第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3838-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.8, August, 2006

非完整系统 Chetaev 动力学和 vakonomic 动力学的等价条件*

郭永新[1)†] 赵 [2)] 刘世兴[1)] 王 勇[3)] 朱 娜[1)] 韩晓静[1)]

1)(辽宁大学物理系,沈阳 110036)
2)(沈阳药科大学基础学院,沈阳 110016)
3)(广东医学院基础学院,东莞 523808)
(2006 年 3 月 7 日收到;2006 年 3 月 20 日收到修改稿)

就一般非完整约束系统,从约束方程满足的变分恒等式出发,利用增广位形流形上的向量场定义三类非自由变分,即非完整变分:vakonomic 变分、Hölder 变分、Suslov 变分,并讨论它们之间的关系以及它们成为自由变分的充要条件.利用非完整变分以及相应的积分变分原理建立两类动力学方程:vakonomic 方程和 Routh 方程或 Chaplygin 方程.通过 vakonomic 方程分别与 Routh 方程和 Chaplygin 方程比较,得到它们具有共同解的两类充分必要条件.这些条件并不是约束的可积性条件.

关键词:非完整约束,非完整变分,Chetaev 条件,vakonomic 动力学
PACC:0320

1. 引 言

非完整系统是一类广泛存在于物理学、力学以及工程领域中的动力学系统,这类系统与任何其他动力学系统相比具有一个显著的特点,即它具有两种不等价的动力学模型:Chetaev 模型[1—12]和 vakonomic 模型[13—15].这两个模型中的 vakonomic 模型是完整约束系统自由变分下 Hamilton 作用量原理对非完整约束系统的直接推广;而对于 Chetaev 模型,无论是采用 D'Alembert-Lagrange 原理还是 Hölder 积分变分原理,无论是采用 Suslov 变分还是采用 Hölder 变分,都满足如下三个基本条件:牛顿力学定律、理想约束假设和 Chetaev 条件.第一个条件是物理规律,必须满足.后两个条件对于完整约束系统自然容易满足,而在此处是一种对非完整系统的推广,其中 Chetaev 条件是一种自然的几何条件,它表现了约束所规定的系统状态空间的直和分解,而理想约束假设和直和分解(Chetaev 条件)的结合又进一步确定了约束力的形式[16].

非完整系统两种模型并存这一事实在国内外曾经引起过激烈争议[17,18],这些争议深化了对非完整系统的认识.事实上,这两种动力学不是完全对立的,它们构成了非完整系统的矛盾统一体,对这两种动力学的比较研究已经成为非完整系统动力学的焦点问题之一[19—23].非完整约束系统这两种模型并存的局面恰恰说明,将完整系统的动力学理论推广到非完整系统的方法并不是自然的,也说明非完整约束的实现方式并不是惟一的,"理想约束"和极值原理都仅仅是力图沿用完整约束系统直观认识的一种理想选择.

近十年来,两种动力学模型的对比研究集中表现在三个方面.第一是数值实验[19],对比同一个非完整系统两种动力学模型的数值结果,确定其倾向性.第二是采用几何动力学方法[20—22],研究两种动力学的几何构造,这种方法在给出两者几何关系上是非常深刻和直观的.第三是基于非完整变分法和约束的可积性分析来讨论两种动力学模型的等价性问题[2,17,18,23],这种方法因为它沿用了完整系统的研究方法而最易被理解和接受.有的文献也讨论了非

* 国家自然科学基金(批准号:10472040)、辽宁省优秀青年科研人才培养基金(批准号:3040005)、教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:2004527)、教育部春晖计划(批准号:Z2005-1-21006)和辽宁省教育厅基础研究计划(批准号:05L155)资助的课题.

† E-mail:guoyongxin@lnu.edu.cn

完整系统的两种动力学的不变性和协调性问题[14,17]. 但是，目前采用这个方法对非完整变分运算的理解以及关于两种动力学模型等价性所得到的结论还不够准确. 基于这一考虑，本文在深入讨论非完整变分运算的基础上，研究两种动力学模型具有共同解的充分必要条件，并给出实例加以佐证.

为方便起见，文中采用爱因斯坦求和约定，并对指标取值范围作如下规定：$s, r = 1, 2, \cdots, n$；$i, j, k = 0, 1, \cdots, n$；$\mu, \nu, \sigma = 1, 2, \cdots, m < n$；$\rho, \lambda = 0, 1, \cdots, m$；$\alpha, \beta = m+1, m+2, \cdots, n$.

2. 不可积微分约束下的非完整变分

设力学系统的位形流形是一个 n 维光滑流形 Q，$\{q^s\}$ 是其局部坐标，相应的广义速度表示为 $\{v^s\}$. 该系统的增广位形空间可以用流形 M 或 $R \times Q$ 来表示，而相应的状态空间则可以用 1-射丛 $J_1 M$ 或接触流形 $R \times TQ$ 来表示.

设 c_q 和 $\bar{c}_q$ 为连接 M 上两个固定点 q_1^s 和 q_2^s 的光滑曲线，考虑一个双参数函数 $q^s(t, \alpha) \in C^2$，它满足

$$
\begin{aligned}
q^s(t, 0) &= q^s(t), \\
q^s(t, 1) &= \bar{q}^s(t); \\
q^s(t_1, \alpha) &= q_1^s, \\
q^s(t_2, \alpha) &= q_2^s.
\end{aligned}
$$

我们用如下标记来分别表示沿任意路径的微分和路径的变分：

$$
\mathrm{d}q^s = \partial_t q^s(t, \alpha)\mathrm{d}t \doteq v^s \mathrm{d}t, \tag{1a}
$$

$$
\delta q^s = \partial_\alpha q^s(t, \alpha)\mathrm{d}\alpha \doteq w^s \mathrm{d}\alpha. \tag{1b}
$$

要求变分向量场 $w^s(q^s, t) \in R \times T_q Q$ 满足固定端点条件

$$
\begin{aligned}
\delta q^i \big|_{t_{1,2}} &= 0, \\
w^i \big|_{t_{1,2}} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

假设系统受到 $(n-m)$ 个独立的一阶非完整约束

$$
f^\beta(t, q^s, v^s) = 0, \tag{3}
$$

则该系统的自由度为 $n-m$. 如果用 d_v 和 d_w 表示沿向量场 v 和 w 的导数，则容易验证变分 w^s 和 d_w 满足如下变分恒等式：

$$
d_w f^\beta + \frac{\partial f^\beta}{\partial v^s}(d_v w^s - d_w v^s) - d_v\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s} w^s\right) = [f^\beta]_s w^s, \tag{4}
$$

式中，

$$
[f^\beta]_s = \frac{\partial f^\beta}{\partial q^s} - d_v\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s}\right),
$$

并且要求 $d_v(d\alpha) = 0$. 当约束可积时，下述三个条件可以同时满足：

$$
d_w f^\beta = 0, \tag{5a}
$$

$$
d_w v^s - d_v w^s = 0, \tag{5b}
$$

$$
d_v\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s} w^s\right) = 0. \tag{5c}
$$

此时的变分是自由变分. 条件 5(a) 式表明约束方程沿着变分向量场不变，说明轨道的变轨也满足约束条件；条件(5b)式表示的微分运算与变分运算对易关系定义了对速度的变分，说明在流形 M 上向量场 v 和 w 的积分曲线可形成闭合的坐标网；条件(5c)式表示约束对流形 $J_1 M$ 的直和分解关系[16]沿着运行轨道保持不变，这也是约束对变分的限制条件——Chetaev 条件沿着轨道保持不变的关系.

除特殊情况外，一般的非完整约束系统不能同时满足上述三个条件. 为此，可以定义下述三类非自由变分运算.

(1) vakonomic 变分. 取

$$
\begin{aligned}
d_{w_\mathrm{V}} f^\beta &= 0, \\
d_v w_\mathrm{V}^s - d_{w_\mathrm{V}} v^s &= 0,
\end{aligned} \tag{6}
$$

则变分恒等式变为

$$
d_v\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s} w_\mathrm{V}^s\right) = -[f^\beta]_s w_\mathrm{V}^s. \tag{7}
$$

(2) Hölder 变分. 令

$$
\begin{aligned}
d_v w_\mathrm{H}^s - d_{w_\mathrm{H}} v^s &= 0, \\
\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s} w_\mathrm{H}^s &= 0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

则变分恒等式简化为

$$
d_{w_\mathrm{H}} f^\beta = [f^\beta]_s w_\mathrm{H}^s. \tag{9}
$$

(3) Suslov 变分. 设

$$
\begin{aligned}
d_{w_\mathrm{S}} f^\beta &= 0, \\
\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s} w_\mathrm{S}^s &= 0,
\end{aligned} \tag{10}
$$

则变分恒等式为

$$
\frac{\partial f^\beta}{\partial v^s}(d_v w_\mathrm{S}^s - d_{w_\mathrm{S}} v^s) = [f^\beta]_s w_\mathrm{S}^s. \tag{11}
$$

我们称上述三类非自由变分为非完整变分. 由此可见，三种非完整变分等价的充分必要条件是

$$
[f^\beta]_s w^s = 0. \tag{12}
$$

由于 w^s 不独立，该条件不等价于 $[f^\beta]_s = 0$. 尽管对

于某些可积约束系统，$[f^\beta]_s = 0$ 成立，但是 $[f^\beta]_s = 0$ 既不是约束可积的充分条件，也不是约束可积的必要条件. 关于约束的可积性与非完整变分之间关系将另文研究.

如果采用下述微分约束显示：

$$f^\beta = v^\beta - \varphi^\beta(t, q^s, v^\mu) = 0, \tag{13}$$

变分恒等式(4)变换为

$$d_{\bar{w}}(v^\beta - \varphi^\beta) + d_v \bar{w}^\beta - d_{\bar{w}} v^\beta - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}(d_v \bar{w}^\mu - d_{\bar{w}} v^\mu)$$

$$- d_v\left(\bar{w}^\beta - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}\bar{w}^\mu\right) = -[\varphi^\beta]_\mu \bar{w}^\mu - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial q^\alpha}\bar{w}^\alpha, \tag{14}$$

则条件(5)式相应地变为

$$d_{\bar{w}}(v^\beta - \varphi^\beta) = 0, \tag{15a}$$

$$d_v \bar{w}^\beta - d_{\bar{w}} v^\beta - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}(d_v \bar{w}^\mu - d_{\bar{w}} v^\mu) = 0, \tag{15b}$$

$$d_v\left(\bar{w}^\beta - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}\bar{w}^\mu\right) = 0. \tag{15c}$$

根据变分恒等式(14)，我们可以重新定义以下三类非完整变分.

(1) vakonomic 变分.

$$d_{\bar{w}_{\mathrm{v}}}(v^\beta - \varphi^\beta) = 0, \tag{16a}$$

$$\begin{aligned} &d_v \bar{w}^\beta_{\mathrm{v}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{v}}} v^\beta = 0,\\ &d_v \bar{w}^\mu_{\mathrm{v}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{v}}} v^\mu = 0,\end{aligned} \tag{16b}$$

$$d_v\left(\bar{w}^\beta_{\mathrm{v}} - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}\bar{w}^\mu_{\mathrm{v}}\right) = [\varphi^\beta]_\mu \bar{w}^\mu_{\mathrm{v}} + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial q^\alpha}\bar{w}^\alpha_{\mathrm{v}}. \tag{16c}$$

(2) Hölder 变分.

$$\begin{aligned} &d_v \bar{w}^\beta_{\mathrm{H}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{H}}} v^\beta = 0,\\ &d_v \bar{w}^\mu_{\mathrm{H}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{H}}} v^\mu = 0,\end{aligned} \tag{17a}$$

$$\bar{w}^\beta_{\mathrm{H}} - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}\bar{w}^\mu_{\mathrm{H}} = 0, \tag{17b}$$

$$d_{\bar{w}_{\mathrm{H}}}(v^\beta - \varphi^\beta) = T^\beta_\mu \bar{w}_{\mathrm{H}}, \tag{17c}$$

式中，

$$T^\beta_\mu = -[\varphi^\beta]_\mu - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}.$$

(3) Suslov 变分.

$$d_{\bar{w}_{\mathrm{S}}}(v^\beta - \varphi^\beta) = 0, \tag{18a}$$

$$\bar{w}^\beta_{\mathrm{S}} - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}\bar{w}^\mu_{\mathrm{S}} = 0, \tag{18b}$$

$$d_v \bar{w}^\beta_{\mathrm{S}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{S}}} v^\beta - \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}(d_v \bar{w}^\mu_{\mathrm{S}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{S}}} v^\mu) = T^\beta_\mu \bar{w}^\mu_{\mathrm{S}}. \tag{18c}$$

为了简化(18)式，通常的做法是假设

$$d_{\bar{w}_{\mathrm{S}}} v^\mu - d_v \bar{w}^\mu_{\mathrm{S}} = 0,$$

得到

$$d_v \bar{w}^\beta_{\mathrm{S}} - d_{\bar{w}_{\mathrm{S}}} v^\beta = T^\beta_\mu \bar{w}^\mu_{\mathrm{S}}. \tag{19}$$

可以证明，对于线性约束系统，当约束可积时，这样定义的三类变分等价.

3. Chetaev 模型和 vakonomic 模型

非完整系统的动力学方程通常可以利用 Lagrange 乘子法，从积分变分原理求得. 但采用不同的变分运算、不同的积分变分原理以及不同的乘子法，将得到不同的运动微分方程.

3.1. vakonomic 方程

利用 Lagrange 乘子构造一个复合作用量，

$$\mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2} [L(t, q, v) + \lambda_\alpha f^\alpha(t, q, v)]\,\mathrm{d}t, \tag{20}$$

式中，λ_α 是 Lagrange 乘子，L 是正规 Lagrange 函数. 我们要求这个作用量在 vakonomic 变分下为零，从而得到 vakonomic 方程.

一个任意的变分向量场 d_w 作用到上述作用量 $\mathscr{A}$ 上，并利用了分部积分法和端点条件(2)式，得到

$$d_w \mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left([L]_s + \lambda_\alpha [f^\alpha]_s - d_v \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s}\right)w^s + \left(\frac{\partial L}{\partial v^s} + \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s}\right)(d_w v^s - d_v w^s)\right\}\mathrm{d}t, \tag{21}$$

式中，

$$[L]_s = \frac{\partial L}{\partial q^s} - d_v\left(\frac{\partial L}{\partial v^s}\right),$$

$$[f^\alpha]_s = \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^s} - d_v\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s}\right).$$

对于 vakonomic 变分，$d_{w_{\mathrm{v}}} v^s - d_v w^s_{\mathrm{v}} = 0$. 考虑 w^s_{v} 的独立性，得到 vakonomic 方程

$$[L]_s + \lambda_\alpha [f^\alpha]_s - d_v \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s} = 0. \tag{22}$$

如果采用微分约束显式

$$f^\alpha = v^\beta - \varphi^\alpha(t, q^s, v^\mu) = 0,$$

则

$$\begin{aligned} &[f^\alpha]_\beta = -\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta},\\ &\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^\beta} = \delta^\alpha_\beta,\\ &[f^\alpha]_\mu = -[\varphi^\alpha]_\mu.\end{aligned} \tag{23}$$

此时，vakonomic 方程变为

$$[L]_\beta - \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} - d_v\lambda_\beta = 0, \tag{24a}$$

$$[L]_\mu - \lambda_\alpha [\varphi^\alpha]_\mu + d_v\lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu} = 0. \tag{24b}$$

这组方程显然等价于

$$[L]_\beta - \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} - d_v\lambda_\beta = 0, \tag{25a}$$

$$[L]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}[L]_\alpha + \lambda_\alpha T^\alpha_\mu = 0. \tag{25b}$$

对于嵌入约束的 Lagrange 函数

$$\tilde{L}(t, q^s, \dot{q}^\mu) = L(t, q^s, \dot{q}^\mu, \varphi^\beta(t, q^r, \dot{q}^\nu)),$$

不难验证如下关系：

$$[L]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}[L]_\alpha = [\tilde{L}]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}T^\alpha_\mu, \tag{26}$$

式中，

$$T^\alpha_\mu = -[\varphi^\alpha]_\mu - \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^\mu}.$$

将(26)式代入(25b)式，得到嵌入约束的 vakonomic 方程

$$[L]_\beta - \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q^\beta} - d_v\lambda_\beta = 0, \tag{27a}$$

$$[\tilde{L}]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} + \left(\frac{\partial L}{\partial v^\alpha} + \lambda_\alpha\right)T^\alpha_\mu = 0. \tag{27b}$$

3.2. Chetaev 动力学运动方程

利用 Lagrange 乘子法，考虑 Hölder 变分下的 Hamilton 变分原理

$$\int_{t_2}^{t_1}\left(d_{w_{\rm H}}L + \lambda'_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s}w^s\right)dt = 0, \tag{28}$$

利用端点条件可以得到 Routh 方程

$$[L]_s + \lambda'_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s} = 0. \tag{29}$$

采用微分约束显式

$$f^\alpha = v^\beta - \varphi^\alpha(t, q^s, v^\mu) = 0,$$

则

$$[L]_\beta + \lambda'_\beta = 0, \tag{30a}$$

$$[L]_\mu - \lambda'_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu} = 0. \tag{30b}$$

将两个方程联立，得到

$$[L]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}[L]_\alpha = 0. \tag{31}$$

将(26)式代入(31)式，得到嵌入约束的广义 Chaplygin 方程

$$[\tilde{L}]_\mu + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^\mu}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}T^\alpha_\mu = 0. \tag{32}$$

广义 Chaplygin 方程也可以运用 Suslov 变分，从如下的变分原理导出：

$$d_{\bar{w}_{\rm S}}\mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{d_{\bar{w}_{\rm S}}\tilde{L} + \frac{\partial L}{\partial v^\alpha}T^\alpha_\mu \bar{w}^\mu_{\rm S}\right\}dt = 0. \tag{33}$$

3.3. vakonomic 方程与 Chetaev 动力学方程解的比较

首先，比较方程(29)与(22)．这两个方程一般不等价，即没有共同解，除非满足如下条件：

$$(\lambda'_\alpha + d_v\lambda_\alpha)\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^s} = \lambda_\alpha[f^\alpha]_s. \tag{34}$$

这个条件是两种动力学方程有共同解的充要条件．(34)式与 Hölder 变分或 Suslov 变分缩并，可得

$$\begin{aligned}&\lambda_\alpha[f^\alpha]_s w^s_{\rm H} = 0,\\ &\lambda_\alpha[f^\alpha]_s w^s_{\rm S} = 0.\end{aligned} \tag{35}$$

这个关系式既不是两种动力学方程有共同解的充分条件，也不是三种变分运算等价的充分条件．

另一方面，比较方程(32)与(27b)，可得到嵌入约束情况下两种动力学方程有共同解的充分必要条件

$$\lambda_\alpha T^\alpha_\mu = 0. \tag{36}$$

(36)式也是 Suslov 变分下，非完整系统的 Hamilton 原理为稳定作用量原理的充分必要条件．此结果与文献[2]有所区别．

对于可积微分约束，条件(34)和(36)式显然满足，但它们并不要求约束的可积性，即约束的可积性只是两种动力学方程等价的充分条件，而非必要条件．这个结论可以从仿射微分约束系统得到验证．对于线性约束，

$$\begin{aligned}v^\alpha &= B^\alpha_\sigma(t, q^\mu, q^\beta)v^\sigma + B^\alpha_0(t, q^\mu, q^\beta)\\ &= B^\alpha_\rho(q^\lambda, q^\beta)v^\rho.\end{aligned} \tag{37}$$

条件(36)式变为

$$\lambda_\alpha(B^\alpha_{[\mu,\rho]} + B^\beta_{[\rho}B^\alpha_{\mu],\beta})v^\rho = 0. \tag{38}$$

条件

$$B^\alpha_{[\mu,\rho]} + B^\beta_{[\rho}B^\alpha_{\mu],\beta} = 0 \tag{39}$$

是约束可积的必要条件．因此，当约束可积时，条件(38)式得到满足，两种动力学模型等价，反之不然．

最后应当指出，等价性条件(34)和(36)式并不要求在系统的全状态空间中成立，而是在系统的运动轨线上成立即可，除非系统自然满足可积性或部分可积性条件．

4. 算 例

例 1 圆盘竖直滚动问题. 这是一个典型的 Chaplygin 非完整系统运动问题. 选择如下广义坐标：质心坐标(x, y)，确定圆盘位置的方位角 ψ 以及描述内部的转动角 ϕ.

为简单起见，设圆盘的质量为 1，则其 Lagrange 量为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(I_1\dot{\phi}^2 + I_2\dot{\psi}^2),$$

式中 I_1 和 I_2 代表转动惯量. 圆盘纯滚动时所受到的非完整约束为

$$\dot{x} = (R\cos\psi)\dot{\phi},$$

$$\dot{y} = (R\sin\psi)\dot{\phi},$$

式中 R 为圆盘的半径. 取

$$q^1 = \phi,$$
$$q^2 = \psi,$$
$$q^3 = x,$$
$$q^4 = y,$$

则

$$T_1^3 = -(R\sin\psi)\dot{\psi},$$

$$T_2^3 = (R\sin\psi)\dot{\phi},$$

$$T_1^4 = (R\cos\psi)\dot{\psi},$$

$$T_2^4 = -(R\cos\psi)\dot{\phi},$$

Lagrange 乘子为

$$\lambda_3 = \widetilde{\frac{\partial L}{\partial v^3}} = (R\cos\psi)\dot{\phi},$$

$$\lambda_4 = \widetilde{\frac{\partial L}{\partial v^4}} = (R\sin\psi)\dot{\phi}.$$

将上述两式代入(36)式，容易验证它们满足

$$\lambda_3 T_1^3 + \lambda_4 T_1^4 = 0,$$
$$\lambda_3 T_2^3 + \lambda_4 T_2^4 = 0.$$

因此，做竖直纯滚动圆盘的运动方程的两种动力学模型等价. 分别由两种模型所计算的运动微分方程皆为

$$(R^2 + I_1)\ddot{\phi} = 0,$$

$$I_2\ddot{\psi} = 0.$$

例 2 Appell-Hamel 系统. 这类系统的位形坐标取

$$q_1 = x,$$
$$q_2 = y,$$
$$q_3 = z,$$

Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

系统受到非完整约束为

$$\dot{z} = \frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

系统嵌入约束的 Lagrange 函数为

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

简单计算后可得

$$[L]_x = -m\ddot{x},$$

$$[L]_y = -m\ddot{y},$$

$$[L]_z = -mg - m\ddot{z},$$

$$[\tilde{L}]_x = -m\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x},$$

$$[\tilde{L}]_y = -m\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y},$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial z} = -mg,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{z}} = m\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{x}} = \frac{b}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{y}} = \frac{b}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\frac{\partial\dot{z}}{\partial z} = 0.$$

将这些关系分别代入 Routh 方程、vakonomic 方程、Chaplygin 方程，简化后可得到

$$\ddot{x} = -\frac{abg}{a^2 + b^2}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\ddot{y} = -\frac{abg}{a^2 + b^2}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\ddot{z} = -\frac{gb^2}{a^2 + b^2}.$$

显然，这些方程满足

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = 0.$$

由此可知，在系统的运动轨线上满足

$$T_1^3 = \frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = \frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0,$$

$$T_2^3 = \frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = 0.$$

因此，条件(36)式在系统的运动轨线上得到满足．否则，系统的两种动力学模型就不会有共同的运动方程．

[1] Neimark J，Fufaev N 1972 *Dynamics of Nonholonomic Systems* (*Transactions of Mathematical Monographs* Vol 33)(Providence：American Mathematical Society)

[2] Mei F X，Liu D，Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing：Beijing Institute of Technology Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析动力学(北京:北京理工大学出版社)第 1 页]

[3] Mei F X 2000 *Appl*．*Mech*．*Rev*．**53** 283

[4] Bloch A M，Krishnaprasad P S，Marsden J E *et al* 1996 *Arch*．*Rational Mech*．*Anal*．**136** 21

[5] Cortés J，Martínez S，Ostrowski J P *et al* 2002 *SIAM J*．*Control Optim*．**41** 851

[6] Guo Y X，Shang M，Luo S K *et al* 2001 *Int*．*J*．*Theor*．*Phys*．**40** 1197

[7] Guo Y X，Luo S K，Shang M *et al* 2001 *Rep*．*Math*．*Phys*．**47** 313

[8] Guo Y X，Yu Y，Huang H J 2001 *Chin*．*Phys*．**10** 1

[9] Guo Y X，Jiang L Y，Yu Y 2001 *Chin*．*Phys*．**10** 181

[10] Wang Y，Guo Y X 2005 *Acta Phys*．*Sin*．**54** 5517 (in Chinese) [王 勇、郭永新 2005 物理学报 **54** 5517]

[11] Fu J L，Chen L Q，Chen X W 2006 *Chin*．*Phys*．**15** 8

[12] Zhang Y，Mei F X 2006 *Chin*．*Phys*．**15** 13

[13] Arnold V I，Kozlov V V，Neishtadt A I 1998 *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics* (*Encyclopaedia of Mathematical Science* Vol Ⅲ)(Berlin：Springer-Verlag)

[14] Chen L Q 1994 *J*．*Anshan Institute I*．*S*．*Tech*．**17**(2) 29 (in Chinese) [陈立群 1994 鞍山钢铁学院学报 **17**(2) 29]

[15] Chen L Q 1990 *Chin*．*Sci*．*Bull*．**35** 1836 (in Chinese) [陈立群 1990 科学通报 **35** 1836]

[16] Guo Y X，Luo S K，Mei F X 2004 *Adv*．*Mech*．**34** 477 (in Chinese) [郭永新、罗绍凯、梅凤翔 2004 力学进展 **34** 477]

[17] Chen B 1991 *Acta Mech*．*Sin*．**23** 379 (in Chinese) [陈 滨 1991 力学学报 **23** 379]

[18] Liang L F，2000 *Adv*．*Mech*．**30** 358 (in Chinese) [梁立孚 2000 力学进展 **30** 358]

[19] Lewis A D，Murray R M 1995 *Int*．*J*．*Non-Linear Mech*．**30** 793

[20] Guo Y X，Wang Y，Chee G Y 2005 *J*．*Math*．*Phys*．**46** 062902

[21] Cardin F，Favretti M 1996 *J*．*Geom*．*Phys*．**18** 295

[22] de León M，Marrero J C，de Diego M D 2002 *J*．*Geom*．*Phys*．**35** 126

[23] Zampieri G 2000 *J*．*Diff*．*Eq*．**163** 335

Conditions for Chetaev dynamics to be equivalent to vakonomic dynamics in nonholonomic systems *

Guo Yong-Xin[1)†] Zhao Zhe[2)] Liu Shi-Xing[1)] Wang Yong[3)]
Zhu Na[1)] Han Xiao-Jing[1)]

1) (*Department of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036, *China*)
2) (*Institute of Foundation, Shenyang Pharmaceutical University, Shenyang* 110016, *China*)
3) (*School of Basic Medical Science, Guangdong Medical College, Dongguan* 523808, *China*)

(Received 7 March 2006; revised manuscript received 20 March 2006)

Abstract

For general nonholonomically constrained systems, variation identity is used to define three kinds of unfree variations, i.e., nonholonomic variations: the vakonomic, the Hölder and the Suslov by means of vector fields on the extended configuration manifold. The relations among the three kinds variations are discussed and a necessary and sufficient condition for the variations to become free ones is obtained. The nonholonomic variations and the corresponding integral variational principles are utilized to derive the two kinds of dynamical equations: vakonomic equations and Routh's equations or Chaplygin's equations. By comparing vakonomic equations with Routh's equations and Chaplygin's equations respectively, two necessary and sufficient conditions for the two kinds of equations to have common solutions are obtained, which are not integrable conditions of the constraints.

Keywords: nonholonomic constraints, nonholonomic variations, Chetaev's condition, vakonomic dynamics
PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472040), the Outstanding Young Talents Training Fund of Liaoning Province, China (Grant No. 3040005), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from Ministry of Education of China (Grant No. 2004527), the Chunhui Plan of Ministry of Education of China (Grant No. Z2005-1-21006) and the Basic Research Plan of Education Bureau of Liaoning Province, China (Grant No. 05L155).

† E-mail: guoyongxin@lnu.edu.cn