

光纤中变系数非线性 Schrödinger 方程的 孤子解及其应用*

宗丰德 戴朝卿 杨 琴 张解放†

(浙江师范大学非线性物理研究所, 金华 321004)
(2005 年 7 月 26 日收到, 2005 年 12 月 15 日收到修改稿)

基于推广的立方非线性 Klein-Gordon 方程对一般形式的变系数非线性 Schrödinger 方程进行研究, 讨论了无啁啾情形的孤子解, 发现了包括亮、暗孤子解和类孤子解在内的一些新的精确解. 同时对基本孤子的色散控制方法进行了简单讨论. 作为特例, 常系数非线性 Schrödinger 方程和两类特殊的变系数非线性 Schrödinger 方程的结果和已知的形式一致. 此外, 还研究了一个周期增益或损耗的光纤系统, 得到了有意义的结果.

关键词: 变系数, 非线性 Schrödinger 方程, 亮孤子解, 暗孤子解

PACC: 0290, 0340K

1. 引 言

非线性光学研究的一个重要问题是孤子运动, 特别是在光纤中的孤子更引人注目. 光学孤子是一种相干光载频的脉冲调制波. 理想无损耗单模光纤中光学孤子满足非线性 Schrödinger 方程

$$iu_z \pm \frac{1}{2}u_{zz} + |u|^2u = 0, \quad (1)$$

其中 u 表示波包幅值, z 和 t 分别是波的纵向传播距离和延迟时间. 满足该方程的基本孤子在光纤中可以传播无限长的距离而不会有信息失真和波形畸变, 具有很高的传输码率, 因而引起了物理学家的极大兴趣, 并在理论和实验上都取得十分成功的结论. 但自从 Bogatyrev 等^[1]在实验室实现了光纤中双曲型衰减的群速度色散, 并进一步在孤子通信中实现了可控光孤子和孤子脉冲串^[2], 对变系数非线性 Schrödinger 方程的研究引起了人们的充分注意. 在实际光纤中由于损耗使光脉冲功率沿光纤指数衰减, 使非线性和色散效应之间的平衡遭到破坏, 影响了光孤子的传输, 因此人们通常采取使光纤参数(色散和非线性)沿纵向缓慢变化^[3-7]或利用绝热放大^[8,9]的方法来维持光孤子在实际通信系统中的传输. 这样, 光纤通信中孤子的传输遵循如下形式的

变系数非线性 Schrödinger 方程:

$$iu_z + \frac{1}{2}\beta(z)u_{zz} + \alpha(z)|u|^2u = i\gamma(z)u, \quad (2)$$

其中 $\beta(z)$, $\alpha(z)$, $\gamma(z)$ 分别是纵向距离缓变的二阶色散、非线性系数和绝热放大(增益)或损耗. $\gamma(z) > 0$ 表示增益, $\gamma(z) < 0$ 表示损耗. 方程(2)在其他物理领域(如等离子体物理、流体动力学和固体物理)中也有重要的地位.

研究变系数非线性偏微分方程主要采用数值求解或近似微扰求解^[4,8,10]. 近年来对变系数非线性偏微分方程的求解也提出了多种有效的方法^[11-13]. 最近, 人们通过分离变量法^[14]、基于 Lax 对的 Darboux 变换法^[15]、推广的 Riccati 方程展开法^[16]对变系数非线性 Schrödinger 方程进行了较为深入的探讨. 特别是文献[17]采用自相似技术对方程(2)给出了一大类自相似解, 获得了一些具有啁啾情形的有价值结论. 本文借助推广的立方非线性 Klein-Gordon(KG)方程进一步对方程(2)进行研究, 讨论了无啁啾情形的孤子解问题. 在此基础上构建出常系数非线性 Schrödinger 方程和四类光纤变系数非线性 Schrödinger 方程的孤子解. 与文献[17]所提出的先引入绝热放大(增益)或损耗 $\gamma(z)$ 和二阶色散 $\beta(z)$ 、非线性系数 $\alpha(z)$ 的关系式再用基于 Lax 对的 Darboux 变换法求解方程(2)不同, 我们的方法最后

* 浙江省自然科学基金(批准号: Y605312)资助的课题.

† 通讯联系人.

自然会得出 $\gamma(z)$ 和 $\beta(z)$, $\alpha(z)$ 所满足的关系式. 作为特例的常系数非线性 Schrödinger 方程(1)和三类特殊的变系数非线性 Schrödinger 方程, 本文的结果可以退化成为已知的形式^[15,16,18,19]; 同时两类变系数非线性 Schrödinger 方程的结果与相关文献采用其他方法得到的结果一致. 此外, 我们着重研究了一个周期增益或损耗的光纤系统, 并发现了一些有意义的结果.

2. 变系数非线性 Schrödinger 方程的孤子解

为了得到方程(2)更多的孤子解, 我们引入推广的立方非线性 KG 方程^[15]

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}^2 &= \alpha c_0 + c_1 \phi + c_2 \phi^2 + c_3 \phi^3 + c_4 \phi^4, \\ \phi_{\xi\xi} &= c_1 + 2c_2 \phi + 3c_3 \phi^2 + 4c_4 \phi^3, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\xi = \xi(z, t)$, $c_i (i = 0, \dots, 4)$ 是任意常数. 通过直接运算, 当 $c_1 = 0$, 方程(3)具有双曲正切和双曲正割型在物理上有意义的解

$$\phi = \sqrt{-\frac{c_2}{c_4}} \operatorname{sech}(\sqrt{2c_2} \xi),$$

$$c_0 = c_3 = 0,$$

$$c_2 > 0, \quad c_4 < 0;$$

$$\phi = \epsilon \sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}} \tanh(\sqrt{-c_2} \xi),$$

$$c_0 = c_2^2 / (2c_4),$$

$$c_2 < 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 > 0,$$

$$\epsilon^2 = 1;$$

$$\phi = \frac{c_2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{2c_2} \xi / 2)}{2\epsilon \sqrt{c_2 c_4} \tanh(\sqrt{2c_2} \xi / 2) - c_3}, \quad (4)$$

$$c_0 = c_1 = 0,$$

$$c_2, c_4 > 0,$$

$$\epsilon^2 = 1;$$

$$\phi = \frac{2c_2 \operatorname{sech}(\sqrt{2c_2} \xi)}{\sqrt{c_3^2 - 4c_2 c_4} - c_3 \operatorname{sech}(\sqrt{2c_2} \xi)},$$

$$c_0 = c_1 = 0,$$

$$c_2 > 0,$$

$$c_3^2 - 4c_2 c_4 > 0;$$

$$\phi = \frac{c_2 c_3 \operatorname{sech}^2(\epsilon \sqrt{2c_2} \xi / 2)}{c_2 c_4 (1 - \tanh(\epsilon \sqrt{2c_2} \xi / 2))^2 - c_3^2},$$

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 > 0,$$

$$\epsilon^2 = 1.$$

首先对方程(2)作变换

$$u(z, t) = V(z, t) \exp(i\theta(z, t)), \quad (5)$$

其中 $V(z, t)$ 是振幅函数, $\theta(z, t)$ 是相位函数. 对方程(2)分离实部和虚部, 有

$$-V\theta_z + \frac{1}{2}\beta(z)(V_u - V\theta_z^2) + \alpha(z)V^3 = 0, \quad (6)$$

$$V_z + \frac{1}{2}\beta(z)(2V\theta_z + V\theta_{zz}) - \gamma(z)V = 0. \quad (7)$$

平衡方程(6)中的最高阶导数项 V_u 和非线性项 V^3 , 有 $m = 1$. 因此我们假设方程(6)和(7)的解有如下形式:

$$V(z, t) = f(z) + h(z)\mathcal{H}(\xi), \quad (8)$$

$$\xi = p(z)t + q(z),$$

$$\theta(z, t) = \Gamma(z)t + \Omega(z), \quad (9)$$

其中 $f(z)$, $h(z)$, $p(z)$, $q(z)$, $\Gamma(z)$ 及 $\Omega(z)$ 都是 z 的函数, $\mathcal{H}(\xi)$ 满足方程(3). 光脉冲宽度与 $p(z)$ 有关, 群速度与 $q(z)$ 有关. 把方程(8)(9)和(3)代入方程(6)和(7), 并且令 $t^k \phi^l$ 和 $\sqrt{\alpha c_0 + c_1 \phi + c_2 \phi^2 + c_3 \phi^3 + c_4 \phi^4}$ ($k = 0, 1, l = 0, 1, 2, 3$) 前的系数为零, 有

$$h_z = \gamma h,$$

$$f_z = \gamma f,$$

$$p_z = 0,$$

$$q_z + p\Gamma\beta = 0,$$

$$-f\Gamma_z = 0,$$

$$-h\Gamma_z = 0, \quad (10)$$

$$h(2p^2 c_4 \beta + \alpha h^2) = 0,$$

$$h\left(\frac{3}{2}p^2 c_3 \beta + 3\alpha f h\right) = 0,$$

$$-h\left[\Omega_z - \left(p^2 c_2 - \frac{1}{2}\Gamma^2\right)\beta - 3\alpha f^2\right] = 0,$$

$$-f\left(\Omega_z + \frac{1}{2}\Gamma^2\beta - \alpha f^2\right) = 0.$$

利用吴消元法和 Maple 程序, 得到

$$c_3 = 0,$$

$$f = 0,$$

$$h = A_1 \exp\left(\int_0^z \gamma(\zeta) d\zeta\right),$$

$$p = A_2,$$

$$\Gamma = A_3, \quad (11)$$

$$q = -A_2 A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta,$$

$$\Omega(z) = \left(A_2^2 c_2 - \frac{1}{2}A_3^2\right) \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta,$$

$$2A_2^2 c_4 \beta(z) = -\alpha(z) A_1^2 \exp\left(2 \int_0^z \gamma(\zeta) d\zeta\right).$$

和

$$\begin{aligned}
 c_3 &\neq 0, \\
 f &= \frac{c_3 A_1}{4c_4} \exp\left(\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right), \\
 h &= A_1 \exp\left(\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right), \\
 p &= A_2, \\
 \Gamma &= A_3, \\
 q &= -A_2 A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \int_0^z \left[-\frac{1}{2} A_3^2 \beta(\zeta) + \frac{c_3 A_1}{16c_4} \alpha(\zeta) \right. \\
 &\quad \left. \times \exp\left(\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right) \right] d\zeta,
 \end{aligned}$$

$$2A_2^2 c_4 \beta(z) = -\alpha(z) A_1^2 \exp\left(2 \int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right),$$

$$c_3^2 = 4c_2 c_4.$$

(11)(12) 式中的 A_1, A_2, A_3 是任意常数. 联合(5), (8)(9)(11) 和(12) 式, 可得到方程(2) 的如下四组精确孤立波解:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= A_1 \sqrt{-\frac{c_2}{c_4}} \exp\left[\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right] \\
 &\quad \times \operatorname{sech}\left[\sqrt{2c_2} A_2 \left(t - A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta\right)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[\epsilon \left(A_3 t + \Omega(z)\right)\right], \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \left(A_2^2 c_2 - \frac{1}{2} A_3^2\right) \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta, \\
 c_2 &> 0, \quad c_4 < 0, \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\beta(z) = -\frac{\alpha(z) A_1^2 \exp\left(2 \int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right)}{2A_2^2 c_4}.$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= A_1 \sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}} \exp\left[\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right] \\
 &\quad \times \tanh\left[\sqrt{-c_2} A_2 \left(t - A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta\right)\right] \\
 &\quad \times \exp\left[\epsilon \left(A_3 t + \Omega(z)\right)\right], \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \left(A_2^2 c_2 - \frac{1}{2} A_3^2\right) \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta, \\
 c_2 &< 0, \quad c_4 > 0, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\beta(z) = -\frac{\alpha(z) A_1^2 \exp\left(2 \int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right)}{2A_2^2 c_4}.$$

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \frac{A_1}{2} \sqrt{\frac{c_2}{c_4}} \exp\left[\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right] \\
 &\quad \times \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{c_2}{2}} A_2 \left(t - A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta\right)\right]}{\epsilon \tanh\left[\sqrt{\frac{c_2}{2}} A_2 \left(t - A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta\right)\right] - 1} \right\} \\
 &\quad \times \exp\left[\epsilon \left(A_3 t + \Omega(z)\right)\right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \int_0^z \left[-\frac{1}{2} A_3^2 \beta(\zeta) + \frac{A_1}{16} \sqrt{\frac{c_2}{c_4}} \alpha(\zeta) \right. \\
 &\quad \left. \times \exp\left(\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right) \right] d\zeta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &> 0, \quad c_4 > 0, \\
 \epsilon &= \pm 1,
 \end{aligned}$$

$$\beta(z) = -\frac{\alpha(z) A_1^2 \exp\left(2 \int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right)}{2A_2^2 c_4}. \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 u_4 &= \frac{A_1}{2} \sqrt{\frac{c_2}{c_4}} \exp\left[\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right] \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sech}^2\left[\epsilon \sqrt{\frac{c_2}{2}} A_2 \left(t - A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta\right)\right]}{\left[1 - \tanh\left(\epsilon \sqrt{\frac{c_2}{2}} A_2 \left(t - A_3 \int_0^z \beta(\zeta) d\zeta\right)\right)\right]^2 - 4} \right\} \\
 &\quad \times \exp\left[\epsilon \left(A_3 t + \Omega(z)\right)\right], \quad (19)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega(z) &= \int_0^z \left[-\frac{1}{2} A_3^2 \beta(\zeta) + \frac{A_1}{8} \sqrt{\frac{c_2}{c_4}} \alpha(\zeta) \right. \\
 &\quad \left. \times \exp\left(\int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right) \right] d\zeta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &> 0, \quad c_4 > 0, \\
 \epsilon &= \pm 1,
 \end{aligned}$$

$$\beta(z) = -\frac{\alpha(z) A_1^2 \exp\left(2 \int_0^z \chi(\zeta) d\zeta\right)}{2A_2^2 c_4}. \quad (20)$$

解(13)和(15)式与文献[14]得到的结果是一致的. 由(13)和(15)式可知,孤子的速度由 $A_3\beta(z)$ 决定,相移与 $(A_2^2c_2 - \frac{1}{2}A_3^2)\beta(z)$ 有关,时间移动由 $A_3\int_0^z \beta(\zeta)d\zeta$ 来描述. 所以我们可以选择合适的光纤色散参数 $\beta(z)$ 来控制孤子的速度、相移和时间移动. 由(14)(16)(18)和(20)式可得绝热放大(增益)或损耗 $\chi(z)$ 满足

$$\chi(z) = \frac{\alpha\beta_z - \beta\alpha_z}{2\alpha\beta}. \tag{21}$$

由(14)式知,亮孤子(13)式的振幅

$$A_1\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\exp\left(\int_0^z \chi(\zeta)d\zeta\right) = \sqrt{\frac{2c_2\beta}{\alpha}}A_2.$$

当 α 为常数时,损耗 $\chi(z)$ 和振幅都可由色散参数 $\beta(z)$ 来控制. 对具体的问题通过选择合适的分布参数 $\alpha(z), \beta(z)$, 我们可以获得具体形式的精确孤子解.

3. 几种具体的光纤控制模型

3.1. 常系数非线性 Schrödinger 方程

在方程(2)中,令

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \pm 1, \\ \alpha(z) &= 1, \end{aligned}$$

因而

$$\chi(z) = 0,$$

可得常系数非线性 Schrödinger 方程(1).

当 $\beta(z) = 1$ (反常色散区)时,由方程(13)有亮孤子解

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\operatorname{sech}\left[\sqrt{2c_2}A_2(t - A_3z) + C_1\right] \\ &\times \exp\left[i\left(A_3t + \left(A_2^2c_2 - \frac{1}{2}A_3^2\right)z\right) + C_2\right], \end{aligned} \tag{22}$$

其中,

$$\begin{aligned} A_1^2 &= -2A_2^2c_4, \\ c_2 &> 0, \quad c_4 < 0, \end{aligned}$$

且 C_1, C_2 为积分常数.

当 $\beta(z) = -1$ (正常色散区)时,由方程(15)有暗孤子解

$$u_2 = A_1\sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}}\tanh\left[\sqrt{-c_2}A_2(t + A_3z) + C_1\right]$$

$$\times \exp\left[i\left(A_3t - \left(A_2^2c_2 - \frac{1}{2}A_3^2\right)z\right) + C_2\right], \tag{23}$$

其中,

$$\begin{aligned} A_1^2 &= 2A_2^2c_4, \\ c_2 &< 0, \quad c_4 > 0, \end{aligned}$$

且 C_1, C_2 为积分常数. 由方程(22)可看出亮孤子的振幅 $A_1\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}$ 反比于脉冲宽度,

$$\frac{1}{\sqrt{2c_2}A_2} = \frac{1}{A_1\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}},$$

但波速 A_3 与振幅无关. 暗孤子解(23)式也有类似的结论. 而此结论是熟知的,所以我们的方法是合理的.

3.2. 第一类变系数非线性 Schrödinger 方程

在方程(2)中,令

$$\begin{aligned} \beta(z) &= 2, \\ \alpha(z) &= (\theta + 1)\exp(-2\theta z), \end{aligned}$$

因而 $\chi(z) = \theta$ (常数),可得

$$iu_z + u_{zz} + (\theta + 1)\exp(-2\theta z)|u|^2u = i\theta u. \tag{24}$$

方程(24)描述拥有常数增益且指数形式变化的非线性光纤中的现象^[16]. 由解(13)式得

$$\begin{aligned} u &= A_1\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\exp(\theta z)\operatorname{sech}\left[A_2\sqrt{2c_2}(t - A_3z) + C_1\right] \\ &\times \exp\left[i\left(A_3t + 2\left(A_2^2c_2 - \frac{1}{2}A_3^2\right)z\right) + C_2\right], \end{aligned} \tag{25}$$

其中,

$$\begin{aligned} (\theta + 1)A_1^2 &= -4A_2^2c_4, \\ c_2 &> 0, \quad c_4 < 0, \end{aligned}$$

且 C_1, C_2 为积分常数. 该解与文献[18]中得到的结果是一致的. 从方程(25)可知,孤子的幅值随传播距离呈指数形式增加而脉冲宽度保持不变,强度 $|u|^2$ 随 θ 单调变化,我们可以选择 θ 单调变化来补偿光纤的损耗.

3.3. 第二类变系数非线性 Schrödinger 方程

在方程(2)中,令

$$\begin{aligned} \beta(z) &= 2, \\ \alpha(z) &= \frac{A \sin(z) + C}{[\sin(\theta z) + C]}, \end{aligned}$$

因而

$$\gamma(z) = \frac{\theta \cos(\theta z)}{\sin(\theta z) + C} - \frac{\cos(z)}{\sin(z) + C},$$

可得第二类变系数非线性 Schrödinger 方程^[16]

$$i u_z + u_{zz} + \frac{\theta [\sin(z) + C]}{[\sin(\theta z) + C]} |u|^2 u = i \left[\frac{\theta \cos(\theta z)}{\sin(\theta z) + C} - \frac{\cos(z)}{\sin(z) + C} \right] u. \quad (26)$$

由方程 (13) 得

$$u = A_1 \sqrt{-\frac{c_2 \sin(\theta z) + C}{c_4 \sin(z) + C}} \times \operatorname{sech} \left[A_2 \sqrt{2c_2} (t - A_3 z) + C_1 \right] \times \exp \left[i \left(A_3 t + 2 \left(A_2^2 c_2 - \frac{1}{2} A_3^2 \right) z \right) + C_2 \right], \quad (27)$$

其中,

$$\theta A_1^2 = -4A_2^2 c_4, \\ c_2 > 0, \quad c_4 < 0,$$

且 C_1, C_2 为积分常数. 该解与文献 [18] 中得到的结果是一致的. 非线性系数 $\alpha(z)$ 和增益或损耗 $\gamma(z)$ 是传播距离 z 的周期函数, 孤子幅值也是传播距离 z 的周期函数, 而强度 $|u|^2$ 是振动形式的解, 其具体形式如图 1(a), 其相应的轮廓图见图 1(b). 由图 1(b) 可知, 孤子幅值作周期振动.

3.4. 色散缓变光纤变系数非线性 Schrödinger 方程

色散缓变光纤变系数非线性 Schrödinger 方程^[16]可以表示如下:

$$i u_z + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\theta_1} \right) u_{zz} + \exp(-\theta_2 z) |u|^2 u = -\frac{i}{R} \frac{dR}{dz} u, \quad (28)$$

其中, $R(z)$ 为光纤的有效芯径; θ_1 为色散缓变参数, 它表示光纤色散沿脉冲传输方向减小的快慢程度; θ_2 描述光纤损耗引起的非线性随传输距离的指数衰减. 方程 (28) 描述了皮秒脉冲在色散缓变单模光纤中孤子效应压缩过程的数学模型, 文献 [19] 用数值计算进行了研究. 由方程 (13) 得

$$u = A_2 \sqrt{\frac{c_2 \theta_1}{\theta_1 - z}} \exp \left(\frac{1}{2} \theta_2 z \right) \times \operatorname{sech} \left[A_2 \sqrt{2c_2} \left(t - A_3 \left(z - \frac{z^2}{2\theta_1} \right) \right) + C_1 \right] \times \exp \left[i \left(A_3 t + \left(A_2^2 c_2 - \frac{1}{2} A_3^2 \right) \left(z - \frac{z^2}{2\theta_1} \right) \right) + C_2 \right], \quad (29)$$

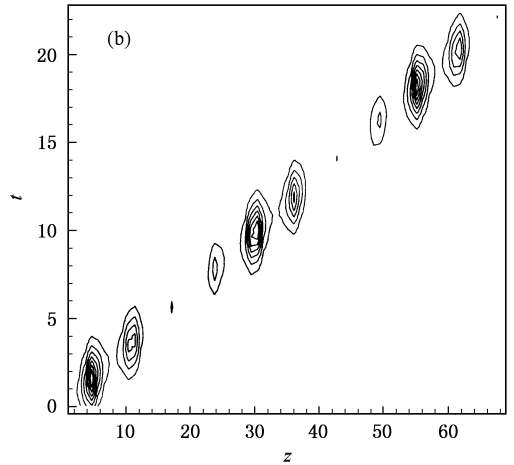
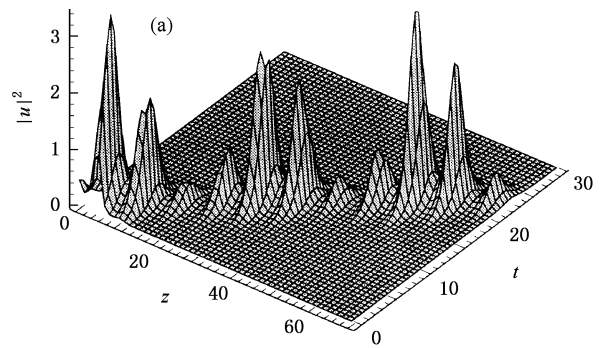


图 1 形如解 (27) 式的强度 $|u|^2$ 的演化图 (a) 及轮廓图 (b)

$$A_1 = \frac{2}{3}, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = 1, \quad c_4 = -1, \quad C_1 = C_2 = 0, \\ C = 2, \quad \theta = \frac{1}{4}$$

其中 C_1, C_2 为积分常数.

光纤的有效芯径

$$R(z) = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{-\frac{\theta_1}{2c_4(\theta_1 - z)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \theta_2 z \right), \quad (30)$$

其中,

$$c_2 > 0, \quad c_4 < 0.$$

由方程 (29) (30) 可知, 孤子幅值随传播距离呈指数形式增加而脉冲宽度保持不变. 光纤的有效芯径随传播距离呈指数形式衰减.

3.5. 周期增益或损耗的光纤系统

我们考虑

$$\beta(z) = \frac{1}{\beta_0} \exp(\sigma z) \alpha(z), \\ \alpha(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(gz),$$

由方程 (21) 得参数 $\gamma = \frac{\sigma}{2}$, $\sigma < 0$ 对应色散渐缓光纤. 这里 α_0, α_1 和 g 描述 Kerr 非线性, β_0 与系统的初始入射峰值功率有关. 代入方程 (2) 可得

由方程 (13) 得

$$u = A_1 \sqrt{-\frac{c_2}{c_4} \exp\left(\frac{\sigma}{2} z\right)} \operatorname{sech}\left[\sqrt{2c_2} A_2 \left(t - A_3 \exp(\sigma z) \left(\frac{\alpha_0}{\sigma} + \frac{\alpha_1 \sigma \cos(gz) + \alpha_1 g \sin(gz)}{\sigma^2 + g^2}\right)\right) + C_1\right] \times \exp\left[i\left(A_3 t + \left(A_2^2 c_2 - \frac{1}{2} A_2^3\right) \exp(\sigma z) \left(\frac{\alpha_0}{\sigma} + \frac{\alpha_1 \sigma \cos(gz) + \alpha_1 g \sin(gz)}{\sigma^2 + g^2}\right)\right) + C_2\right], \quad (32)$$

其中,

$$\beta_0 A_1^2 = -2A_2^2 c_4, \\ c_2 > 0, \quad c_4 < 0,$$

且 C_1, C_2 是积分常数.

我们选择不同的 σ 值有不同的物理含义, 即 $\sigma > 0$ 表示增益, $\sigma < 0$ 表示损耗. 由解 (32) 式可知, 亮孤子的速度与

$$\frac{A_3}{\beta_0} [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(gz)] \exp(\sigma z)$$

$$i u_z + \frac{1}{2\beta_0} \exp(\sigma z) [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(gz)] u_{tt} + (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(gz)) |u|^2 u = i \frac{\sigma}{2} u. \quad (31)$$

有关相移由

$$\frac{2A_2^2 c_2 - A_3^2}{2\beta_0} [\alpha_0 + \alpha_1 \cos(gz)] \exp(\sigma z)$$

决定. 时移为

$$T_{\text{shift}} = A_3 \exp(\sigma z) \left[\frac{\alpha_0}{\sigma} + \frac{\alpha_1 \sigma \cos(gz) + \alpha_1 g \sin(gz)}{\sigma^2 + g^2} \right].$$

孤波脉冲宽度保持常数 $\frac{1}{\sqrt{2c_2} A_2}$. 在色散渐缓光纤尾

端, 孤波速度从刚进入时的初始值减小为一个较小值, 时移接近某一常数. 取不同 σ 值的演化行为

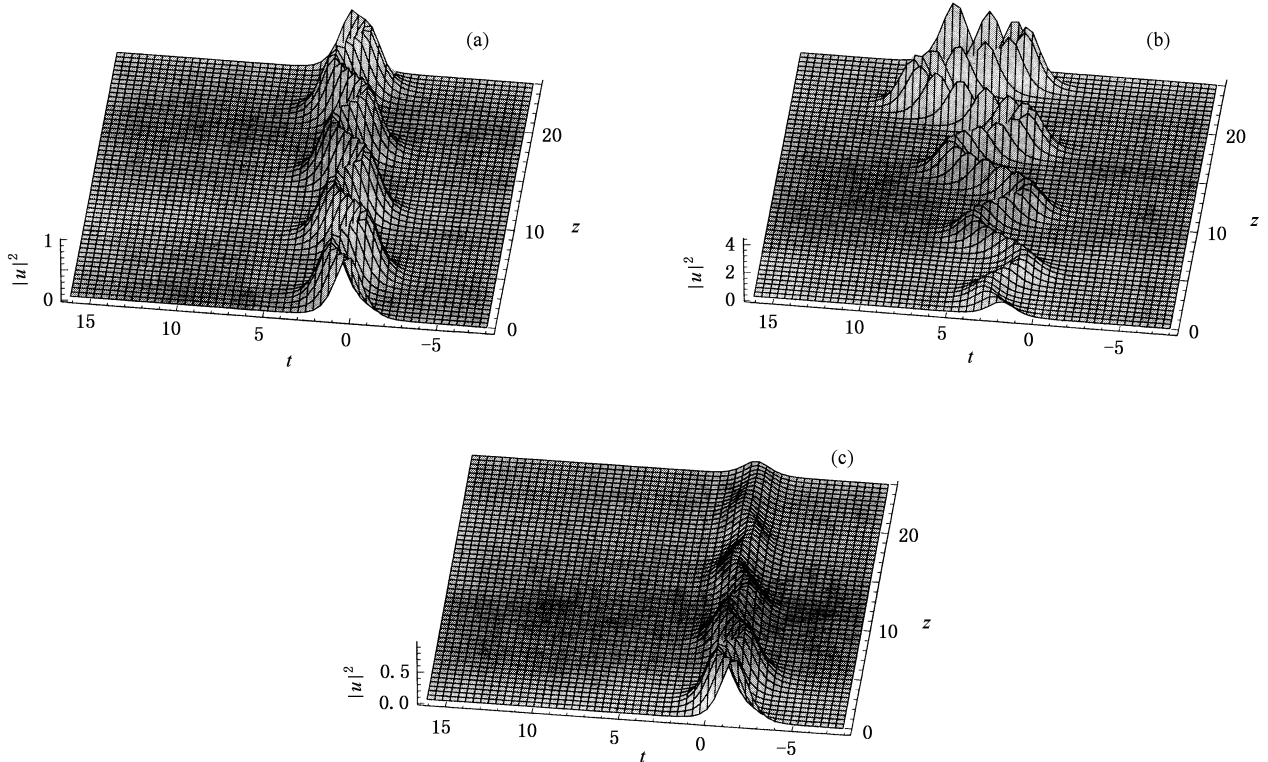


图 2 取不同 σ 值时形如 (32) 式的强度 $|u|^2$ 的演化图 (a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 0.06$ (c) $\sigma = -0.06$. $A_1 = A_3 = 1, A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha_0 = 0.1, \alpha_1 = \beta_0 = g = 1, c_2 = -c_4 = 1, C_1 = C_2 = 0$

如图 2 所示, 图中取 $A_1 = A_3 = 1$, $A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_0 = 0.1$, $\alpha_1 = \beta_0 = g = 1$, $c_2 = -c_4 = 1$, $C_1 = C_2 = 0$. 由图 2 可知, 亮孤子的速度和时移随色散的改变而改变, 而孤子脉冲宽度保持不变, 这是孤子的一个重要特征. 由于增益 ($\sigma > 0$) 的存在孤子的振幅增加, 同样存在损耗 ($\sigma < 0$) 使孤子的振幅减小, 分别如图 2(b) 和 (c) 所示. 通过对 σ 的控制可达到我们预期的目的, 设计出合理的光纤来传输信息.

4. 结 论

本文借助推广的立方非线性 KG 方程对变系数非线性 Schrödinger 方程进行了研究, 发现了一些新

的精确解, 包括亮、暗孤子解和类孤子解. 同时我们对基本孤子的色散控制方法进行了简单的讨论. 事实上, 用这种方法还可以得到 Jacobi 椭圆函数解和三角函数解, 由于篇幅的限制, 我们未对这些解进行讨论. 作为特例, 构建了几类非线性 Schrödinger 方程的孤子解, 其中对于常系数非线性 Schrödinger 方程 (1) 和两类特殊的变系数非线性 Schrödinger 方程, 本文的结果和已知的形式一致. 此外, 还研究了一个周期增益或损耗的光纤系统, 得到了有意义的结果. 由于求解变系数非线性偏微分方程的复杂性, 我们得到的仅是这些方程的部分解. 值得指出的是, 用本文的方法求变系数非线性偏微分方程的精确解不失为一种有效的途径, 需要继续探讨.

-
- [1] Bogatyrev V A , Bubnov M M , Dianov E M *et al* 1991 *J. Lightwave Technol.* **9** 561
- [2] Mamyshev P V , Chers V , Dianov M 1991 *IEEE J. Quantum Electron.* **7** 2347
- [3] Tajima K 1987 *Opt. Lett.* **12** 54
- [4] Bordon E E , Anderson W L 1989 *J. Lightwave Technol.* **7** 353
- [5] Wabnitz S 1996 *Opt. Lett.* **21** 638
- [6] Kuehl H H 1988 *J. Opt. Soc. Am. B* **5** 709
- [7] Smith N J , Doran N J 1996 *Opt. Lett.* **21** 570
- [8] Kivshar Y S , Konotop V V 1989 *Sov. J. Quantum Electron.* **19** 566
- [9] Quiroga-Teixeiro M L , Andrekson P A *et al* 1996 *J. Opt. Soc. Am. B* **13** 687
- [10] Kuehl H H 1988 *J. Opt. Soc. Am. B* **5** 709
- [11] Zhang J F , Cheng F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese)
- [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]
- [12] Lou S Y , Ruan H Y 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 182 (in Chinese)
- [楼森岳、阮航宇 1992 物理学报 **41** 182]
- [13] Liu S K , Fu Z T , Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 1923]
- [14] Xu C Z , Zhang J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3652 [徐昌智、张解放 2004 物理学报 **53** 3652]
- [15] Hao R Y , Lu L , Li Z H *et al* 2004 *Opt. Commun.* **236** 79
- [16] Li B , Chen Y 2004 *Chaos Soliton Fract.* **21** 241
- [17] Kruglov V I , Peacock A C , Harvery J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 11392
- [18] Ruan H Y , Chen Y X 2003 *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** 1350
- [19] Cao W H , Yao A M , Liao C J *et al* 1994 *Acta Opt. Sin.* **14** 118 (in Chinese) [曹文华、姚爱民、廖常俊等 1994 光学学报 **14** 118]

Soliton solutions for variable coefficient nonlinear Schrödinger equation for optical fiber and their application^{*}

Zong Feng-De Dai Chao-Qing Yang Qin Zhang Jie-Fang[†]

(*Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

(Received 26 July 2005 ; revised manuscript received 15 December 2005)

Abstract

In this paper, the general variable coefficient nonlinear Schrödinger equation for the optical fiber is investigated based on the extended cubic nonlinear Klein-Gordon equation. The soliton solutions under non-chirp case are discussed, and some new exact solutions, including the bright soliton, the dark soliton and the soliton-like solution are obtained. The standard nonlinear Schrödinger equation and four kinds of the variable coefficient nonlinear Schrödinger equation are all corresponding special cases. In addition, some interesting results for the optical fiber system with periodic gain or loss are also obtained.

Keywords : variable coefficient, nonlinear Schrödinger equation, bright soliton, dark soliton

PACC : 0290, 0340K

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y605312).

[†] Corresponding author.