第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3885-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.8,August,2006

非线性薛定谔模型边界场算子的形式因子*

王延申 严学文

(西安交通大学应用物理系,西安 710049)

(2006 年 1 月 23 日收到;2006 年 2 月 24 日收到修改稿)

讨论了可积开边界条件下的非线性薛定谔模型,给出了其贝特本征态的内积和模长.在此基础上得到了边界场算子的形式因子.这些结果均被表达成由谱参量的函数所构成的行列式.

关键词:可积模型,形式因子,反散射

PACC:0370,1110L,1130N

1. 引 言

近年来,具有相互作用的玻色系统被广泛关注,其主要原因是实验上对玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的观测[1,2]以及由此而引起的原子激光领域的研究[3,4].这些实验所处理的系统都可以归结为具有相互作用的玻色子系统.在分子场理论框架下,BEC 可以转化为一维非线性薛定谔方程.许多方法被用来寻找各种非线性薛定谔方程的严格解[5—8],这些严格解对深入了解 BEC 的行为非常重要,例如在研究 BEC 波包的干涉以及在排斥势中随时间变化的原子间相互作用的 BEC 的亮孤子的动力学等等[9,10].目前对这类系统的研究主要是在周期性边界条件下,为了探索这类系统更加丰富的行为,有必要在不同于周期边界条件下来研究玻色子模型.

在量子可积系统的研究中,系统能谱和关联函数的计算是两个重要而引起大家广泛关注的问题.利用量子反散射方法(QISM),许多可积模型的谱和本征态可被系统地构造出来[11,12].但是,除了少数在自由费米点的模型以及处理临界现象或无质量情形的共形场,对许多可积模型而言,物理算子的关联函数的计算依然是一个复杂的问题.在 QISM 中,精确计算关联函数的一个有效途径是分析贝特本征态的解析结构,特别是局域算子在贝特本征态上的作用规律以及贝特本征态的内积和模长[12—14].

在周期性边界条件下,许多模型的贝特本征态的内积和模长可以被精确表达成谱参量函数所构成的行列式[12].行列式形式的优点是它有助于人们得到关联函数所满足的非线性微分方程,并进而研究其渐进行为.在可积开边界条件下,利用可因式化 F 算子,$XXZ-\frac{1}{2}$ 自旋链模型的贝特态的标量积和模,依然可被表示成用谱参量函数所构成的行列式[15].本文针对可积开边界条件下的非线性薛定谔模型(NLS 模型),通过分析 NLS 模型和 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型的联系,我们将推导出贝特本征态的标积和模以及边界处的局域场算子的形式因子.

2. NLS 模型

周期性边界条件下 NLS 模型的哈密顿函数为

$$H=\int_0^l \mathrm{d}x\left[\partial_x\psi^+\partial_x\psi+c\psi^+\psi^+\psi\psi\right], \tag{1}$$

式中,$\psi^+(x)$和 $\psi(x)$是厄米共轭的玻色算子,满足正则对易关系

$$\begin{aligned}&[\psi^+(x),\psi(y)]=\delta(x-y),\\&[\psi^+(x),\psi^+(y)]=[\psi(x),\psi(y)]=0.\end{aligned} \tag{2}$$

为了运用 QISM,可定义如下单值矩阵:

$$\begin{aligned}T(\lambda)&=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}L(n|\lambda)\\&=\lim_{N\to\infty}L(N|\lambda)\cdots L(2|\lambda)L(1|\lambda).\end{aligned} \tag{3}$$

(3)式中的 $L(n|\lambda)$是无限小间隔的量子 L 算子,

---

* 国家自然科学基金(批准号:10375045)资助的课题.

$$L(n|\lambda)=\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\dfrac{\lambda\Delta}{2} & -\mathrm{i}\sqrt{c}\psi_n^{+}\Delta\\ \mathrm{i}\sqrt{c}\psi_n\Delta & 1+\mathrm{i}\dfrac{\lambda\Delta}{2}\end{pmatrix}+O(\Delta^2).\tag{4}$$

这里，Δ 是无限小间隔参量，$l=N\Delta$，离散化的算子 ψ_n 定义为

$$\psi_n=\frac{1}{\Delta}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\psi(x)\,\mathrm{d}x.\tag{5}$$

由(4)式可知，$T(\lambda)$在辅助空间可写为 2×2 矩阵形式

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix}.\tag{6}$$

正则对易关系(2)式决定了单值矩阵(6)式中各矩阵元之间的对易关系，这些对易关系可由 Yang-Baxter 关系来描述，

$$R(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu)=T_2(\mu)T_1(\lambda)R(\lambda,\mu),\tag{7}$$

式中 R 是一数值矩阵，对于 NLS 模型，

$$R(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}\lambda-\mu-\mathrm{i}c & & & \\ & \lambda-\mu & -\mathrm{i}c & \\ & -\mathrm{i}c & \lambda-\mu & \\ & & & \lambda-\mu-\mathrm{i}c\end{pmatrix}.\tag{8}$$

这样的 R 矩阵是有理型的. 关系式(7)，(8)也适用于一些其他模型，例如 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型. 因此，虽然 NLS 模型和 XXX 模型的量子空间截然不同，但是作用在其上的算子的对易关系却是相同的.

赝真空态 $|0\rangle$ 及其对偶态 $\langle0|$ 可分别定义为算子 ψ 和 ψ^{+} 的 Fock 真空态，

$$\begin{aligned}\psi|0\rangle&=0,\\ \langle0|\psi^{+}&=0.\end{aligned}\tag{9}$$

可以验证 $|0\rangle$ 和 $\langle0|$ 是算子 $A(\lambda)$，$D(\lambda)$的本征态，

$$\begin{aligned}A(\lambda)|0\rangle&=a_N(\lambda)|0\rangle,\\ \langle0|A(\lambda)&=\langle0|a_N(\lambda),\\ D(\lambda)|0\rangle&=d_N(\lambda)|0\rangle,\\ \langle0|D(\lambda)&=\langle0|d_N(\lambda),\\ B(\lambda)|0\rangle&\neq0,\\ \langle0|B(\lambda)&=0,\\ C(\lambda)|0\rangle&=0,\\ \langle0|C(\lambda)&\neq0,\\ a_N(\lambda)&=d_N(-\lambda)\\ &=\lim_{N\to\infty}\left(1-\mathrm{i}\frac{\lambda\Delta}{2}\right)^N\\ &=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\lambda l}{2}\right).\end{aligned}\tag{10}$$

由(3)，(4)式的定义，可知有下列共轭关系：

$$\begin{aligned}A^{+}(\lambda)&=D(\lambda^{*}),\\ B^{+}(\lambda)&=C(\lambda^{*}).\end{aligned}\tag{11}$$

在可积开边界条件下，为保证其可积性，单值矩阵被定义为[16]

$$\begin{aligned}U^{\mathrm{t}}(\lambda)&=T^{\mathrm{t}}\left(\lambda+\frac{\mathrm{i}c}{2}\right)K_{+}^{\mathrm{t}}(\lambda)\sigma_yT\left(-\lambda+\frac{\mathrm{i}c}{2}\right)\sigma_y\\ &=\begin{pmatrix}\mathscr{A}(\lambda) & \mathscr{C}(\lambda)\\ \mathscr{B}(\lambda) & \mathscr{D}(\lambda)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{12}$$

数值矩阵 $K_{\pm}(\lambda)$称为反射矩阵，由边界 Yang-Baxter 关系确定，

$$\begin{aligned}&R_{12}(-\lambda_1+\lambda_2)K_{+}^{\mathrm{t}_1}(\lambda_1)R_{12}(-\lambda_1-\lambda_2+\mathrm{i}c)K_{+}^{\mathrm{t}_2}(\lambda_2)\\ &=K_{+}^{\mathrm{t}_2}(\lambda_2)R_{12}(-\lambda_1-\lambda_2+\mathrm{i}c)\\ &\quad\times K_{+}^{\mathrm{t}_1}(\lambda_1)R_{12}(-\lambda_1-\lambda_2),\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&R_{12}(\lambda_1-\lambda_2)K_{-}^{1}(\lambda_1)R_{12}(\lambda_1+\lambda_2+\mathrm{i}c)K_{-}^{2}(\lambda_2)\\ &=K_{-}^{2}(\lambda_2)R_{12}(\lambda_1+\lambda_2+\mathrm{i}c)K_{-}^{1}(\lambda_1)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2).\end{aligned}\tag{14}$$

对 NLS 模型，$K_{\pm}(\lambda_\alpha)$的一个对角解为

$$K_{\pm}(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda\mp\dfrac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_{\pm} & 0\\ 0 & -\lambda\pm\dfrac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_{\pm}\end{pmatrix},\tag{15}$$

式中 $\zeta_{\pm}$ 分别是左右边界的边界参量. 把 T 的表达式(6)代入(12)式可知，可积开边界条件下的算子与周期边界条件下的算子有如下关系：

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\lambda)&=\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_{+}\right)A(\lambda)D(-\lambda)\\ &\quad+\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}-\mathrm{i}\zeta_{+}\right)C(\lambda)B(-\lambda),\\ \mathscr{B}(\lambda)&=\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_{+}\right)B(\lambda)D(-\lambda)\\ &\quad+\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}-\mathrm{i}\zeta_{+}\right)D(\lambda)B(-\lambda),\\ \mathscr{C}(\lambda)&=-\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_{+}\right)A(\lambda)C(-\lambda)\\ &\quad-\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}-\mathrm{i}\zeta_{+}\right)C(\lambda)A(-\lambda),\\ \mathscr{D}(\lambda)&=-\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_{+}\right)B(\lambda)C(-\lambda)\\ &\quad-\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}-\mathrm{i}\zeta_{+}\right)D(\lambda)A(-\lambda).\end{aligned}\tag{16}$$

由(7)和(13)式，可证明单值矩阵 $U(\lambda_\alpha)$ 如同反射矩阵 $K_+(\lambda)$ 满足同样的边界 Yang-Baxter 关系(13)式．矩阵元 $\mathscr{A}(\lambda)$，$\mathscr{B}(\lambda)$，$\mathscr{C}(\lambda)$ 和 $\mathscr{D}(\lambda)$ 之间的对易关系可由边界 Yang-Baxter 关系(13)式导出，例如，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\lambda_1)\mathscr{B}(\lambda_2) &= \mathscr{B}(\lambda_2)\mathscr{B}(\lambda_1),\\
\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1)\mathscr{B}(\lambda_2) &= \frac{(\lambda_1+\mathrm{i}c)^2-\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\mathscr{B}(\lambda_2)\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_1)\\
&\quad -\frac{\mathrm{i}c(2\lambda_1+\mathrm{i}c)}{2\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\mathscr{B}(\lambda_1)\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_2)\\
&\quad +\frac{\mathrm{i}c(2\lambda_1+\mathrm{i}c)(2\lambda_2-\mathrm{i}c)}{2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}\\
&\quad \times\mathscr{B}(\lambda_1)\mathscr{D}(\lambda_2),\\
\mathscr{D}(\lambda_1)\mathscr{B}(\lambda_2) &= \frac{(\lambda_1-\mathrm{i}c)^2-\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\mathscr{B}(\lambda_2)\mathscr{D}(\lambda_1)\\
&\quad +\frac{\mathrm{i}c(2\lambda_2-\mathrm{i}c)}{2\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\mathscr{B}(\lambda_1)\mathscr{D}(\lambda_2)\\
&\quad -\frac{\mathrm{i}c}{2\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}\mathscr{B}(\lambda_1)\tilde{\mathscr{A}}(\lambda_2).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

为了形式上的对称，(17)式中用 $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda)=2\lambda\mathscr{A}(\lambda)-\mathrm{i}c\mathscr{D}(\lambda)$ 代替 $\mathscr{A}(\lambda)$．(10)式中定义的 $|0\rangle$ 依然是算子 $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda)$，$\mathscr{D}(\lambda)$ 的本征态，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{A}}(\lambda)|0\rangle &= \alpha(\lambda)|0\rangle,\\
\langle 0|\tilde{\mathscr{A}}(\lambda) &= \langle 0|\alpha(\lambda),\\
\mathscr{D}(\lambda)|0\rangle &= \delta(\lambda)|0\rangle,\\
\langle 0|\mathscr{D}(\lambda) &= \langle 0|\delta(\lambda),\\
\mathscr{B}(\lambda)|0\rangle &\neq 0,\\
\langle 0|\mathscr{B}(\lambda) &= 0,\\
\mathscr{C}(\lambda)|0\rangle &= 0,\\
\langle 0|\mathscr{C}(\lambda) &\neq 0,\\
\alpha(\lambda) &= (2\lambda-\mathrm{i}c)\left(\lambda+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_+\right)\\
&\quad\times\exp(-\mathrm{i}\lambda l),\\
\delta(\lambda) &= -\left(\lambda-\frac{\mathrm{i}c}{2}-\mathrm{i}\zeta_+\right)\exp(\mathrm{i}\lambda l).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

在 QISM 中，开边界条件时的转移矩阵定义为

$$\tau(\lambda) = \mathrm{tr}_0\, U(\lambda)K_-(\lambda). \tag{19}$$

具体可写为

$$
\begin{aligned}
\tau(\lambda) &= \left(\lambda+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\xi_-\right)\mathscr{A}(\lambda)\\
&\quad -\left(\lambda+\frac{\mathrm{i}c}{2}-\mathrm{i}\xi_-\right)\mathscr{D}(\lambda).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

可积开边界条件下 NLS 模型的哈密顿函数可由(20)式对 λ 展开的系数得到

$$
\begin{aligned}
H &= \int_0^L[\partial_x\psi^+\partial_x\psi+c\psi^+\psi^+\psi\psi]\mathrm{d}x\\
&\quad +\zeta_+\psi^+\psi(L)+\zeta_-\psi^+\psi(0),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$\psi^+\psi(L)$，$\psi^+\psi(0)$ 分别代表左边界和右边界处的反射势．系统的共同本征态可由 $\mathscr{B}(\lambda_\alpha)$（或 $\mathscr{C}(\lambda_\alpha)$）产生

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1,\cdots,\lambda_M\rangle &= \prod_{\alpha=1}^{M}\mathscr{B}(\lambda_\alpha)|0\rangle,\\
\langle\lambda_1,\cdots,\lambda_M| &= \langle 0|\prod_{\alpha=1}^{M}\mathscr{C}(\lambda_\alpha).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

作为本征态，(22)式中的谱参量 $\{\lambda_\alpha\}$ 必须满足 Bethe Ansatz 方程(BAE)，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(-\lambda_\alpha+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_-\right)\left(-\lambda_\alpha+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_+\right)}{\left(\lambda_\alpha+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_-\right)\left(\lambda_\alpha+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_+\right)}\exp(-4\mathrm{i}\lambda_\alpha l)\\
&= \prod_{\beta=1,\neq\alpha}^{M}\frac{[(\lambda_\alpha+\mathrm{i}c)^2-\lambda_\beta^2]}{[(\lambda_\alpha-\mathrm{i}c)^2-\lambda_\beta^2]}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

转移矩阵作用在这些本征态上的本征值为 Λ，

$$
\begin{aligned}
\tau(\mu)|\lambda_1,\cdots,\lambda_M\rangle &= \Lambda(\mu,\{\lambda_\alpha\})|\lambda_1,\cdots,\lambda_M\rangle,\\
\langle\lambda_1,\cdots,\lambda_M|\tau(\mu) &= \langle\lambda_1,\cdots,\lambda_M|\Lambda(\mu,\{\lambda_\alpha\}),\\
\Lambda(\mu,\{\lambda_\alpha\}) &= \sum_{\epsilon=\pm}\frac{2\epsilon\mu-\mathrm{i}c}{2\epsilon\mu}\left(\epsilon\mu+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_-\right)\\
&\quad\times\left(\epsilon\mu+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_+\right)\exp(2\epsilon\mathrm{i}\mu l)\\
&\quad\times\prod_{\alpha=1}^{M}\frac{[(\epsilon\mu+\mathrm{i}c)^2-\lambda_\alpha^2]}{(\mu^2-\lambda_\alpha^2)}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

因为态 $|\lambda_1,\cdots,\lambda_M\rangle$ 和 $\langle\lambda_1,\cdots,\lambda_M|$ 的特性相似，可引进如下的厄米共轭关系，$\langle 0|=|0\rangle^+$．由(11)，(16)式可知，开边界条件下的算子有下列共轭关系：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}^+(\lambda) &= \mathscr{C}(-\lambda^*),\\
\tilde{\mathscr{A}}^+(\lambda) &= \tilde{\mathscr{A}}(-\lambda^*),\\
\mathscr{D}^+(\lambda) &= -\mathscr{D}(-\lambda^*).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

这样，若谱参量为纯虚数，则基矢的模方

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{M}\mathscr{C}(\lambda_j)\prod_{i=1}^{M}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle$$

就成为实数．

3．贝特本征态的标积和模

由于 NLS 模型和 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型具有相

同的 R 矩阵,因此这两个模型中的贝特本征态产生算子具有相同的交换关系. 在开边界条件下,我们将由 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型贝特本征态的标积和模推导出 NLS 模型的贝特本征态的标积和模. 首先给出 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型的一些基本性质. 对该模型,在周期性边界条件下的单值矩阵依然可写为(6)式. 其矩阵元之间的对易关系与 NLS 模型一样,由(7),(8)式确定. 不同之处在于 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型的赝真空态是所有自旋向上(或向下)的铁磁态,因此这两个模型的量子态空间不同. A 和 D 算子作用在赝真空态上的本征值分别为

$$\begin{aligned} A(\lambda)|0\rangle &= a_X(\lambda)|0\rangle, \\ D(\lambda)|0\rangle &= d_X(\lambda)|0\rangle. \end{aligned} \tag{26}$$

在可积开边界条件下,单值矩阵亦如(12)式所定义. 其矩阵元之间的对易关系与(17)式相同. 系统的共同本征态由 $\mathscr{B}(\lambda)$(或 $\mathscr{C}(\lambda)$)产生,如(22)式. 在文献[15]中,利用可因式化 F 算子,$XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型的贝特本征态的标积可被直接计算出来,

$$\begin{aligned} &\langle 0|\prod_{\alpha=1}^{n}\mathscr{C}(u_\alpha)\prod_{i=1}^{n}\mathscr{B}(v_i)|0\rangle \\ &=\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{(2v_j+\eta)}{2v_j}\right]\left\{\prod_{\alpha=1}^{n}(2u_\alpha+\eta)\right. \\ &\quad\times\left[\frac{u_\alpha^2-\left(\frac{1}{2}\eta-\zeta_+\right)^2}{u_\alpha^2-\left(\frac{1}{2}\eta-\zeta_-\right)^2}\right. \\ &\quad\left.\left.\times a_X(u_\alpha)a_X(-u_\alpha)d_X(u_\alpha)d_X(-u_\alpha)\right]^{1/2}\right\} \\ &\quad\times\frac{1}{\prod_{\alpha>\beta}(u_\alpha^2-u_\beta^2)\prod_{i<j}(v_i^2-v_j^2)}\det\mathscr{H}_{\alpha i}^X. \end{aligned} \tag{27}$$

$n\times n$ 矩阵 $\mathscr{H}^X$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{\alpha j}^X &=\frac{\eta}{(u_\alpha^2-v_j^2)}\sum_{\epsilon=\pm}\left\{\epsilon\left(\epsilon v_j-\frac{1}{2}\eta+\zeta_+\right)\right. \\ &\quad\times\left(\epsilon v_j-\frac{1}{2}\eta+\zeta_-\right)a_X(\epsilon v_j)d_X(-\epsilon v_j) \\ &\quad\left.\times\prod_{\beta=1,\neq\alpha}^{n}[u_\beta^2-(\epsilon v_j-\eta)^2]\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

(28)式中要求 $\{u_\alpha\}$ 是 BAE 的解,$\{v_i\}_m$ 是一组任意参量. 需要强调的是,对于 $XXX-\frac{1}{2}$ 自旋链模型,(27)式仅仅依赖于:(1)算子 $\mathscr{A}(\lambda)$,$\mathscr{B}(\lambda)$,$\mathscr{C}(\lambda)$ 和 $\mathscr{D}(\lambda)$ 之间的对易关系. 这些关系完全被边界 Yang-Baxter 关系(13)式所确定,亦即由数值矩阵 R 和 $K_\pm$ 所决定. (2)量子算子 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 和 $\boldsymbol{D}(\lambda)$ 作用在赝真空态 $|0\rangle$ 上的本征值. 这些本征值最终由 R 和 $K_\pm$ 的矩阵元以及周期边界条件下算子 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 和 $\boldsymbol{D}(\lambda)$ 在赝真空态上的本征值所决定.

因为 NLS 模型和 XXX 自旋链模型具有相同的 R 矩阵和 $K_\pm$ 矩阵,所以 NLS 模型中贝特本征态的标积和模具有与(27)式相似的结果,差别仅仅在于这两个模型中量子算子 A 和 D 作用在相应的赝真空态上时具有不同的本征值. 由此,我们可以把(27)式中的 a_X,d_X 替换为(10)式中的 a_N,d_N,并作参量代换

$$\begin{aligned} \eta &\to \mathrm{i}c, \\ \zeta_+ &\to \mathrm{i}\zeta_+, \end{aligned}$$

即可得到 NLS 模型中贝特本征态的标积,

$$\begin{aligned} &\langle 0|\prod_{\alpha=1}^{n}\mathscr{C}(\mu_\alpha)\prod_{i=1}^{n}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle \\ &=\left\{\prod_{\alpha=1}^{n}(2\mu_\alpha-\mathrm{i}c)\left[\frac{\mu_\alpha^2+\left(\frac{c}{2}+\zeta_+\right)^2}{\mu_\alpha^2+\left(\frac{c}{2}+\zeta_-\right)^2}\right]^{1/2}\right\} \\ &\quad\times\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{(2\lambda_j-\mathrm{i}c)}{2\lambda_j}\right] \\ &\quad\times\frac{1}{\prod_{\alpha>\beta}(\mu_\alpha-\mu_\beta)\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)}\det\mathscr{H}_{\alpha i}. \end{aligned} \tag{29}$$

$n\times n$ 矩阵 $\mathscr{H}$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{\alpha j} &=\frac{-\mathrm{i}c}{(\mu_\alpha^2-\lambda_j^2)}\sum_{\epsilon=\pm}\left\{\epsilon\left(\epsilon\lambda_j+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_+\right)\right. \\ &\quad\times\left(\epsilon\lambda_j+\frac{\mathrm{i}c}{2}+\mathrm{i}\zeta_-\right)\exp(-\mathrm{i}\epsilon\lambda_j l) \\ &\quad\left.\times\prod_{\beta=1,\neq\alpha}^{n}[\mu_\beta^2-(\epsilon\lambda_j+\mathrm{i}c)^2]\right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

若 $\{\lambda_i\}_n$ 也为 BAE(23)的解,相当于在(29)式中取极限 $\lambda_a\to\mu_a$ $(a=1,\cdots,n)$,可得到贝特本征态的模方,

$$\langle 0|\prod_{\alpha=1}^{n}\mathscr{C}(\mu_\alpha)\prod_{\beta=1}^{n}\mathscr{B}(\mu_\beta)|0\rangle$$

$$= (-\mathrm{i}c)^n \left\{ \prod_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{2\mu_\alpha - \mathrm{i}c}{2\mu_\alpha} \right)^2 \left[\frac{\mu_\alpha^2 + \left(\frac{c}{2} + \zeta_+ \right)^2}{\mu_\alpha^2 - \left(\frac{c}{2} + \zeta_- \right)^2} \right]^{1/2} \times \left(-\mu_\alpha + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_- \right)\left(-\mu_\alpha + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_+ \right) \times \exp(\mathrm{i}\mu_\alpha l) \right\} \left[\prod_{\alpha\neq\beta=1}^{n} \frac{\mu_\alpha^2 - (\mu_\beta - \mathrm{i}c)^2}{\mu_\alpha^2 - \mu_\beta^2} \right] \det\Phi_{\alpha\beta}, \tag{31}$$

式中 Φ 是一个 $n\times n$ 矩阵,其矩阵元由下式给出:

$$\Phi_{\alpha\beta} = -\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\ln\left[\frac{\left(\mu_\alpha + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_+\right)\left(\mu_\alpha + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_-\right)}{\left(-\mu_\alpha + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_+\right)\left(-\mu_\alpha + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_-\right)} \times \exp(-2\mathrm{i}\mu_\alpha l) \prod_{\gamma=1,\neq\alpha}^{n} \frac{\mu_\gamma^2 - (\mu_\alpha + \mathrm{i}c)^2}{\mu_\gamma^2 - (\mu_\alpha - \mathrm{i}c)^2} \right]. \tag{32}$$

在(32)式中,$\{\mu_\alpha\}$ 在偏微分计算以前暂时当作一般参量对待.

4. NLS 模型中边界场算子的形式因子

首先计算局域场算子 $\psi(x)$ 在边界处的形式因子. 利用对易关系式

$$[\psi_n, \psi_m^+] = \frac{1}{\Delta}\delta_{mm},$$

可知

$$\begin{aligned}
&[\psi(0), T(\lambda)] \\
&= \lim_{N\to\infty} L(N|\lambda)\cdots L(2|\lambda)[\psi(0), L(1|\lambda)] \\
&= T(\lambda)(-\mathrm{i}\sqrt{c}\sigma_+), \\
&[\psi(0), T^{\mathrm{t}}(\lambda)] \\
&= \lim_{N\to\infty}[\psi(0), L^{\mathrm{t}}(1|\lambda)] L^{\mathrm{t}}(2|\lambda)\cdots L^{\mathrm{t}}(M|\lambda) \\
&= -\mathrm{i}\sqrt{c}\sigma_-\ T^{\mathrm{t}}(\lambda),
\end{aligned} \tag{33}$$

式中

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \mathrm{i}\sigma_y).$$

由此可得 $\psi(0)$ 和 $U^{\mathrm{t}}(\lambda)$ 之间的对易关系

$$[\psi(0), U^{\mathrm{t}}(\lambda)] = -\mathrm{i}\sqrt{c}\sigma_-\ U^{\mathrm{t}}(\lambda) + \mathrm{i}\sqrt{c}U^{\mathrm{t}}(\lambda)\sigma_-, \tag{34}$$

代入 $U(\lambda)$ 的矩阵形式,可得到 $\psi(0)$ 和 $U^{\mathrm{t}}(\lambda)$ 矩阵元之间的对易关系

$$\begin{aligned}
[\psi(0), \mathscr{A}(\lambda)] &= \mathrm{i}\sqrt{c}\mathscr{C}(\lambda), \\
[\psi(0), \mathscr{B}(\lambda)] &= -\mathrm{i}\sqrt{c}[\mathscr{A}(\lambda) - \mathscr{D}(\lambda)] \\
&= \frac{-\mathrm{i}\sqrt{c}}{2\lambda}[\tilde{\mathscr{A}}(\lambda) - (2\lambda - \mathrm{i}c)\mathscr{D}(\lambda)], \\
[\psi(0), \mathscr{C}(\lambda)] &= 0, \\
[\psi(0), \mathscr{D}(\lambda)] &= -\mathrm{i}\sqrt{c}\mathscr{C}(\lambda).
\end{aligned} \tag{35}$$

使 $\psi(0)$ 作用在 $\prod_{i=1}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle$ 上,可写为

$$\psi(0)\prod_{i=1}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle = \sum_{i=1}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_1)\cdots[\psi(0), \mathscr{B}(\lambda_i)] \cdots\mathscr{B}(\lambda_{n+1})|0\rangle. \tag{36}$$

利用(35)式中 $\psi(0)$ 和 $\mathscr{B}(\lambda_i)$ 之间的对易关系,并且把对易关系中的算子 $\tilde{\mathscr{A}}(\lambda)$ 和 $\mathscr{D}(\lambda)$ 移动到最右端,可得

$$\begin{aligned}
&\psi(0)\prod_{i=1}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\mathrm{i}\sqrt{c}(2\lambda_i - \mathrm{i}c)}{2\lambda_i\prod_{j=1,\neq i}^{n+1}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)} \times E_i(\lambda_i)\prod_{j=1,\neq i}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_j)|0\rangle, \\
&E_i(\lambda_i) = \sum_{\epsilon=\pm}\epsilon\left(-\epsilon\lambda_i + \frac{\mathrm{i}c}{2} + \mathrm{i}\zeta_+\right) \times \exp(\mathrm{i}\epsilon\lambda_i l) \times \prod_{j=1,\neq i}^{n+1}[\lambda_j^2 - (\epsilon\lambda_i - \mathrm{i}c)^2].
\end{aligned} \tag{37}$$

由此可知,$\psi(0)$ 在本征态之间的形式因子是一些标积的求和,

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\prod_{\alpha=1}^{n}\mathscr{C}(\mu_\alpha)\psi(0)\prod_{i=1}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\mathrm{i}\sqrt{c}(2\lambda_i - \mathrm{i}c)}{2\lambda_i\prod_{j=1,\neq i}^{n+1}(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)} \times E_i G^{(n)}(\{\mu_\alpha\}, \{\lambda_j\}_{j\neq i}).
\end{aligned} \tag{38}$$

将(38)式代入标积的表达式(29),并利用行列式的求和法则,可知

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\prod_{\alpha=1}^{n}\mathscr{C}(\mu_\alpha)\psi(0)\prod_{i=1}^{n+1}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle \\
&= \left\{ \prod_{\alpha=1}^{n}(2\mu_\alpha - \mathrm{i}c)\left[\frac{\mu_\alpha^2 + \left(\frac{c}{2} + \zeta_+\right)^2}{\mu_\alpha^2 + \left(\frac{c}{2} + \zeta_-\right)^2} \right]^{1/2} \right\} \times \left[\prod_{i=1}^{n+1}\frac{2\lambda_i - \mathrm{i}c}{2\lambda_i} \right] \\
&\times \frac{\mathrm{i}\sqrt{c}}{\prod_{\alpha>\beta}(\mu_\alpha^2 - \mu_\beta^2)\prod_{i<j}(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)}\det\mathscr{H}^{\mathrm{e}}_{\alpha i}.
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{\mathrm{e}}_{\alpha i}(\mu_\alpha,\lambda_i) &= \mathscr{H}_{\alpha i}(\mu_\alpha,\lambda_i) \quad (\alpha < n+1),\\ \mathscr{H}^{\mathrm{e}}_{\alpha i}(\lambda_i) &= E_i(\lambda_i) \quad (\alpha = n+1).\end{aligned} \tag{40}$$

取(39)式的厄米共轭，并利用共轭关系(25)式，可得算子 $\psi^+(0)$ 在本征态之间的形式因子为

$$\begin{aligned}&\langle 0|\prod_{\alpha=1}^{n+1}\mathscr{C}(\mu_\alpha)\psi^+(0)\prod_{i=1}^{n}\mathscr{B}(\lambda_i)|0\rangle\\ &=\left\{\prod_{i=1}^{n}(2\lambda_i-\mathrm{i}c)\left[\frac{\lambda_i^2+\left(\frac{c}{2}+\zeta_+\right)^2}{\lambda_i^2+\left(\frac{c}{2}+\zeta_-\right)^2}\right]^{1/2}\right\}\\ &\quad\times\left[\prod_{\alpha=1}^{n+1}\frac{2\mu_\alpha-\mathrm{i}c}{2\mu_\alpha}\right]\\ &\quad\times\frac{\mathrm{i}\sqrt{c}}{\prod_{\alpha<\beta}(\mu_\alpha^2-\mu_\beta^2)\prod_{i>j}(\lambda_i^2-\lambda_j^2)}\det\mathscr{H}^{\mathrm{f}}_{i\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{\mathrm{f}}_{i\alpha}(\mu_\alpha,\lambda_i) &= \mathscr{H}_{i\alpha}(\lambda_i,\mu_\alpha) \quad (i < n+1),\\ \mathscr{H}^{\mathrm{f}}_{i\alpha}(\mu_\alpha) &= E_i(\mu_\alpha) \quad (i = n+1).\end{aligned} \tag{41}$$

5. 结 论

本文中，对可积开边界条件下的 NLS 模型，得到了贝特本征态的标积和模以及边界处的局域场算子的形式因子. 从推导的过程可知，这些结果可以推广到具有相同有理型 R 矩阵和 $K_\pm$ 矩阵的其他模型，进一步还可推广到具有三角型 R 矩阵和 $K_\pm$ 矩阵的模型. 由于在非周期边界条件下缺少空间平移算子，对计算关联函数非常重要的任意位置处场算子的形式因子的计算依然是一个困难的问题.

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198

[2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[3] Mewes M O, Anderson M R, Kurn D M *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582

[4] Castin Y, Dalibard J 1997 *Phys. Rev.* A **55** 4330

[5] Ruan H Y, Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 10 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 10]

[6] Zhang J F, He B G, Xu C Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 26 (in Chinese) [张解放、何宝钢、徐昌智 2004 物理学报 **53** 26]

[7] Ruan H Y, Li H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 996 (in Chinese) [阮航宇、李慧军 2005 物理学报 **54** 996]

[8] Tian X D, Yue R H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1485 (in Chinese) [田晓东、岳瑞宏 2005 物理学报 **54** 1485]

[9] Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294

[10] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402

[11] Baxter R J 1982 *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (London: Academic Press)

[12] Korepin V E, Bogoliubov N M, Izergin A G 1993 *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge: Cambridge University Press)

[13] Korepin V E 1982 *Comm. Math. Phys.* **86** 391

[14] Kitanine N, Maillet J M, Terras V 1999 *Nucl. Phys.* B **554** 647

[15] Wang Y S 2002 *Nucl. Phys.* B **622** 633

[16] Sklyanin E K 1988 *J. Phys. A* **21** 2375

Form factors of the operators at the boundary in quantum nonlinear Schrödinger model *

Wang Yan-Shen Yan Xue-Wen
(*Department of Applied Physics*, *Xi'an Jiaotong University*, *Xi'an* 710049, *China*)

(Received 23 January 2006; revised manuscript received 24 February 2006)

Abstract

For the nonlinear Schrödinger model with an integrable open boundary, the scalar products of Bethe eigenstates and form factors of operators at the boundary are calculated. The results are represented as determinants of usual functions with parameters of the model.

Keywords: integrability, form factors, inverse scattering
PACC: 0370, 1110L, 1130N

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10375045).