第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3864-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.8, August, 2006

耦合 Burgers 方程的对称性及对称约化

黄 令

(宁波职业技术学院机电学院，宁波 315800)

(2005 年 10 月 24 日收到；2006 年 3 月 20 日收到修改稿)

对称性分析是自然科学研究中的重要方法之一. 利用对称性分析研究了一个描述两层流体体系的模型即耦合 Burgers 方程的对称性. 利用对称性给出了这个模型的四种对称性约化并给出了这些约化方程的一些特殊的严格解，如有理解、行波孤立子解和非行波孤立子解.

关键词：对称性约化，耦合 Burgers 方程，孤立子

PACC：0340K，0365G，0220

1. 引 言

我们知道，自然界中存在着各种各样的对称性，因此对称性研究是自然科学研究中的最常用也是最有效的方法之一. 特别是在可积体系的研究中，由于可积模型存在无穷多对称，对称性的研究显得尤其重要[1].

单个孤立子模型的研究已经相当完善. 近来耦合的孤立子体系研究得到了人们普遍关注并发现了许多新的现象[2]. 本文中我们将利用对称性方法来研究可积的耦合 Burgers 方程的类似性质.

单个 Burgers 方程

$$q_t + q_{xx} + 2qq_x = 0 \tag{1}$$

是非线性系统中最重要的模型之一. 许许多多实际的非线性现象可以用 Burgers 方程来描述[3—7]. 近来，一些推广的 Burgers 方程已经被提出并得到了深入的研究[8—12].

本文研究 Burgers 方程的下述耦合推广：

$$\begin{aligned} &p_t + p_{xx} + 2pp_x + 2cqq_x = 0, \\ &q_t + q_{xx} + 2(pq)_x = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

显然，当 $q = 0$ 时，上述耦合 Burgers 系统(2)退化到原 Burgers 方程(1).

求解非线性可积系统有很多有效方法，其中最重要的有反散射方法、双线性方法、Bäcklund 和 Darboux 变换方法、多线性分离变量法、对称约化方法、形变映射方法和截断 Painlevé 分析方法[13]等等. 本文中，我们使用对称性约化来得到耦合 Burgers 方程(2).

类似于单个 Burgers 方程(1)，耦合 Burgers 方程(2)也可以被应用到许多物理领域. 例如，该模型可以从二层不可压缩的无黏流体的欧拉方程组中推导出来.

本文用文献[14]给出的李对称方法来研究耦合 Burgers 方程(2)的对称性并利用点李对称来研究耦合 Burgers 方程(2)的对称性约化. 最后讨论一些耦合 Burgers 方程(2)的严格解.

2. 耦合 Burgers 方程(2)的对称

耦合 Burgers 方程(2)的一个对称

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

定义为下述线性方程的解：

$$\begin{aligned} &w_t + w_{xx} + 2(pw)_x + 2c(qz)_x = 0, \\ &z_t + z_{xx} + 2(wq + pz)_x = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

即耦合 Burgers 方程(2)是在变换

$$\begin{aligned} &p \to p + \varepsilon w, \\ &q \to q + \varepsilon z \end{aligned} \tag{5}$$

下形式不变的.

根据文献[14]提出的一般点李对称方法，(4)式的一般点李对称具有下述形式：

$$\begin{aligned} w &= Xp_x + Tp_t + W, \\ z &= Xq_x + Tq_t + Z, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\{X, T, W, Z\}$ 为 $\{x, t, w, z\}$ 的函数.

将方程(6)代入(4)式并利用(2)式消去 p_t 和 q_t，然后取 p 和 q 的不同阶 x 导数的不同幂次的系

数为零，可得到下述决定 $\{X, T, W, Z\}$ 的超定方程组：

$$T_x = T_p = T_q = X_p = X_q = Z_{pp} = Z_{qq} = Z_{pq} = W_{pp} = W_{qq} = W_{pq} = 0, \tag{7}$$

$$Z_t + Z_{xx} + 2qW_x + 2pZ_x = 0, \tag{8}$$

$$W_t + W_{xx} + 2pW_x + 2cqZ_x = 0, \tag{9}$$

$$X_t - 2pT_t + X_{xx} + 2W + 2Z_{xq} - 2cqZ_p + 2pX_x + 2qW_q = 0, \tag{10}$$

$$cq(T_t - Z_q + W_p - X_x) - cZ - W_{xq} = 0, \tag{11}$$

$$q(T_t - X_x - W_p + Z_q) - Z - Z_{xp} = 0, \tag{12}$$

$$T_t = 2X_x, \tag{13}$$

$$X_t + X_{xx} + 2(W + W_{xp} - qW_q - pT_t + cqZ_p) = 0. \tag{14}$$

经过详细的求解可得上述超定方程组的一般结果为

$$X = C_1t^2 + 2C_2t + C_0, \tag{15}$$

$$T = (C_1t + C_2)x + c_1t + c_0, \tag{16}$$

$$W = (C_1t + C_2)p - \frac{1}{2}(C_1x + c_1), \tag{17}$$

$$Z = (C_1t + C_2)q. \tag{18}$$

相应的对称为

$$\sigma = \begin{pmatrix} (C_1t^2 + 2C_2t + C_0)p_x + [(C_1t + C_2)x + c_1t + c_0]p_t + (C_1t + C_2)p - \frac{1}{2}(C_1x + c_1) \\ (C_1t^2 + 2C_2t + C_0)q_x + [(C_1t + C_2)x + c_1t + c_0]q_t + (C_1t + C_2)q \end{pmatrix} \tag{19}$$

这些对称对应于空间平移不变性（$\{C_1 = C_2 = c_1 = c_0 = 0, C_0 \neq 0\}$）、时间平移不变性（$\{C_1 = C_2 = c_1 = C_0 = 0, c_0 \neq 0\}$）、伽利略不变性（$\{C_1 = C_0 = c_1 = c_0 = 0, C_2 \neq 0\}$）、标度不变性（$\{C_1 = C_0 = C_2 = c_0 = 0, c_1 \neq 0\}$）和特殊 Möbious 变换不变性（$\{C_2 = C_0 = c_1 = c_0 = 0, C_1 \neq 0\}$）.

3. 耦合 Burgers 方程(2)的对称性约化

我们知道，一旦一个非线性系统的对称被发现，人们就可以利用这个对称性来求得群不变解. 即可以求得在变换(5)式下的不变解. 显然，要求得在变换(5)式下的不变解必须要求

$$\sigma = 0.$$

对于耦合 Burgers 方程(2)的在点李对称变换下的解即要求同时满足原方程和对称约束方程

$$(C_1t^2 + 2C_2t + C_0)p_x + [(C_1t + C_2)x + c_1t + c_0]p_t + (C_1t + C_2)p - \frac{1}{2}(C_1x + c_1) = 0,$$

$$(C_1t^2 + 2C_2t + C_0)q_x + [(C_1t + C_2)x + c_1t + c_0]q_t + (C_1t + C_2)q = 0. \tag{20}$$

为此，我们需要首先求解方程组(20)，然后将所得结果代入原方程(2)并将其约化为常微分方程.

下面给出四种有意义的情况.

情况 1 $C_1C_0 - C_2^2 \neq 0$. 在此一般情况下，(20)式的一般解为

$$p = \frac{P}{\sqrt{C_1t^2 + 2C_2t + C_0}} + \frac{C_1tx}{2(C_1t^2 + 2C_2t + C_0)} + \frac{(C_1c_0C_2 - 2c_1C_2^2 + C_1C_0c_1)t + C_0(c_0C_1 - c_1C_2)}{2(C_1C_0 - C_2^2)(C_1t^2 + 2C_2t + C_0)},$$

$$q = \frac{Q}{\sqrt{C_1t^2 + 2C_2t + C_0}}, \tag{21}$$

式中 P 和 Q 为 ξ 的函数. 将(21)式代入(2)式即得 P 和 Q 满足的约化方程

$$2P_{\xi\xi} + 2(2P - C_2\xi)P_\xi + 4cQQ_\xi + C_0C_1\xi - 2C_2P = 0, \tag{22}$$

$$Q_{\xi\xi} + 2(PQ)_\xi - C_2\xi Q_\xi - C_2Q = 0. \tag{23}$$

情况 2 $C_1C_0 - C_2^2 = 0$，$C_0C_1C_2 \neq 0$. 在此情况下，(20)式的一般解为

$$p = \frac{P_1}{C_2t + C_0} + \frac{C_2x}{2(C_2t + C_0)} + \frac{C_0(c_0C_2 - c_1C_0)}{2C_2(C_2t + C_0)^2},$$

$$q = \frac{Q_1}{C_2t + C_0},$$

$$\eta = \frac{2x}{C_2t + C_0} + \frac{2c_1C_0}{C_2^2(C_2t + C_0)} + \frac{C_0(c_0C_2 - c_1C_0)}{C_2^2(C_2t + C_0)^2}, \tag{24}$$

式中 P_1 和 Q_1 为 η 的函数. 将(24)式代入(2)式即

得 P_1 和 Q_1 满足的约化方程

$$8C_2P_{1\eta\eta}+4(2P_1-c_1C_0)P_{1\eta}+8cC_2Q_1Q_{1\eta}-C_0C_2(c_0C_2-c_1C_0)=0, \tag{25}$$

$$2C_2Q_{1\eta\eta}+2C_2(P_1Q_1)_\eta+(2C_2P_1-c_1C_0)Q_1=0. \tag{26}$$

情况 3 $C_2=0$，$C_1=0$. 在此情况下，(20)式的一般解为

$$p=P_2+\frac{c_1t+c_0}{2C_0},\quad q=Q_2,\quad \zeta=x-\frac{c_1t^2+2c_0t}{2C_0}, \tag{27}$$

式中 P_2 和 Q_2 为 ζ 的函数. 将(27)式代入(2)式即得 P_2 和 Q_2 的约化方程

$$2C_0P_{2\zeta\zeta}+4C_0P_2P_{2\zeta}+4cC_0Q_2Q_{2\zeta}+c_1=0, \tag{28}$$

$$Q_{2\zeta\zeta}+2(P_2Q_2)_\zeta=0. \tag{29}$$

当 $c_1=0$ 时，这种情况即为行波约化.

情况 4 $C_0=C_2=0$. 在此情况下，(20)式的一般解为

$$p=\frac{P_3}{t}+\frac{C_1xt+c_1t+c_0}{2C_1t^2},\quad q=\frac{Q_3}{t},\quad \tau=\frac{x}{t}+\frac{c_1}{C_1t}+\frac{c_0}{2C_1t^2}, \tag{30}$$

式中 P_3 和 Q_3 为 τ 的函数. 将(30)式代入(2)式即得 P_3 和 Q_3 的约化方程

$$2C_1P_{3\tau\tau}+4C_1P_3P_{3\tau}+4cC_1Q_3Q_{3\tau}-c_0=0, \tag{31}$$

$$Q_{3\tau\tau}+2(P_3Q_3)_\tau=0. \tag{32}$$

4. 约化方程的严格解

我们已经利用得到的对称性将偏微分方程约化到了常微分方程，然而要求解这些常微分方程还是相当困难的. 下面我们首先将方程组简化到单个方程，然后给出一些特殊的解.

对于第一种约化方程组，(23)式的一般解为

$$P=\frac{1}{2Q}(c_2+C_2\xi Q-Q_\xi). \tag{33}$$

将(33)式代入(22)式并积分一次可得到关于 Q 的约化方程

$$2QQ_{\xi\xi}-3Q_\xi^2+4c_2Q_\xi-4cQ^4+(C_2^2-C_0C_1)(c_3+\xi^2)Q^2-c_2^2=0. \tag{34}$$

(33)和(34)式中的 c_2 和 c_3 为任意积分常数.

非线性常微分方程(34)的一般解尚无法用一般的积分给出. 这里仅给出一个特殊的有理函数解

$$Q(\xi)=\frac{c_2c_3\xi}{c_3+6\xi^2},\quad c_3^2=\frac{36}{C_2^2-C_0C_1},\quad c_2^2=\frac{36}{c_3^2c}. \tag{35}$$

相应地

$$P(\xi)=\frac{\xi(18c_3+c_3^2C_2+6(6+c_3C_2)\xi^2)}{2c_3(c_3+6\xi^2)},\quad \xi=\frac{36x+c_3^2[(c_0C_1-c_1C_2)t+c_0C_2-c_1C_0]}{36\sqrt{C_1t^2+2C_2t+C_0}}. \tag{36}$$

对于第二种情况下的约化方程组(26)和(25)，可进一步简化为

$$P_1=-\frac{Q_{1\eta}}{Q_1}+\frac{c_2}{Q_1}+\frac{c_1C_0}{2C_2}, \tag{37}$$

$$8Q_1Q_{1\eta\eta}-12Q_{1\eta}^2+16c_2Q_{1\eta}-4cQ_1^4+[C_0(c_0C_2-c_1C_0)\eta+c_3]Q^2-4c_2^2=0, \tag{38}$$

式中 c_2 和 c_3 为任意积分常数.

当取 $c_2=0$ 和 $c_1=\dfrac{c_0C_2}{C_0}$时，(38)式的解为非行波孤立子解

$$Q_1(\eta)=-c_4c_3\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{c_3}\eta}{2}}\left[c_3(c_5^2-4c)+4c_4c_5\sqrt{c_3}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{c_3}\eta}{2}}+4c_4^2\mathrm{e}^{-\sqrt{c_3}\eta}\right]^{-1},\quad \eta=\frac{2(C_2x+c_0)}{(C_2t+C_0)}. \tag{39}$$

从而，$P_1(\eta)$具有非行波扭结型孤立子结构，

$$P_1(\eta)=\left[4c_4c_0c_5\sqrt{c_3}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{c_3}\eta}{2}}+c_3(\sqrt{c_3}+c_0)(c_5^2-4c)+4c_4^2(c_0-\sqrt{c_3})\mathrm{e}^{-\sqrt{c_3}\eta}\right]\left[c_3(c_5^2-4c)+4c_4c_5\sqrt{c_3}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{c_3}\eta}{2}}+4c_4^2\mathrm{e}^{-\sqrt{c_3}\eta}\right]^{-1}, \tag{40}$$

式中 c_4 和 c_5 为任意积分常数.

对于第三种情况下的约化方程组(29)和(28)，

其简化形式为

$$P_2 = -\frac{Q_{2\zeta}}{2Q_2} + \frac{c_2}{Q_2}, \tag{41}$$

$$C_0(2Q_2Q_{2\zeta\zeta} - 3Q_{2\zeta}^2 + 8c_2Q_{2\zeta} - 4cQ_2^4 - 4c_2^2) + (c_3 - 2c_1\zeta)Q^2 = 0, \tag{42}$$

式中 c_2 和 c_3 为任意积分常数.

类似地，当取 $c_2=0$ 和 $c_1=0$ 时，(42)式的解是以 $\zeta = x - \frac{c_0}{C_0}t$ 为自变量的行波孤立子解

$$Q_2(\zeta) = -c_4c_3\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{c_3}\zeta}{2\sqrt{C_0}}}\left[c_5^2 - 16cc_3 + 2c_4c_5\sqrt{C_0}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{c_3}{C_0}}\zeta} + C_0c_4^2\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{c_3}{C_0}}\zeta}\right]^{-1}. \tag{43}$$

而 $P_2(\zeta)$ 具有扭结型行波孤立子结构，

$$P_2(\zeta) = \sqrt{c_3}\left(c_5^2 - 16cc_3 - c_4^2C_0\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{c_3}\zeta}{2\sqrt{C_0}}}\right) \times\left[\sqrt{C_0}\left(c_5^2 - 16cc_3 + 2c_4c_5\sqrt{C_0}\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{c_3}{C_0}}\zeta} + C_0c_4^2\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{c_3}{C_0}}\zeta}\right)\right]^{-1}, \tag{44}$$

式中 c_4 和 c_5 为任意积分常数.

第四种情况下的约化方程组(32)和(31)的简化形式为

$$P_3 = -\frac{Q_{3\tau}}{2Q_3} + \frac{c_2}{Q_2}, \tag{45}$$

$$C_1(2Q_2Q_{3\tau\tau} - 3Q_{3\tau}^2 + 8c_2Q_{3\tau} - 4cQ_3^4 - 4c_2^2) + (c_3 - 2c_1\tau)Q^2 = 0, \tag{46}$$

式中 c_2 和 c_3 为任意积分常数.

类似地，当取 $c_2=0$ 和 $c_0=0$ 时，(46)式的解为与(43)式等价的行波孤立子解.

5. 结　　论

本文用文献[14]提出的李对称方法研究了一个新的耦合 Burgers 方程的对称性，然后利用求变换不变解的思想引入附加约束方程. 利用同时求解约束方程和原耦合 Burgers 方程，得到了四种常微分方程的约化. 从而使得偏微分方程的变换不变解可以由求解这些常微分方程的解来得到. 将约化方程进一步简化后，在一些特殊的常数选择下给出了一些严格解包括有理函数解、行波孤立子解和非行波孤立子解.

有关这些严格解的性质和可能应用有待于进一步研究.

感谢楼森岳教授的指导和讨论.

[1] Lou S Y，Ma H C 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** L129
Ma H C，Lou S Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 1495
[2] Lou S Y 1999 *J. Phys. A* **32** 4521
[3] Denisova N V，Kozlov V V 2002 *PMM－J. Appl. Math Mech.* **66** 897
[4] Thoo J B，Hunter J K 2003 *Wave Motion* **37** 381
[5] Gamba A，Ambrosi D，Coniglio A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 118101
[6] Xu C Z，Zhang J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2407 (in Chinese) [徐昌智、张解放 2004 物理学报 **53** 2407]
[7] Lian Z J，Chen L L，Lou S Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 1486
[8] Svinolupov S I 1989 *Phys. Lett.* A **135** 32
[9] Mikhailov A V，Shabat A B，Sokolov V V 1990 *What is Integrability*? (Berlin: Springer) pp115—184
[10] Tang X Y，Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 335
[11] Zhou K H，Tian C，Tian Y B 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 409
[12] Foursov M V 2000 *Phys. Lett.* A **272** 57
[13] Weiss J，Tabor M，Carnevale G 1983 *J. Math. Phys.* **24** 522
[14] Lou S Y 2000 *J. Math. Phys.* **41** 6509

Symmetries and symmetry reductions of the coupled Burgers equation

Huang Ling

(*Faculty of Mechanic Engineering and Electronics*, *Ningbo Polytechnic*, *Ningbo* 315800, *China*)

(Received 24 October 2005; revised manuscript received 20 March 2006)

Abstract

Symmetry analysis is an important method used in almost all fields of natural science. In this paper, by means of the symmetry analysis, a new model, namely the coupled Burgers equations, which can be used to describe two-layer fluids is studied in detail. The Lie point symmetries of the model are obtained. By using the symmetries, four types of symmetry reductions are found. Some special types of exact solutions such as the rational solutions, travelling soliton solutions and non-travelling soliton solutions are explicitly given by solving the reduction equations.

Keywords: symmetry reductions, coupled Burgers equation, solitons

PACC: 0340K, 0365G, 0220