

等离子体填充带状螺旋线的色散方程*

谢鸿全¹⁾ 刘濮鲲²⁾

1) 西南科技大学理学院, 绵阳 621010)

2) 中国科学院电子学研究所, 北京 100080)

(2005 年 7 月 14 日收到, 2006 年 1 月 13 日收到修改稿)

利用线性场理论和螺旋线的导带模型, 对填充等离子体的带状螺旋线进行了严格的场分析. 在给出各区域电磁场分量表达式的基础上, 利用螺旋带的边界条件, 导出了等离子体填充带状螺旋线中电磁波传播的色散方程.

关键词: 等离子体, 带状螺旋线, 色散方程

PACC: 5275, 5240D

1. 引言

螺旋线是一种重要的慢波结构, 由于其结构简单, 易于制造, 良好的色散特性和较高的耦合阻抗, 因而广泛应用于行波管等多种微波器件中. 自上世纪 80 年代以来, 随着在微波器件中填充等离子体的研究热的兴起, 有关圆柱波导、波纹波导等慢波结构中填充等离子体的各种线性理论已迅速发展起来^[1-8]. 对于螺旋线中填充等离子体的研究, 相对要晚一些^[9-11]. 人们对螺旋线的研究通常采用两种模型, 即导电面模型和螺旋带模型, 其中螺旋带模型由于考虑了螺旋线的不均匀性和几何尺寸, 更接近于实际的螺旋线, 因而较之导电面模型更加精确. 在已有的文献中, 分析带状螺旋线的往往没有填充等离子体, 而对填充等离子体的螺旋线的研究又没有采用螺旋带模型^[9-13]. 本文将两者结合起来, 对在强引导磁场下, 等离子体填充的带状螺旋线进行了严格的场分析, 并利用各区域的边界条件, 导出了电磁波传播的色散方程, 为进一步利用数值计算开展小信号分析奠定了理论基础.

2. 物理模型

如图 1 所示, 螺旋线在轴上的周期为 L , 带宽为 δ , 忽略螺旋带的厚度, 认为螺旋带无限薄, 其半径为 r_h . 在螺旋线内均匀填充了密度为 n_p 的冷等离

子体. 螺旋线外有一个半径为 r_w 的金属圆筒, 在圆筒与螺旋线间充满了介质, 其介电常数 $\epsilon_d = \epsilon_0 \epsilon_r$, 导磁率为 μ_d . 整个系统置于强引导磁场中.

在无限大磁场下, 等离子体的介电张量可表示为

$$[\epsilon] = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中 $\epsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $\omega_p = (e^2 n_p / \epsilon_0 m)^{1/2}$ 为等离子体振荡频率, e 和 m 分别是电子的电量和质量.

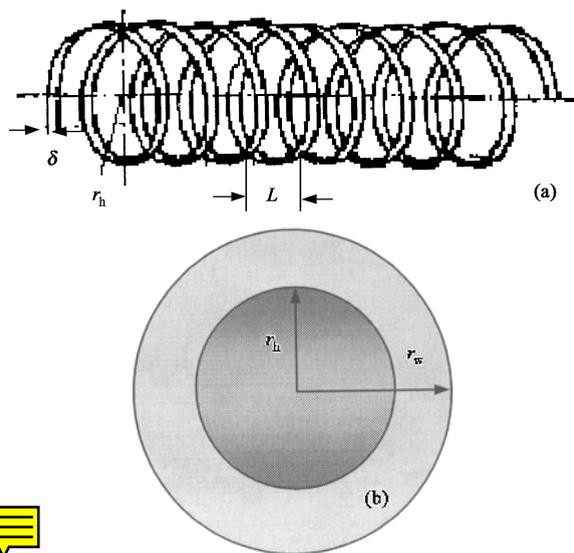


图 1 填充等离子体的带状螺旋线 (a) 螺旋带系统 (b) 系统内的径向结构

* 国家自然科学基金(批准号: 10347009)和四川省教育厅自然科学基金(批准号: 2003B019)资助的课题.

3. 色散方程

3.1. 各区域场分量表达式

在圆柱坐标系统中,螺旋线不仅在 z 方向具有周期性,在 φ 方向系统也是不均匀的,故场既要在 z 方向展开,也要在 φ 方向展开.由于系统具有螺旋

对称的特点,因此电磁场分量应具有如下形式:

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(r) e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)} \cdot e^{-j\beta_0 z}. \quad (2)$$

系统沿径向分为两个区域:Ⅰ区为等离子体区, $0 \leq r \leq r_h$; Ⅱ区为介质区, $r_h \leq r \leq r_w$. 利用场的横向分量与纵向分量之间的关系,并结合螺旋线场分布的特点,可得到各区域中场分量的表达式.

Ⅰ区:

$$\begin{aligned} E_{1z} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1n} I_n(T_{1n}r) e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ E_{1r} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{j\beta_n T_{1n}}{T_{2n}^2} A_{1n} I'_n(T_{1n}r) + \frac{j\omega\mu_0}{T_{2n}^2} \cdot \frac{1}{r} jn A_{2n} I_n(T_{2n}r) \right] e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ E_{1\varphi} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{j\beta_n}{T_{2n}^2} \cdot \frac{jn}{r} A_{1n} I_n(T_{1n}r) - \frac{j\omega\mu_0}{T_{2n}^2} A_{2n} I'_n(T_{2n}r) \right] e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ H_{1z} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n} I_n(T_{2n}r) e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ H_{1r} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{j\omega\epsilon_0}{T_{2n}^2} \cdot \frac{jn}{r} A_{1n} I_n(T_{1n}r) + \frac{j\beta_n}{T_{2n}^2} A_{2n} I'_n(T_{2n}r) \right] e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ H_{1\varphi} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{j\omega\epsilon_0 T_{1n}}{T_{2n}^2} A_{1n} I'_n(T_{1n}r) + \frac{j\beta_n}{T_{2n}^2} \cdot \frac{jn}{r} \cdot A_{2n} I_n(T_{2n}r) \right] e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$T_{1n}^2 = (\beta_n^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right], T_{2n}^2 = \beta_n^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0.$$

Ⅱ区:

$$\begin{aligned} E_{2z} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{3n} I_n(T_{3n}r) + A_{4n} K_n(T_{3n}r)] e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ E_{2r} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{j\beta_n}{T_{3n}^2} [A_{3n} I'_n(T_{3n}r) + A_{4n} K'_n(T_{3n}r)] + \frac{j\omega\mu_d}{T_{3n}^2} \cdot \frac{jn}{r} [A_{5n} I_n(T_{3n}r) + A_{6n} K_n(T_{3n}r)] \right\} e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ E_{2\varphi} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{j\beta_n}{T_{3n}^2} \cdot \frac{jn}{r} [A_{3n} I_n(T_{3n}r) + A_{4n} K_n(T_{3n}r)] - \frac{j\omega\mu_d}{T_{3n}^2} [A_{5n} I'_n(T_{3n}r) + A_{6n} K'_n(T_{3n}r)] \right\} e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ H_{2z} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{5n} I_n(T_{3n}r) + A_{6n} K_n(T_{3n}r)] e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ H_{2r} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{j\omega\epsilon_d}{T_{3n}^2} \cdot \frac{jn}{r} [A_{3n} I_n(T_{3n}r) + A_{4n} K_n(T_{3n}r)] + \frac{j\beta_n}{T_{3n}^2} [A_{5n} I'_n(T_{3n}r) + A_{6n} K'_n(T_{3n}r)] \right\} e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \\ H_{2\varphi} &= e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{j\omega\epsilon_d}{T_{3n}^2} [A_{3n} I'_n(T_{3n}r) + A_{4n} K'_n(T_{3n}r)] + \frac{j\beta_n}{T_{3n}^2} \cdot \frac{jn}{r} [A_{5n} I_n(T_{3n}r) + A_{6n} K_n(T_{3n}r)] \right\} e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)} \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $T_{3n}^2 = \beta_n^2 - \omega^2 \epsilon_d \mu_d$. 以上各表达式中的 $A_{1n} - A_{6n}$ 为第 n 次空间谐波的相应待定系数,它们由各区域及螺旋带的边条件所确定.

3.2. 边界条件

在螺旋带所在的 $r = r_h$ 的圆柱面上,电场的切

向量连续,即

$$E_{1z} = E_{2z}, \quad (5)$$

$$E_{1\varphi} = E_{2\varphi}. \quad (6)$$

假定在金属螺旋带内流动的有高频电流,其方向为螺旋方向.当 $\delta/L \ll 1$ 时,可认为电流的幅值在螺旋带上是不变的.那么,螺旋带上的电流可表示为^[14]

$$J_{\perp} = 0, \quad (7)$$

$$J_{\parallel} = J_{\parallel M} e^{-j\beta_0 z}. \quad (8)$$

在 $\frac{L\varphi}{2\pi} < z < \frac{L\varphi}{2\pi} + \delta$ 处, $J_{\parallel M} = J_0$, 而当 z 在一个周期的其余地方, $J_{\parallel M} = 0$. 在 $r = r_h$ 的面上,将电流展开,

$$J_{\parallel} = e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{\parallel n} e^{-jn(\frac{2\pi}{L}z - \varphi)}, \quad (9)$$

式中

$$J_{\parallel n} = \frac{\delta}{L} J_0 e^{\frac{2jn\delta}{L}} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi\delta}{L}}{\frac{n\pi\delta}{L}}. \quad (10)$$

将带上变化的电流看成是激励电磁场的源,在 $r = r_h$ 圆柱面的两边,有

$$H_{2\varphi} - H_{1\varphi} = J_{\parallel} \sin\psi, \quad (11)$$

$$H_{1z} - H_{2z} = J_{\parallel} \cos\psi, \quad (12)$$

式中 ψ 为螺旋角.其值由 $\cos\psi = \frac{2\pi r_h}{L}$ 确定.由于在导体带上 $E_{\parallel} = 0$, 在带间 $J_{\parallel} = 0$, 因此有

$$\int_S \mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{J}_{\parallel}^* dS = 0, \quad (13)$$

上面积分是在一个周期 L 内 $r = r_h$ 圆柱面上进行的,在以上各式中,下标“ \parallel ”和“ \perp ”分别表示沿螺旋带方向和与螺旋带垂直的方向.

在金属筒表面,即 $r = r_w$ 处,电场的切向分量为零,即

$$E_{2z}(r = r_w) = 0, \quad (14)$$

$$E_{2\varphi}(r = r_w) = 0. \quad (15)$$

至此,方程(5)(6)和(11)–(15)等7式给出了该系统各区域的边界条件.下面利用边界条件求出 n 次空间谐波的相应待定系数.

3.3. n 次空间谐波的待定系数

将(4)式分别代入(14)式和(15)式可得

$$A_{4n} = -\frac{I_n(T_{3n}r_w)}{K_n(T_{3n}r_w)} A_{3n}, \quad (16)$$

$$A_{6n} = -\frac{I'_n(T_{3n}r_w)}{K'_n(T_{3n}r_w)} A_{5n}. \quad (17)$$

将(3)式和(4)式分别代入(5)(6)两式可得

$$A_{1n} I_n(T_{1n}r_h) = A_{3n} I_n(T_{3n}r_h) + A_{4n} K_n(T_{3n}r_h), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta_n}{T_{2n}^2} \cdot \frac{n}{r} A_{1n} I_n(T_{1n}r_h) - \frac{j\omega\mu_0}{T_{2n}} A_{2n} I'_n(T_{2n}r_h) \\ & = -\frac{\beta_n}{T_{3n}^2} \cdot \frac{n}{r} [A_{3n} I_n(T_{3n}r_h) + A_{4n} K_n(T_{3n}r_h)] \\ & - \frac{j\omega\mu_0}{T_{3n}} [A_{5n} I'_n(T_{3n}r_h) + A_{6n} K'_n(T_{3n}r_h)]. \quad (19) \end{aligned}$$

将(3)式和(4)式分别代入(11)(12)两式可得

$$\begin{aligned} & \frac{j\omega\epsilon_d}{T_{3n}} [A_{3n} I'_n(T_{3n}r_h) + A_{4n} K'_n(T_{3n}r_h)] \\ & - \frac{n\beta_n}{rT_{3n}^2} \cdot [A_{5n} I_n(T_{3n}r_h) + A_{6n} K_n(T_{3n}r_h)] \\ & - \frac{j\omega\epsilon_0 T_{1n}}{T_{2n}^2} \cdot A_{1n} I'_n(T_{1n}r_h) + \frac{n\beta_n}{rT_{2n}^2} A_{2n} I_n(T_{2n}r_h) \\ & = J_{\parallel n} \sin\psi, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{2n} I_n(T_{2n}r_h) - A_{5n} I_n(T_{3n}r_h) - A_{6n} K_n(T_{3n}r_h) \\ & = J_{\parallel n} \cos\psi. \quad (21) \end{aligned}$$

联立求解(16)–(21)式,并令

$$f_{1n} = I_n(T_{3n}r_h) - \frac{I_n(T_{3n}r_w)}{K_n(T_{3n}r_w)} K_n(T_{3n}r_h), \quad (22)$$

$$f_{2n} = I'_n(T_{3n}r_h) - \frac{I'_n(T_{3n}r_w)}{K'_n(T_{3n}r_w)} K'_n(T_{3n}r_h), \quad (23)$$

$$f_{3n} = I_n(T_{3n}r_h) - \frac{I'_n(T_{3n}r_w)}{K'_n(T_{3n}r_w)} K_n(T_{3n}r_h), \quad (24)$$

$$f_{4n} = I'_n(T_{3n}r_h) - \frac{I'_n(T_{3n}r_w)}{K'_n(T_{3n}r_w)} K'_n(T_{3n}r_h), \quad (25)$$

可得

$$A_{5n} = \frac{A_{2n} I_n(T_{2n}r_h) - J_{\parallel n} \cos\psi}{f_{3n}}, \quad (26)$$

$$A_{2n} = C_{1n} A_{1n} - C_{2n} J_{\parallel n} \cos\psi, \quad (27)$$

$$A_{1n} = C_{3n} J_{\parallel n}, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{1n} &= \left[\left(\frac{1}{T_{3n}^2} - \frac{1}{T_{2n}^2} \right) \frac{n\beta_n}{r} I_n(T_{1n}r_h) \right] \\ &\times \left[\frac{j\omega\mu_0}{T_{2n}} I'_n(T_{2n}r_h) - \frac{j\omega\mu_d f_{4n}}{T_{3n} f_{3n}} I_n(T_{2n}r_h) \right]^{-1}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$C_{2n} = \frac{\mu_d f_{4n}}{T_{2n} f_{3n} \mu_0 I'_n(T_{2n}r_h) - \mu_d f_{4n} I_n(T_{2n}r_h)}, \quad (30)$$

$$C_{3n} = \left[\sin\psi + \frac{n\beta_n}{r} \left(\frac{C_{2n}}{T_{2n}^2} - \frac{C_{2n} + 1}{T_{3n}^2} \right) \right]$$

$$\times \left[\frac{j\omega\varepsilon_d f_{2n}}{T_{3n} f_{1n}} I_n(T_{1n} r_h) - \frac{j\omega\varepsilon_0 T_{1n}}{T_{2n}^2} I'_n(T_{1n} r_h) - \left(\frac{1}{T_{3n}^2} - \frac{1}{T_{2n}^2} \right) \frac{n\beta_n}{r} C_{1n} I_n(T_{2n} r_h) \right]^{-1}. \quad (31)$$

3.4. 导出色散方程

由(13)式可得

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_S E_{//n} J_{//n}^* dS = 0, \quad (32)$$

而

$$E_{//n} = E_{zn} \sin\psi + E_{\varphi n} \cos\psi. \quad (33)$$

将场方程代入上式可得

$$E_{//n} = e^{-j\beta_0 z} e^{-jn\left(\frac{2\pi z}{L} - \varphi\right)} (C_{4n} C_{3n} + C_{5n}) J_{//n}, \quad (34)$$

其中

$$C_{4n} = I_n(T_{1n} r_h) \sin\psi - \frac{n\beta_n}{r T_{2n}^2} I_n(T_{1n} r_h) \cos\psi - \frac{j\omega\mu_0}{T_{2n}} I'_n(T_{2n} r_h) C_{1n} \cos\psi, \quad (35)$$

$$C_{5n} = \frac{j\omega\mu_0}{T_{2n}} I'_n(T_{2n} r_h) C_{2n} \cos^2\psi. \quad (36)$$

将(34)式代入(32)式可得

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (C_{4n} C_{3n} + C_{5n}) \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)}{\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)^2} = 0. \quad (37)$$

(37)式即为等离子体填充带状螺旋线的色散方程。可以看出,该方程包括无穷多项,与螺旋线导电面模型所得到的基波和高次型波的色散方程不同。如果在(37)式中取 $n=0$ 的一项或 $n \neq 0$ 的某一项,就简化成螺旋线导电面模型的基波或高次波型的色散方程。

4. 结 论

对慢波器件高频特性的分析是研究该类器件的基础性工作。对于理论分析而言,给出各区域电磁场的表达式和所满足的边界条件,进而导出其色散方程是进行高频特性分析的关键。在此基础上,可进一步求得波的耦合阻抗。同时,通过对色散方程进行数值计算,可分析电磁波在该器件中传播的色散特性^[15],为该类器件的设计和选择适当密度的等离子体提供了理论依据。

- [1] Minami K, Carmel Y, Victor L *et al* 1990 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **18** 537
- [2] Wu J Q, Liu S G, Mo Y L 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 324 (in Chinese) [吴坚强、刘盛纲、莫元龙 1997 物理学报 **46** 324]
- [3] Liu P K, Xiong C D, Liu S G *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 892 (in Chinese) [刘濮鲲、熊彩东、刘盛纲等 1997 物理学报 **46** 892]
- [4] Gao H, Liu S G 2000 *Chin. Phys.* **9** 274
- [5] Liu S G, Barker R J, Zhu D J *et al* 2000 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **28** 2135
- [6] Liu S G, Barker R J, Yan Yang *et al* 2000 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **28** 2152
- [7] Xie H Q, Yan Y, Liu S G 2001 *High Power Laser and Particle Beams* **13** 345 (in Chinese) [谢鸿全、鄢 扬、刘盛纲 2001 强激光与粒子束 **13** 345]
- [8] Xie H Q, Liu P K, Li C Y *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3114 (in Chinese) [谢鸿全、刘濮鲲、李承跃等 2004 物理学报 **53** 3114]
- [9] Saturo Kobayashi, Thomas M. Antonsen, Jr. *et al* 1998 *IEEE Trans.*

Plas. Sci. **26** 669

- [10] Gong Z L, Chen G, Zhang J L *et al* 2002 3rd International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings, Beijing, 729
- [11] Xiew H Q, Li C Y, Yan Y, Liu S G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 914 (in Chinese) [谢鸿全、李承跃、鄢 扬、刘盛纲 2003 物理学报 **52** 914]
- [12] Wang Z C, Cheng Q Y, Wu H S 1999 *Acta Electronica Sinica* **27** 40 (in Chinese) [王自成、陈庆有、吴鸿适 1999 电子学报 **27** 40]
- [13] Stefano D 'Agostino, Francesco Emma, Claudio Paoloni 1998 *IEEE Trans. Electron Devices* **45** 1605
- [14] Liu S G, Li H F, Wang W X *et al* 1985 *Introduction to Microwave Electronics* (Beijing: National Defence Industry Press) 177 (in Chinese) [刘盛纲、李宏福、王文祥等 1985 微波电子学导论 (北京:国防工业出版社) 177]
- [15] Xiew H Q, Yan Y, Liu S G 2002 *High Power Laser and Particle Beams* **14** 111 (in Chinese) [谢鸿全、鄢 扬、刘盛纲 2002 强激光与粒子束 **14** 111]

Dispersion equation of a tape helix slow wave structure filled with plasma^{*}

Xie Hong-Quan¹⁾ Liu Pu-Kun²⁾

¹⁾ *School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China*

²⁾ *Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

(Received 14 July 2005 ; revised manuscript received 13 January 2006)

Abstract

A tape helix slow wave structure is filled with uniform plasma. A dielectric is loaded inside the region between helix and a conducting waveguide. The system is immersed in a strong longitudinal magnetic field. By means of helix tape model and linear field theory, the field equations and the boundary conditions in plasma region and dielectric region are given. On the basis of the field analysis, the dispersion relation of the slow wave structure is derived and some discussions are given.

Keywords : plasma , a tape helix , dispersion equation

PACC : 5275 , 5240D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10347009) and the Natural Science Foundation of Education Bureau of Sichuan Province , China (Grant No. 2003B019).