第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3898-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.8,August,2006

探讨黑洞 Hawking 辐射的新方法——量子统计法*

赵 仁[1)2)] 张丽春[2)] 胡双启[1)]
1)(中北大学环境与安全工程系,太原 030051)
2)(山西大同大学物理系,大同 037009)
(2005 年 12 月 29 日收到;2006 年 1 月 11 日收到修改稿)

将黑洞看作由裸黑洞和二维热力学面(黑洞的视界)组成的正则系综,利用量子统计方法给出黑洞 Hawking 辐射的能量谱.找到黑洞辐射温度与熵的关系.

关键词:Hawking 辐射,正则系统,量子统计
PACC:0420,9760L

1. 引 言

Hawking[1]将黑洞的量子效应阐释为由事件视界发射热辐射谱,在黑洞物理学的发展中立下了一个划时代的里程碑.这一效应的发现不仅解决了黑洞热力学当时存在的矛盾,而且也深入地揭示了量子力学、热力学与引力之间的内在联系.考察各种类型黑洞的热性质成为黑洞物理学中一个重要的课题.Hawking 指出,黑洞表面附近的真空涨落产生虚粒子对,当其中负能虚粒子通过隧道效应而进入黑洞,黑洞的能量将减少,同时其中的正能粒子可能向外穿出黑洞外引力区,这相当于黑洞辐射了一个粒子.然而,在 Hawking 的证明中没有发现势垒出现在隧道何处.

最近 Parikh[2]用隧道效应来研究 Hawking 辐射,他们认为黑洞的粒子辐射过程中,隧道在辐射前并没有势垒,势垒是由辐射粒子自身造成的.这是指在隧道效应发生的过程中,黑洞的能量在减少,则黑洞的视界半径从原来的值变为一个新的较前小的值.半径的减小范围取决于辐射粒子能量的大小,原半径和辐射后的半径之间是一个经典的禁带范围——势垒.还用一种精巧的方法计算给出了 Schwarzschild 和 Reissner-Nordstrom 黑洞的辐射谱.Zhang 和 Zhao[3]发展了文献[2]的方法,给出了轴对称时空 Kerr-Newman 黑洞的辐射谱.而文献[4]给出了考虑广义测不准关系后 Hawking 辐射的辐射谱.

本文用量子统计方法探讨黑洞的 Hawking 辐射.将黑洞看作由裸黑洞与视界构成[5,6],当黑洞发生 Hawking 辐射时引起视界的收缩,形成新的视界面.新的视界面与原视界面之间形成的区域与量子统计力学中的正则系统对应,而将裸黑洞看作热源.由此我们按照量子统计方法对正则系综研究,得到黑洞 Hawking 辐射的辐射谱.

2. 理论推导

对于静态或者稳态时空,由于度规与时间变量无关,我们总可以在空间区域构建同时面.因此,我们构建一个包围黑洞的同时面,使黑洞浸泡在温度为 T(T 是黑洞的辐射温度)的热辐射场中,并且要求 $R \gg r_H$,其中 R 是同时面的半径位置,r_H 是黑洞的视界位置.由于此同时面的半径较黑洞的视界半径大得多,故我们可认为此同时面所围区域为一个孤立的热力学系统,它的能量守恒.在区域内,我们又可分为裸黑洞、视界面和辐射场所在的区域三部分.设系统的总能量为 E^0,裸黑洞的初始能量为 E,E 为黑洞的 Arnowitt-Deser-Misner(ADM)质量,黑洞视界面的初始能量为零,辐射场的能量为 E_r.我们知道黑洞的视界位置 r_H 是黑洞能量的函数,故记 $r_H(E)$.当黑洞具有 Hawking 辐射时,首先引起变化的是黑洞视界位置.设 Hawking 辐射粒子的能量为

* 山西省自然科学基金(批准号:2006011012)资助的课题.

E_s，则黑洞视界位置将由 $r_H(E)$ 变为 $r_H(E-E_s)$. 此时两视界之间构成一量子能层，能层的能量为 E_s. 由于黑洞和黑洞视界处于温度为 T 的热辐射场中，所以在辐射的产生过程中温度尚未改变，由此我们假设此过程黑洞的温度不变. 这与用隧道效应研究 Hawking 辐射所给出的假设相同. 这时能层与辐射场是没有能量交换的，因此能层的能量与裸黑洞的能量和守恒.

当量子能层在能量为 E_s 的状态 s 时，裸黑洞可处在能量为 $E-E_s$ 的任何一个微观状态. 以 $\Omega(E-E_s)$ 表示能量为 $E_b=E-E_s$ 时裸黑洞的微观状态数，则当量子能层处在 s 态时，裸黑洞与量子能层的微观状态数为 $\Omega(E-E_s)$. 由等概率原理知，裸黑洞与量子能层组成的复合系统每一个可能的微观状态出现的概率是相等的，所以量子能层处在状态 s 的概率与 $\Omega(E-E_s)$ 成正比，即

$$\rho_s \propto \Omega(E-E_s). \tag{1}$$

由于系统的微观状态数很大，为了数学处理方便，我们讨论较为缓慢的 $\ln\Omega$ 是方便的. 这样，由于 $E \gg E_s$，可将 $\ln\Omega$ 展开为 E_s 的幂级数，由此可得

$$\ln\Omega(E-E_s) = \ln\Omega(E) + \left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial E_b}\right)_{E_s=0}(-E_s) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \ln\Omega}{\partial E_b^2}\right)_{E_s=0} E_s^2 + \cdots. \tag{2}$$

取

$$\beta = \left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial E_b}\right)_{E_s=0}. \tag{3}$$

由于(2)式等号右端第一项是一个常量，所以(1)式可表示为

$$\rho_s \propto \exp[-\beta E_s + \beta_2 E_s^2 + \cdots], \tag{4}$$

式中

$$\beta_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k \ln\Omega}{\partial E_b}\right)_{E_s=0}.$$

按照统计物理的观点，系统微观状态数的对数应为系统的熵，即

$$S = \ln\Omega. \tag{5}$$

因此，(2)式可写为

$$S(E-E_s) - S(E) = -\beta E_s + \beta_2 E_s^2 + \cdots. \tag{6}$$

(6)式中的 $S(E-E_S)-S(E)$ 为裸黑洞辐射前后的熵差，记为

$$\Delta S = S(E-E_s) - S(E). \tag{7}$$

由(6)和(4)式，我们可得到 Hawking 辐射粒子即出射波的辐射谱为

$$\rho_s \propto e^{\Delta S}. \tag{8}$$

这与已知结论相同. 由热力学关系知，(6)式中的 β 应是温度的导数.

由(2)式知，(8)式中的 ΔS 也可表示为

$$\Delta S = \sum_{k=1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k S(E_b)}{\partial E_b^k}\right)_{E_s=0}(-E_s)^k. \tag{9}$$

3. 实证比较

3.1. Schwarzschild 黑洞

ADM 质量 $E=M$，

$$S(E) = 4\pi M^2, \quad S(E_b) = 4\pi(M-E_s)^2, \tag{10}$$

$$\beta = 8\pi M, \quad \beta_2 = 4\pi. \tag{11}$$

所以

$$\rho_s \propto e^{\Delta S} = \exp\left(-8\pi M E_s\left(1-\frac{E_S}{2M}\right)\right). \tag{12}$$

这与文献[2]的结论相同.

3.2. 高维 Schwarzschild 黑洞

ADM 质量 $E=M$，

$$dS = -\left(1-\frac{r_+^n}{r^n}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_+^n}{r^n}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{n+1}^2, \tag{13}$$

式中

$$r_H^n = \frac{16\pi M}{(n+1)\Omega_{n+1}}.$$

$$S(E) = \frac{1}{4}\Omega_{n+1}\left(\frac{16\pi M}{(n+1)\Omega_{n+1}}\right)^{(n+1)/n}, \quad S(E_b) = \frac{1}{4}\Omega_{n+1}\left(\frac{16\pi(M-E_s)}{(n+1)\Omega_{n+1}}\right)^{(n+1)/n}, \tag{14}$$

$$\beta = \frac{4\pi r_H}{n}. \tag{15}$$

所以

$$\rho_s \propto e^{\Delta S} = \exp\left[\frac{1}{4}\Omega_{n+1}\left(r_H^{n+1}(M-E_s) - r_H^{n+1}(M)\right)\right]. \tag{16}$$

这与文献[7]的结论相同

3.3. Reissner-Nordstrom 黑洞

ADM 质量 $E=M$，

$$S(E) = \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2,$$
$$S(E_b) = \pi(M - E_s + \sqrt{(M - E_s)^2 - Q^2})^2, \tag{17}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \tag{18}$$

所以

$$\rho_s \propto e^{\Delta S} = \exp[\pi(r_H^2(M - E_s) - r_H^2(M))], \tag{19}$$

式中

$$r_H(M) = M + \sqrt{M^2 - Q^2}.$$

这与文献[2]的结论相同.

3.4. Kerr-Newman 黑洞

ADM 质量 $E = M$,

$$S(E) = \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2,$$
$$S(E_b) = \pi(M - E_s + \sqrt{(M - E_s)^2 - Q^2 - a^2})^2, \tag{20}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2}. \tag{21}$$

所以

$$\rho_s \propto e^{\Delta S} = \exp[\pi(r_+^2(M - E_s) - r_+^2(M))], \tag{22}$$

式中

$$r_+(M) = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}.$$

这与文献[3,8]的结论相同.

3.5. 考虑广义测不准关系后 Schwarzschild 黑洞熵

考虑广义测不准关系后 Schwarzschild 黑洞的熵为[9]

$$S = \frac{A}{4L_p^2} + \alpha \ln\frac{A}{L_p^2} + o\left(\frac{L_p^2}{A}\right). \tag{23}$$

由(8)和(9)式可得

$$\rho_s \propto e^{\Delta S} = \left(1 - \frac{E_s}{M}\right)^{2\alpha} \exp\left[-8\pi M E_s\left(1 - \frac{E_s}{2M}\right)\right]. \tag{24}$$

这与文献[4]的结论相同.

4. 结 论

由以上讨论可知,黑洞在产生 Hawking 辐射前是没有势垒的,当有能量以辐射的形式产生时,首先使黑洞视界发生改变,在原视界面与新的视界面之间形成量子能层,构成一个禁带范围,即造成势垒.在这一过程的引导下,我们将裸黑洞和黑洞视界面浸泡在温度不变的辐射场中,利用量子统计方法讨论黑洞辐射谱,得到普遍黑洞能谱的表达式.并由(6)式知,一旦通过其他方法得到黑洞的辐射温度,则可进一步求得黑洞的熵,所以本文也给出了黑洞辐射温度与黑洞熵的关系.通过讨论,可使人们对黑洞 Hawking 辐射过程的认识更加深入.

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[2] Parikh M K 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[3] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14

[4] Arzano M, Medved A J M, Vagenas E C 2005 *J. High Energy Phys.* (9) 37

[5] Huang C G, Liu L, Zhao Z 1993 *Gen. Relativ. Gravit.* **12** 1267

[6] Zhao R, Liu L 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1942 (in Chinese) [赵 仁、刘 辽 1996 物理学报 **45** 1942]

[7] Ren J, Zhao Z, Gao J C 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2489

[8] Angheben M, Nadalini M, Vanzo L *et al* 2005 *J. High Energy Phys.* (5) 14

[9] Medved A J M, Vagenas E C 2004 *Phys. Rev.* D **70** 124021

A new method for exploring the black hole Hawking radiation —— the quantum statistical method*

Zhao Ren[1)2)] Zhang Li-Chun[2)] Hu Shuang-Qi[1)]

1)(*Department of Environment and Safety Engineering*, *North University of China*, *Taiyuan* 030051, *China*)

2)(*Department of Physics*, *Shanxi Datong University*, *Datong* 037009, *China*)

(Received 29 December 2005; revised manuscript received 11 January 2006)

Abstract

When we take the black hole as a canonical ensemble composed of a naked black hole and the two-dimensional thermodynamic surface (horizon of the black hole), using the quantum statistical method, we derive the energy spectrum of the black hole Hawking radiation. The relation between the radiation temperature of the black hole and the entropy is obtained. This gives an insight into the process of the black hole Hawking radiation.

Keywords: Hawking radiation, canonical ensemble, quantum statistics

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2006011012).