{n-1/2} \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta Z} \times [\mathbf{E}_x^n(k+1) - \mathbf{E}_x^n(k)]. \quad (5)$$

对频域中介质的本构关系式(3),若介电系数 $\epsilon_r(\omega)$ 可以写成有理分式函数形式

$$\epsilon_r(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^N p_n(j\omega)^n}{\sum_{n=0}^N q_n(j\omega)^n}. \quad (6)$$

利用频域到时域的转变关系 $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$, 将(6)式代入(3)式得

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}(t). \quad (7)$$

设函数 $y(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$, 则该函数在 $(n+0.5)\Delta t$ 的中心差分近似为

$$\frac{y^{n+1} + y^n}{2} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}. \quad (8)$$

今定义

$$z_t f^n = f^{n+1}, \quad (9)$$

其中 z_t 叫移位算子, 合并(8)(9)式可得

$$y^n = \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right) f^n, \quad (10)$$

比较得

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right). \quad (11)$$

由此可得离散时域本构关系

$$\left[\sum_{n=0}^N q_n \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right)^n \right] \mathbf{D}^n = \epsilon_0 \left[\sum_{n=0}^N p_n \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right)^n \right] \mathbf{E}^n. \quad (12)$$

今令 $N=2$ 并代入上式, 整理后得

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[q_0 + q_1 \frac{2}{\Delta t} + q_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 \right] z_t^2 + \left[2q_0 - 2q_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 \right] z_t \right. \\ & \left. + \left[q_0 - q_1 \frac{2}{\Delta t} + q_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 \right] \right\} \mathbf{D}^n \\ = & \left\{ \left[p_0 + p_1 \frac{2}{\Delta t} + p_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 \right] z_t^2 + \left[2p_0 - 2p_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 \right] z_t \right. \\ & \left. + \left[p_0 - p_1 \frac{2}{\Delta t} + p_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 \right] \right\} \epsilon_0 \mathbf{E}^n. \quad (13) \end{aligned}$$

根据(9)式, 上式又可写为

$$\mathbf{E}^{n+1} = \frac{1}{b_0} \left[a_0 \left(\frac{\mathbf{D}^{n+1}}{\epsilon_0} \right) + a_1 \left(\frac{\mathbf{D}^n}{\epsilon_0} \right) + a_2 \left(\frac{\mathbf{D}^{n-1}}{\epsilon_0} \right) - b_1 \mathbf{E}^n - b_2 \mathbf{E}^{n-1} \right], \quad (14)$$

其中

$$a_0 = q_0 + q_1 \frac{2}{\Delta t} + q_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2,$$

$$a_1 = 2q_0 - 2q_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2,$$

$$a_2 = q_0 - q_1 \frac{2}{\Delta t} + q_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2,$$

$$b_0 = p_0 + p_1 \frac{2}{\Delta t} + p_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2,$$

$$b_1 = 2p_0 - 2p_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2,$$

$$b_2 = p_0 - p_1 \frac{2}{\Delta t} + p_2 \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2.$$

对于非磁化冷等离子体, 其复相对介电系数^[9]为

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega(j\nu_c - \omega)}, \quad (15)$$

对于磁化冷等离子体, 其复相对介电系数^[10]为

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{\left[1 - j \frac{\nu_c}{\omega} - \frac{\omega_{ce}^2/\omega}{1 - \omega_p^2/\omega^2 - j\nu_c/\omega} \right]}, \quad (16)$$

其中 ω_p 为等离子体频率, ν_c 为电子平均碰撞频率, ω_{ce} 为电子回旋频率. 比较可得, $N=2$, 且 p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 和 q_2 可求, 且有 $p_0 = \omega_p^2, p_1 = \nu_c, p_2 = 1, q_0 = 0, q_1 = \nu_c, q_2 = 1$. 从而根据(14)式, 可求出 \mathbf{E} . 结合(4)(5)式, 完成叠代过程.

3. SO-FDTD 算法的有效性 with 精度

为了检验上述算法的正确性, 本文计算了等离

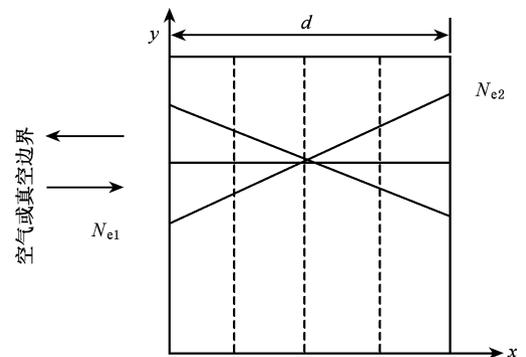


图1 等离子体平板模型

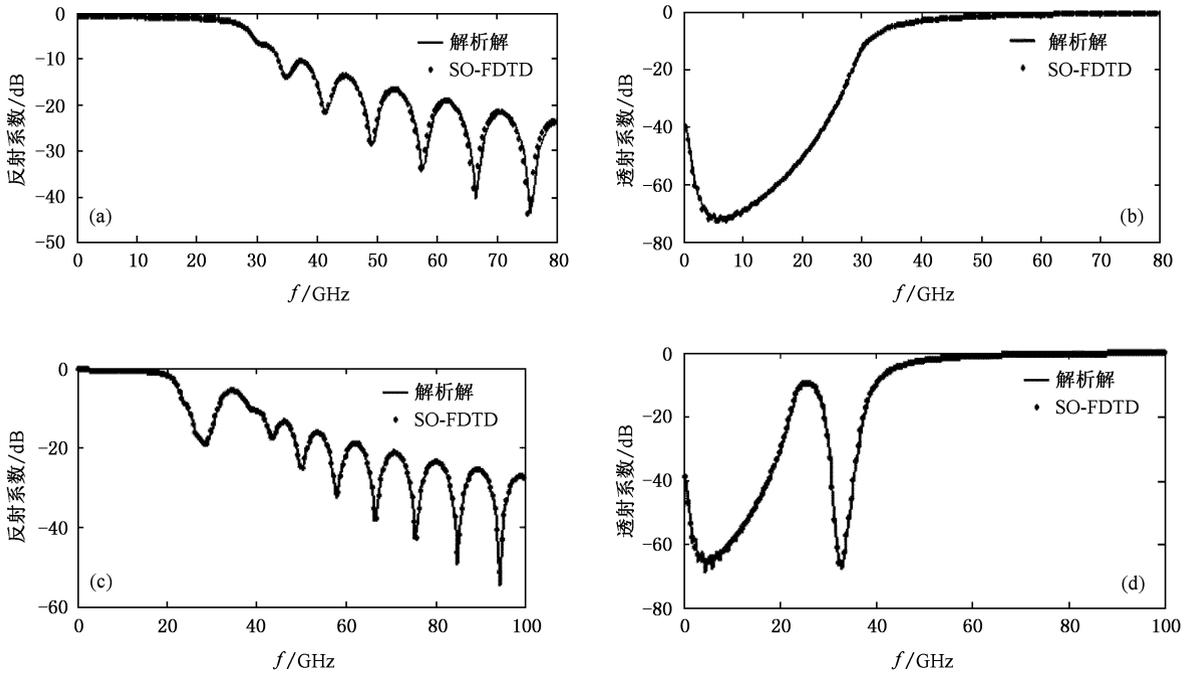


图2 反射系数和透射系数的解析解和 SO-FDTD 解的比较 (a)反射系数(非磁化等离子体)(b)透射系数(非磁化等离子体)(c)反射系数(磁化等离子体):(d)透射系数(磁化等离子体)

子体厚度 $d = 1.5\text{cm}$ 时,电磁波垂直入射到等离子体表面时的反射系数,计算模型如图 1 所示,入射电磁波为高斯脉冲的导数, $\omega_p = 2\pi \times 28.7 \times 10^9 \text{ rad/s}$, $\nu_c = 20 \times 10^9 \text{ rad/s}$,对磁化等离子体, $\omega_{ce} = 8.8 \times 10^{10} \text{ rad/s}$,计算空间分为 800 个网格,等离子体占中间的 200 个网格.图 2 给出了该 SO-FDTD 方法计算的结果,并与解析解^[11]进行了比较,结果显示该算法正确,且有很高的计算精度.

4. 非磁化等离子体在平板中的分布对反射系数的影响

4.1. 均匀分布时,等离子体厚度对反射系数的影响

为了研究在等离子体厚度和等离子体中的电子密度变化情况下,频率对反射系数的影响,这里应用 SO-FDTD 算法,计算了当等离子体平板中电子密度均匀分布,且电子密度分别取 10^{15} , 10^{16} , 10^{17} , 10^{18} , $10^{19}/\text{m}^3$ 时,等离子体厚度分别为 1.5cm 和 4.5cm 时,反射系数随频率的变化情况,其结果见图 3 和图 4.

从图中可见,当等离子体的厚度一定时,随着电子密度的增加,在相同入射频率下,反射系数总趋势是增加的,当入射频率较低时,反射系数增加迅速,

当入射频率较高时,如果电子密度较小(例如如图 3,图 4 中的 $10^{15}/\text{m}^3$),随着入射频率的增大,反射系数近似线性增加,随着电子密度变大(例如如图 3,图 4 中的 $10^{16}/\text{m}^3$)反射系数先下降,然后再近似线性增加,当电子密度继续增加,在入射频率较低时,不论等离子体的厚度是 1.5cm 还是 4.5cm ,反射系数都平稳下降,随着入射频率的增加,反射系数振荡下降,但如果等离子体厚度较大(如图 4 厚度是 4.5cm)则反射系数振荡较剧烈.这是因为当一束电磁波入射到等离子体界面时,引起部分反射和部分透射,而一定厚度的等离子体,可以看作是有许多等厚度的等离子体层组成,这样透射波在下一个边界层上产生部分反射,此反射回到前一个界面时再产生部分反射和部分透射,这样在等离子体内就有一系列的内反射,等离子体界面上的反射总效果是第一个反射和一系列透射波的叠加.当等离子体厚度增加,其内部发生反射的机会就增加,而电子密度是等离子体的振荡频率的函数,随着电子密度的增大,振荡频率增加,电磁波与等离子体的作用情况也会有相应的变化,所以反射系数的振荡加剧.

4.2. 等离子体线性分布时,频率与反射系数的变化关系

在图 1 中,沿 y 方向等离子体均匀分布,沿 x

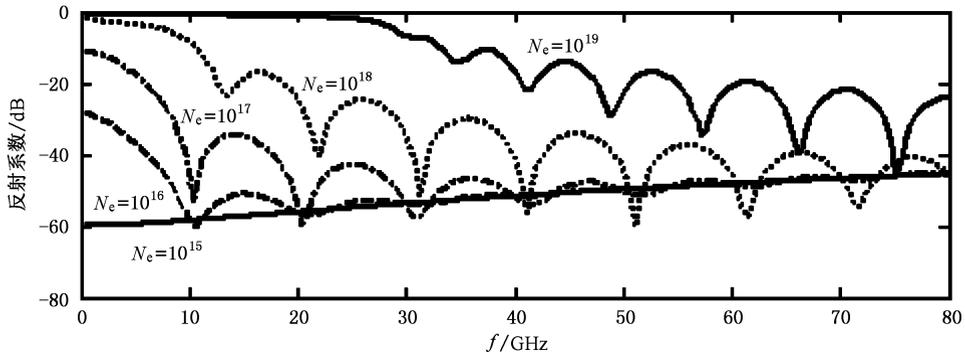


图3 等离子体均匀分布时,不同电子密度条件下,频率与反射系数的关系(等离子体厚度 $d = 1.5\text{cm}$)

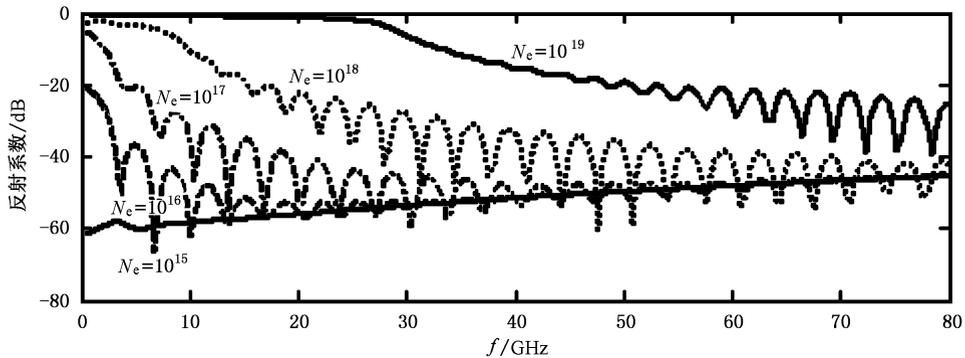


图4 等离子体均匀分布时,不同电子密度条件下,频率与反射系数的关系(等离子体厚度 $d = 4.5\text{cm}$)

方向,设电子数密度为线性分布,其中,图5计算的是沿 x 方向电子密度呈递增分布时的情况,图6计算的是沿 x 方向电子密度呈递减分布时的情况,为了便于分析比较,其总的平均电子密度是相等的。

从图5和图6可见,当等离子体中电子密度较小时($10^{15}/\text{m}^3$),等离子体线性分布的不同,几乎不影响反射系数与入射频率之间的关系曲线,随着等离子体中电子密度的增加,如果沿 x 方向的电子密度也是增加的(图5),则反射系数有一定振荡,之后趋于斜直线,且与电子密度对应处,在某个频率段反射系数下降明显,如图5中对应于 $10^{16}/\text{m}^3$ 的频率11GHz附近,对应于 $10^{17}/\text{m}^3$ 的频率32GHz附近等。当电子密度较大时(如图5、图6中的 $10^{19}/\text{m}^3$),反射系数又都变成随入射频率的增加,反射系数趋于分段线性下降的情况。而对应于图5中的 $10^{16}/\text{m}^3$, $10^{17}/\text{m}^3$ 和 $10^{18}/\text{m}^3$ 三条反射系数曲线,则都有反射系数最低的对应该频率点。这是由于电子密度是等离子体振荡频率的函数,随着电子密度的增大,振荡频率增加,在入射频率很小时,反射系数就与振荡频率关联较大,即取决于电子密度的分布情况,但是当入

射频率远大于振荡频率时(ω_p/ω)就很小,这时,反射系数就主要取决于入射频率了,即与电子密度的大小关联度很小,所以,在图3、图4、图5和图6中,就表现为随着入射频率的增加,其反射系数就趋于一致的结果。

从图6可见,虽然等离子体中总的等离子体数和平均电子密度与图5相同,但由于图6是沿 x 方向,电子密度递减分布(与图5相比,两端数值大小相反,中间值相等),所以,反射系数有明显不同之处。电子密度较小时($10^{15}/\text{m}^3$),反射系数与频率的关系曲线与等离子体的线性分布情况关系不大,随着等离子体中电子密度的增加,其变化不像图5出现剧烈振荡,而是变化比较平缓。这说明虽然都是线性分布,且厚度一致,电子总数一致,平均密度一致,但不同的线性分布方式,对反射系数影响较大。这是由于电子密度分布不同,电磁波进入等离子体发生反射和透射的先后情况就不同,导致整个反射情况都会有很大区别,由于后面的所有透射和之前的反射都是相关联的,即使整个区域的平均电子密度相同,反射系数都会有很大的区别。

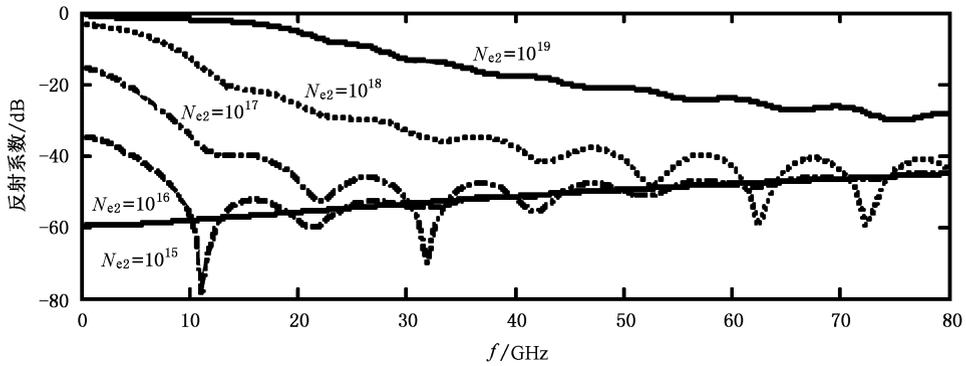


图 5 等离子体递增线性分布时,不同电子密度条件下,频率与反射系数的关系($N_{e1} = N_{e2}/1000$)

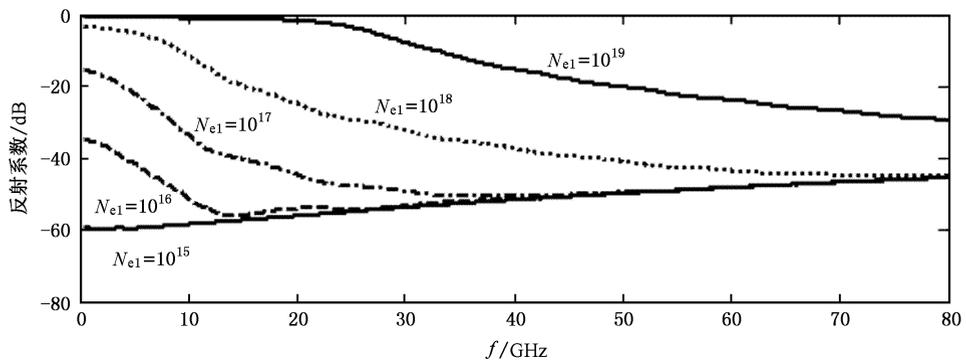


图 6 等离子体递减线性分布时,不同电子密度条件下,频率与反射系数的关系($N_{e2} = N_{e1}/1000$)

5. 结 论

1. 本文用移位算子及有理分式导出 FDTD 中 D 和 E 的时域关系,并验证了此方法的可行性.此后,应用此方法计算了等离子体平板中,电子密度均匀,反射系数与电子密度、等离子体厚度和入射频率之间的变化关系,计算了在平板中电子密度按不同的线性分布时,电子密度、入射频率和反射系数之间的关系.

2. 本文的计算分析表明,等离子体厚度、电子密度、电子密度分布形式和入射频率是影响反射系数的重要因素.当电子密度较小时,不论是在低频段还是在高频段,电子密度的分布对反射系数几乎没有影响,随着电子密度的增加,其对反射系数的影响与分布关系密切.

3. 入射频率较低时,反射系数的变化基本上取决于电子密度的变化,电子密度小,反射系数就小;

逐渐增大入射频率后,电子密度和入射频率对反射系数的关联度逐渐增大,表现为电子密度和入射频率的改变都对反射系数有较大影响;当入射频率大到一定程度时,电子密度的高低对反射系数的影响又变得很小.

4. 当电子平均密度较小时,电子密度的分布情况对反射系数的影响较小,具体表现为图 5 和图 6 中的 $N_e = 10^{15}/\text{m}^3$ 时,曲线分布情况几乎完全一样;随着电子平均密度的增大,影响增大,但入射频率达到一定程度时,对电子密度的分布情况影响较小.

5. 等离子体的电子密度、波的入射频率和等离子体的电子密度的分布曲线与反射系数之间存在一个最佳值,在一定条件下,反射系数最小.

6. 在低频段,反射系数随着等离子体中电子密度的增加而变大,与电子密度的分布形式无关,在高频段,反射系数振荡减小,但其振荡程度与电子密度的分布形式关系密切.

- [1] Yee K S 1966 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **14** 302
- [2] Lubbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **39** 29
- [3] Young J L 1995 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **43** 422
- [4] Nickisch L J, Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propagat. Mag.* **34** 33
- [5] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1223
- [6] Kelley D F, Lubbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 792
- [7] Chen Q, Katsurai M, Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **46** 1739
- [8] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 778 (in Chinese] 刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 778]
- [9] Sullivan D M 2000 *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method* (New York :IEEE Press)
- [10] Tang D L, Sun A P, Qiu X M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1724 (in Chinese] 唐德礼、孙爱萍、邱孝明 2002 物理学报 **51** 1724]
- [11] Ginzburg V L 1970 *The Propagation of Electromagnetic waves in Plasmas* (New York : Pergamon)
- [12] Yang J, Zhu L M, Su W Y, Mao G W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3236 (in Chinese] 杨涓、朱良明、苏维仪、毛根旺 2005 物理学报 **54** 3236]
- [13] Ge D B, Wu Y L, Zhu X Q 2003 *Chinese Journal of Radio Science* **18** 359 (in Chinese] 葛德彪、吴跃丽、朱湘琴 2003 电波科学学报 **18** 359]
- [14] Su W Y, Yang J, Wei K, Mao G W, He H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 3012 (in Chinese] 苏维仪、杨涓、魏 昆、毛根旺、何洪庆 2003 物理学报 **52** 3102]

SO-FDTD method and its application to the calculation of electromagnetic wave reflection coefficients of plasma *

Yang Hong-Wei^{1,2,†} Chen Ru-Shan¹⁾ Zhang Yun²⁾

1) Department of Communication Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

2) Department of Physics, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

(Received 28 October 2005 ; revised manuscript received 12 December 2005)

Abstract

The dielectric property of dispersive media is written as rational polynomial function, the relation between D and E is derived in time domain. It is named shift operator FDTD (SO-FDTD) method. The high accuracy and efficiency of this method is confirmed by computing the reflection coefficients of electromagnetic waves by a collisional plasma slab. The reflection coefficients between plasma and the atmosphere or vacuum can be calculated by using the SO-FDTD method. The result is that the reflection coefficients are affected by plasma thickness, electron numerical density, the distributing orderliness of electron density, and incidence wave frequency.

Keywords : plasma, electromagnetic wave, FDTD method

PACC : 5225, 5240, 5265, 4270

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60431010) and the National Science Found for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 60325103).

† E-mail : phd_hwyang@yahoo.com.cn