第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3829-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.8,August,2006

带有附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性*

贾利群[1)†]　郑世旺[2)]

1)(江南大学理学院,无锡　214122)

2)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘　476000)

(2005 年 11 月 22 日收到;2006 年 4 月 25 日收到修改稿)

研究带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性的定义和判据,给出系统 Mei 对称性为 Lie 对称性的充分必要条件.通过 Lie 对称性间接导出具有 Mei 对称性且带有附加项的广义 Hamilton 系统运动微分方程的 Hojman 守恒量.举例说明结果的应用.

关键词:附加项,广义 Hamilton 系统,Mei 对称性,Hojman 守恒量

PACC:0320

1. 引　　言

近代分析力学理论在近代物理学领域日趋重要,发展极为迅速[1—4].对称性与守恒量理论是数学、物理学,特别是近代分析力学理论的重要研究领域.对称性主要有 Noether 对称性[5—12]、Lie 对称性[11—17]和 Mei 对称性[11,12,18—23]三种,相应的守恒量为 Noether 守恒量[10,13,14]、Hojman 守恒量[18,24,25]和 Mei 守恒量[11,12,26].

自 20 世纪 50 年代以来,广义 Hamilton 系统理论飞速发展.但是,有一些实际问题常常不能用广义 Hamilton 系统表达.例如,刚体在外力矩作用下定点转动问题的微分方程,必须在 Euler 情形的广义 Hamilton 方程中添加一个附加项,这就成为带附加项的广义 Hamilton 系统了.本文讨论带附加项的广义 Hamilton 系统 Mei 对称性的定义和判据,给出 Mei 对称性为 Lie 对称性的充分必要条件,进而通过 Lie 对称性,间接求出具有 Mei 对称性且带有附加项的广义 Hamilton 系统运动微分方程的 Hojman 守恒量.

2. 系统 Mei 对称性的定义和判据

给广义 Hamilton 系统的运动微分方程

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}$$

右端增加一个附加项 F_i,可得带附加项的广义 Hamilton 系统的运动微分方程如下:

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} + F_i \qquad (i,j = 1,\cdots,m), \tag{1}$$

式中 $J_{ij} = J_{ij}(\boldsymbol{x})$,满足 $J_{ij} = -J_{ji}$ 和下列方程:

$$J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} = 0 \qquad (i,j,l = 1,\cdots,m). \tag{2}$$

方程(1)中的 $H = H(t,\boldsymbol{x})$ 和 $F_i = F_i(t,\boldsymbol{x})$ 是两个动力学函数,H 是 Hamilton 函数,F_i 是广义 Hamilton 系统的附加项.设有无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{x}),\\ x_i^*(t^*) &= x_i + \varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{3}$$

式中,ε 为一无限小参数,ξ_0,ξ_i 为无限小生成元.在(3)式变换下,动力学函数 H 和 F_i 成为 $H^*(t^*,\boldsymbol{x}^*)$ 和 $F_i^*(t^*,\boldsymbol{x}^*)$,即

$$\begin{aligned} H^* &= H + \varepsilon X^{(0)}(H) + O(\varepsilon^2),\\ F_i^* &= F_i + \varepsilon X^{(0)}(F_i) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{4}$$

式中

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5}$$

如果用(4)式中变换后的函数 H^* 和 F_i^* 代替方程(1)中变换前的函数 H 和 F_i,方程的形式保持不变,则称方程(1)的这种对称性为带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性.

* 国家自然科学基金(批准号:10372053)和江南大学 211 工程(批准号:0002246)资助的课题.

† E-mail:jlq0@sina.com

根据上述定义,有

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H^*}{\partial x_j} + F_i^* . \tag{6}$$

将(4)式代入(6)式,忽略 ε^2 及更高阶小量,利用方程(1)可得如下判据方程:

$$0 = J_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\{X^{(0)}(H)\} + X^{(0)}(F_i). \tag{7}$$

于是,可得带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性判据:如果无限小生成元 ξ_0,ξ_i 满足判据方程(7),则相应的对称性为带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性.

3. 系统 Mei 对称性与 Lie 对称性的关系

方程(1)的 Lie 对称性确定方程为

$$X^{(1)}\left\{\dot{x}_i - J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} - F_i\right\} = 0, \tag{8}$$

式中

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_i - \dot{x}_i\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}. \tag{9}$$

因此方程(8)可改写为

$$\dot{\xi}_i - \left(J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} + F_i\right)\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left(J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} + F_i\right). \tag{10}$$

如果系统 Mei 对称性的无限小生成元 ξ_0,ξ_i 满足(10)式,则它也是 Lie 对称性的. 为研究带附加项的广义 Hamilton 系统 Lie 对称性与 Mei 对称性的关系,将(10)式展开,得

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_i - J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\dot{\xi}_0 - F_i\dot{\xi}_0\\&= J_{ij}\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial x_j}\xi_0 + \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial x_j}\xi_k\\&\quad + J_{ij}\frac{\partial^2 H}{\partial x_k\partial x_j}\xi_k + \xi_0\frac{\partial F_i}{\partial t} + \xi_j\frac{\partial F_i}{\partial x_j}.\end{aligned} \tag{11}$$

再将方程(7)展开,得

$$\begin{aligned}0 &= J_{ij}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial x_j}\xi_0 + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial \xi_0}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_k}\xi_k + \frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\right\}\\&\quad + \xi_0\frac{\partial F_i}{\partial t} + \xi_j\frac{\partial F_i}{\partial x_j}.\end{aligned} \tag{12}$$

将(11),(12)式相减,得

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_i - J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}\dot{\xi}_0 - F_i\dot{\xi}_0 - \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial x_j}\xi_k\\&\quad + J_{ij}\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial \xi_0}{\partial x_j} + J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

于是,有如下结论:对于带附加项的广义 Hamilton 系统的运动微分方程(1),Lie 对称性为 Mei 对称性的充分必要条件是无限小生成元 ξ_0,ξ_i 满足条件(13)式.

4. Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量

将方程(1)改写成如下形式:

$$\dot{x}_i = \alpha_i(t, \boldsymbol{x}), \tag{14}$$

式中

$$\alpha_i = J_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_k} + F_i \qquad (i, k = 1, \cdots, m). \tag{15}$$

取时间不变的特殊无限小变换

$$\begin{aligned}t^* &= t,\\x_i^*(t^*) &= x_i(t) + \varepsilon\xi_i(t, \boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{16}$$

在(16)式的无限小变换下,(14)式的 Lie 对称性确定方程如下:

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\xi_j, \tag{17}$$

式中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{18}$$

如果无限小生成元 ξ_i 满足方程(17),并且存在一个函数 $\mu = \mu(t, \boldsymbol{x})$,使

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0 \tag{19}$$

成立,那么就存在方程(1)的 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu\xi_i) = \mathrm{const}. \tag{20}$$

5. Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量

通过上述讨论可知,对于有附加项的广义 Hamilton 系统,如果 Mei 对称性为 Lie 对称性,便可按第 4 节中论述的利用 Lie 对称性求 Hojman 守恒量的方法,间接求得方程(1)的 Hojman 守恒量.

6. 算 例

判断下述运动微分方程是否存在 Hojman 守恒量:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + kx_2^2,\\\dot{x}_2 &= -x_1 + kx_1x_2,\\\dot{x}_3 &= -4x_1x_2.\end{aligned} \tag{21}$$

方程(21)中 k 为常数. 系统的 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \tag{22}$$

注意到 $J_{ij} = -J_{ji}$，由方程(1)，(21)和(22)可得

$$(J_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2x_2 \\ -1 & 0 & 2x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

方程(21)的附加项为

$$\begin{aligned} F_1 &= kx_2^2, \\ F_2 &= kx_1x_2, \\ F_3 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

由方程(17)得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_1}{\mathrm{d}t} &= \xi_2 + 2kx_2\xi_2, \\ \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_2}{\mathrm{d}t} &= -\xi_1 + kx_2\xi_1 + kx_1\xi_2, \\ \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_3}{\mathrm{d}t} &= -4x_2\xi_1 - 4x_1\xi_2. \end{aligned} \tag{25}$$

(25)式有如下解：

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = 0, \\ \xi_3 &= 1; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = 0, \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2 + x_3)^2. \end{aligned} \tag{27}$$

将(26)，(27)式分别代入 $X^{(0)}(H)$，$X^{(0)}(F_i)$并经运算后得

$$\begin{aligned} X^{(0)}(H) &= \xi_0\frac{\partial H}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \\ X^{(0)}(F_1) &= \xi_0\frac{\partial F_1}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial F_1}{\partial x_i} = 0, \\ X^{(0)}(F_2) &= \xi_0\frac{\partial F_2}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = 0, \\ X^{(0)}(F_3) &= \xi_0\frac{\partial F_3}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial F_3}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

显然，生成元(26)，(27)式满足带附加项的广义 Hamilton 系统 Mei 对称性的判据方程(7). 因此，与其相应的对称性为带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性. 又由于诸无限小生成元是 Lie 对称性确定方程的解，所以 Mei 对称性也是 Lie 对称性的.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(J_{ik}\frac{\partial H}{\partial x_k} + F_i\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(J_{i1}\frac{\partial H}{\partial x_1} + J_{i2}\frac{\partial H}{\partial x_2} + F_2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(J_{i1}x_1 + J_{i2}x_2 + F_2) \\ &= J_{i1}\frac{\partial}{\partial x_i}x_1 + J_{i2}\frac{\partial}{\partial x_i}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_i}F_i \\ &= kx_1. \end{aligned} \tag{29}$$

将(29)式代入(19)式，得

$$kx_1 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0. \tag{30}$$

(30)式的解为

$$\mu = \exp\left(-\int kx_1\mathrm{d}t\right). \tag{31}$$

由于 μ 为(19)式的解，所以方程(21)存在 Hojman 守恒量. 将(27)，(31)式代入(20)式，得

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H}} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\xi_i = \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} \\ &= x_1^2 - x_2^2 + x_3 \\ &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{32}$$

I_{H} 即为所求(21)式的 Hojman 守恒量.

7. 结　论

本文研究了带附加项的广义 Hamilton 系统的 Mei 对称性. 给出了带附加项的广义 Hamilton 系统 Mei 对称性的定义和判据. 讨论了系统 Mei 对称性为 Lie 对称性的充分必要条件. 阐述了在 Mei 对称性为 Lie 对称性情况下，利用 Lie 对称性来间接求得带附加项的广义 Hamilton 系统运动微分方程的 Hojman 守恒量的方法. 推广了广义 Hamilton 系统 Mei 对称性的工作.

感谢梅凤翔教授对本文工作给予悉心指导和帮助.

[1] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F *et al* 1996 *Dynamics of Birkhoff Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发等 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京：北京理工大学出版社)]

[2] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol*. **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]

[3] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin*. **52** 1039 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1039]

[4] Zheng S W, Fu J L, Li X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5511 (in Chinese) [郑世旺、傅景礼、李显辉 2005 物理学报 **54** 5511]
[5] Noether E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **K I** 235
[6] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63
[7] Liu D 1991 *Sci. Chin.* **34** 419
[8] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京: 北京理工大学出版社)]
[9] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]
[10] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京: 科学出版社)]
[11] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
[12] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
[13] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(北京: 科学出版社)]
[14] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973
[15] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]
[16] Mei F X 2000 *Acta Mech.* **141** 135
[17] Zhang Y, Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354
[18] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291
[19] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]
[20] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
[21] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373
[22] Fang J H, Yan X H, Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 156 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]
[23] Wang S Y, Mei F X 2002 *J. Beijing Inst. Technol.* **22** 139 (in Chinese) [王树勇、梅凤翔 2002 北京理工大学学报 **22** 139]
[24] Mei F X 2003 *J. Jiangxi Norm. Univ.* **27** 193
[25] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
[26] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京: 北京理工大学出版社)]

Mei symmetry of generalized Hamilton systems with additional terms*

Jia Li-Qun[1)†] Zheng Shi-Wang[2)]
1) (*College of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China*)
2) (*Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Teachers College, Shangqiu 476000, China*)
(Received 22 November 2005; revised manuscript received 25 April 2006)

Abstract

The definition and the criterion of Mei symmetry of generalized Hamilton systems with additional terms is studied in this paper. A necessary and sufficient condition for Mei symmetry of systems to be Lie symmetry is given. The Hojman conserved quantity for the differential equation of motion of generalized Hamilton system with additional terms being Mei symmetry can be deduced indirectly by Lie symmetry. An example is given to show the application of this result.

Keywords: additional terms, generalized Hamilton system, Mei symmetry, Hojman conserved quantity
PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372053) and 211 Engineering of Southern Yangtze University, China (Grant No. 0002246).
† E-mail: jlq0@sina.com