

黑洞的统计熵*

赵 仁^{1,2)} 张丽春²⁾ 胡双启¹⁾

1) 中北大学环境与安全工程系, 太原 030051)

2) 山西大同大学物理系, 大同 037009)

(2006 年 1 月 19 日收到, 2006 年 2 月 22 日收到修改稿)

运用量子统计的方法, 直接求解 Schwarzschild 时空背景下玻色场和费米场的配分函数, 得到熵的积分表达式. 按照最近的研究结果, 认为黑洞的 Hawking 辐射过程是隧道效应过程, 在考虑黑洞隧道效应产生过程中黑洞能量发生变化的基础上, 给出积分的下限为黑洞的视界位置. 由此得到黑洞熵的主要项为视界面积的 $1/4$. 不存在使人疑惑的紫外截断因子, 并且由此可得黑洞辐射粒子的能量与辐射温度成正比的结论.

关键词: 黑洞熵, 量子统计, 隧道效应, 反作用

PACC: 0420, 9760L

1. 引 言

黑洞熵是理论物理研究的重要课题, 这是因为熵具有统计意义. 因而对黑洞熵的理解涉及到对黑洞微观本质的认识. 然而, 熵如何作为黑洞微观状态测度还没有很好地被理解, 对黑洞熵的统计起源问题并没有得到解决^[1]. 另一方面, 自从 Bekenstein^[2]和 Hawking 等^[3,4]提出黑洞熵与其视界面积成正比以来, 考察各种类型黑洞热性质^[5]成为理论物理学者的研究课题之一, 尤其是对黑洞熵的研究近来非常活跃, 人们为了探求黑洞熵的统计起源, 提出了各种求熵的方法^[6-11], 其中使用最多的是 Hoof^[9]提出的 brick-wall 方法. 人们用此方法研究了各种黑洞背景下标量场与旋量场的统计性质^[12-22], 发现黑洞熵的主要项是与黑洞视界面积成正比的. 然而, 在计算中发现黑洞视界附近的量子态密度是发散的, 为了得到 Bekenstein-Hawking 熵, 需要人为地引入紫外截断, 该截断是不自然的. 随后人们改进 brick-wall 方法, 提出薄层模型^[8,16], 该模型仅考虑视界附近一薄层内量子态的贡献, 可自然地避免原 brick-wall 方法模型中的红外截断和小质量近似, 但紫外截断仍无法克服.

最近, 人们对黑洞 Hawking 辐射物理机制进行了更深入的研究^[23-29], 认为黑洞 Hawking 辐射过程

是隧道效应发生的过程. 黑洞在辐射前并没有势垒, 势垒的产生是由辐射粒子自身造成的. 当黑洞产生辐射时, 黑洞的能量将减少, 因黑洞的视界位置是能量的函数, 所以黑洞的视界位置伴随着辐射的产生而改变, 改变的大小取决于辐射粒子的能量大小. 因而, 在黑洞产生 Hawking 辐射的过程中, 原视界位置与新的视界位置之间形成一个经典禁带范围——势垒.

考虑 Hawking 辐射对时空影响后, 对黑洞热力学量的研究(即 Hawking 辐射的反作用问题), 是理论物理工作者非常感兴趣的^[30-33], 人们从不同角度探讨考虑辐射后时空的性质, 都得到有意义的结论. 本文在考虑 Hawking 辐射是隧道效应的基础上, 改进 Hooft 提出的 brick-wall 方法, 将积分的下限取在黑洞视界上, 在只保留熵的主要项的结果中得到黑洞熵是视界面积的 $1/4$ 的结论. 并且可得到辐射粒子的能量, 此能量与最近人们发现黑洞辐射粒子的能量^[34-38]是与辐射温度成正比的结论一致, 只是比例系数不同. 在计算中不存在 brick-wall 方法中引入的紫外截断因子, 使人们对黑洞的热力学与量子特性有更深入的认识. 本文中我们采用自然单位制 ($C = \hbar = G = k_B = 1$)

2. Schwarzschild 时空中玻色场的熵

Schwarzschild 时空线元

* 山西省自然科学基金(批准号 2006011012)资助的课题.

$$dS^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{1}$$

根据广义相对论理论 , 于无穷远的静止观测者看到来自恒星表面粒子的频率移动为

$$\nu = \nu_0 f^{1/2}, \tag{2}$$

式中 ν_0 为恒星表面处原子的固有振动频率, ν 为无穷远的静止观测者测得的该粒子的固有频率.

无穷远的静止观测者测得的固有辐射温度为^[39]

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{f_0}}, \tag{3}$$

式中,

$$T_0 = \frac{1}{8\pi M}$$

是平衡温度,

$$\sqrt{f_0} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$$

是红移因子.

按照文献[23—29]的观点, 黑洞的 Hawking 辐射是一种隧道效应, 黑洞辐射粒子的能量谱为

$$\rho \propto e^{\Delta S}. \tag{4}$$

式中 ΔS 为黑洞辐射前后的熵差.

在隧道效应发生的过程中黑洞能量在减少, 因为黑洞的视界位置是能量的函数, 所以视界位置变为一个新值. 视界位置的改变取决于辐射粒子能量的值, 这样在隧道效应发生过程中原视界位置和新的视界位置之间形成一个经典的禁带范围——势垒. 设辐射粒子的能量为 ω , 那么在隧道效应发生过程中, 黑洞的能量变为 $M - \omega$, 则红移因子变为

$$\sqrt{f} = \sqrt{1 - 2 \frac{M - \omega}{r}}. \tag{5}$$

现在我们计算在隧道效应发生过程中, 黑洞视界外辐射场的配分函数 Z , 对玻色气体

$$\ln Z = - \sum_i g_i \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_i}). \tag{6}$$

在单位体积内, 能量在 ϵ 到 $\epsilon + d\epsilon$ 或 ν 到 $\nu + d\nu$ 间隔内, 粒子的量子态数应为

$$g(\nu) d\nu = j 4\pi \nu^2 d\nu, \tag{7}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度, ν 由(2)式给出. 对于 Schwarzschild 时空, 视界外任意 r 点的二维曲面面积为 $4\pi r^2$, 则在黑洞视界外任意厚度球壳内的系统的配分函数为

$$\ln Z = \sum_i g_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\beta \epsilon_i}$$

$$= j 16\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{n\nu}{T}} \nu^2 d\nu \int r^2 \frac{dr}{\sqrt{f}} = j \frac{2}{45} \pi^3 \int \frac{r^2 dr}{\beta^3 \sqrt{f}}, \tag{8}$$

式中 $\frac{1}{\beta} = T$. 利用熵与配分函数的关系

$$S_b = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{9}$$

可得

$$S_b = j \frac{8}{45} \pi^3 \frac{1}{\beta_0^3} \int \frac{r^2 dr}{f^2}. \tag{10}$$

式中,

$$\beta_0 = \frac{1}{T_0},$$

$$\beta = \beta_0 \sqrt{f}.$$

在(10)式中, 我们取积分区间 $[r_+, L]$, 其中 $r_+ = 2M$. 在隧道效应发生的过程中, 黑洞的能量变为 $M - \omega$. 按照文献[23—29, 40—43]的观点, 在隧道效应发生的过程中, 黑洞的视界位置对视界外的观测者保持不变. 所以视界外的观测者认为黑洞的视界位置 $r_+ = 2M$, 辐射温度在 Hawking 辐射过程中不变. 当 $L \gg r_+$ 时, 就有

$$S_b = j \frac{8}{45} \pi^3 \frac{1}{\beta_0^3} \int_{r_+}^L \frac{r^4 dr}{[r - \mathcal{X}(M - \omega)]^2} = j \frac{8}{45} \pi^3 \frac{r_+^4}{\beta_0^3} \frac{1}{2\omega} + \mathcal{f}(L, \omega), \tag{11}$$

式中

$$\mathcal{f}(L, \omega) = j \frac{8}{45} \pi^3 \frac{1}{\beta_0^3} \int_{r_+}^L \frac{r - r_+}{(r - \mathcal{X}(M - \omega))^2} \times [3r_+^3 + 6r_+^2(r - r_+) + 4r_+(r - r_+)^2 + (r - r_+)^3] dr - j \frac{8}{45} \pi^3 \frac{1}{\beta_0^3} \frac{1}{L}.$$

在 Hooft 的 brick-wall^[9]中, 将 $\mathcal{f}(L, \omega)$ 解释为远离围绕系统的真空的贡献, 故可去掉, 只须保留第一项, 这是视界的内禀贡献. 在(11)式中, 当取

$$2\omega = j \frac{T_0}{90}$$

时, 可得到黑洞熵的主要部分为视界面积的 1/4. 当 $j = 1$ 时我们得到辐射粒子的能量与辐射温度成正比, 即

$$\omega_b = \frac{T_0}{180}. \tag{12}$$

这一结果与文献[34—36]给出的辐射粒子能量与辐

射温度的关系

$$\omega = T_0 \ln 3 \quad (13)$$

一致,只是比例系数不同.两种不同的途径都得到辐射粒子能量与辐射温度成正比的结论,进一步说明黑洞辐射粒子的能量是与温度成正比的,使人们对黑洞的热力学与量子特性有更深入的认识.

3. Schwarzschild 时空中费米场的熵

对于费米气体配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 + e^{-\beta \epsilon_i}). \quad (14)$$

由(7)式可得

$$\begin{aligned} \ln Z &= \sum_i g_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\beta \epsilon_n} \\ &= i 16\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{n\nu}{T}} \nu^2 d\nu \int r^2 \frac{dr}{\sqrt{f}} \\ &= i \frac{2}{45} \pi^3 \frac{7}{8} \int \frac{r^2 dr}{\beta \sqrt{f}}. \end{aligned} \quad (15)$$

利用上述结果,可得 Schwarzschild 时空中费米场的熵为

$$S_F = i \frac{7}{8} \frac{A}{4}, \quad (16)$$

式中 i 为辐射费米子的自旋简并度.为使费米场的熵也为黑洞视界面积的 $1/4$,当 $i=1$ 时,辐射费米子的能量应取

$$\omega_F = \frac{7}{8} \omega_b. \quad (17)$$

由此,我们可知黑洞熵如满足面积定理,则黑洞辐射粒子的能量对于玻色子与费米子是不同的.这与最近研究结论一致^[40].

4. 结 论

通过以上分析,在 Schwarzschild 黑洞背景下,从统计物理学角度出发,直接运用统计方法求解各种场的配分函数,避开了求解波动方程的困难.由于我们考虑了 Hawking 辐射的隧道过程,即辐射的反作用对时空的影响,可将积分下限取到黑洞的视界面上,不存在原 brick-wall 方法中使人疑惑的截断因子.由此我们可得到辐射粒子的能量,使人们对黑洞的热力学与量子特性有更深入的认识.

- [1] Liberati S 1997 *Il Nuovo Cimento B* **112** 405
- [2] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333
- [3] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [4] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2738
- [5] Zhao Z 1999 Thermal Properties of Black Hole and Singularities of Space-time (Beijing: Beijing Normal University Press) p265 (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 265 页]
- [6] Hochberg D, Kephart T W, York J W 1993 *Phys. Rev. D* **48** 479
- [7] Padmanaban T 1989 *Phys. Lett. A* **136** 203
- [8] Li X, Zhao Z 2000 *Phys. Rev. D* **62** 104001
- [9] Hooft G 't 1985 *Nucl. Phys. B* **256** 727
- [10] Cognola G, Lecca P 1998 *Phys. Rev. D* **57** 1108
- [11] Cai R G, Ji J Y, Soh K S 1998 *Class. Quant. Grav.* **15** 2783
- [12] Solodukhin S N 1995 *Phys. Rev. D* **51** 609
- [13] Ghosh A, Mitra P 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2521
- [14] Mann R B, Tarasov L, Zeinikov A 1992 *Class. Quant. Grav.* **9** 1487
- [15] Kim W T, Oh J J, Park Y J 2001 *Phys. Lett. B* **512** 137
- [16] He F, Zhao Z 2001 *Phys. Rev. D* **64** 044025
- [17] Ge X H, Shen Y G 2003 *Class. Quant. Grav.* **20** 3593
- [18] Kenmoku M, Ishimoto K, Nandi K K 2006 *Phys. Rev. D* **73** 064004
- [19] Jing J L, Yan M L 2001 *Phys. Rev. D* **63** 084028
- [20] Zhang L C, Zhao R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 362 (in Chinese) [张丽春、赵 仁 2004 物理学报 **53** 362]
- [21] Li G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3005 (in Chinese) [李国强 2005 物理学报 **54** 3005]
- [22] Liu C Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1977 (in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1977]
- [23] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
- [24] Parikh M K 2004 *Int. J. Mod. Phys. D* **13** 2351
- [25] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett. B* **618** 14
- [26] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Nucl. Phys. B* **725** 173
- [27] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *J. High Energy Phys.* (10) 055
- [28] Arzan M, Medved A J M, Vagenas E C 2005 *J. High Energy Phys.* (9) 037
- [29] Yang S Z 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2492
- [30] Zaidi Z, Gegenberg J 1998 *Phys. Rev. D* **57** 1112
- [31] Konoplya R A 2004 *Phys. Rev. D* **70** 047503
- [32] Zhao R, Liu L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 2074 (in Chinese) [赵 仁、刘 辽 1998 物理学报 **47** 2074]
- [33] Zhao R, Zhang S L 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 1037
- [34] Dreyer O 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 081301
- [35] Chen S, Jing J L 2005 *Class. Quant. Grav.* **22** 533
- [36] Das S, Shankaranarayanan S 2005 *Class. Quant. Grav.* **22** 17

- [37] Hod S , Keshet U 2005 *Class . Quant . Grav .* **22** L71
- [38] Chen S , Jing J L 2005 *Class . Quant . Grav .* **22** 2159
- [39] Tolman R C 1934 *Relativity , Thermodynamics and Cosmology* (Oxford : Oxford University Press)
- [40] Jing J L 2005 *J . High Energy Phys .* (12) 005
- [41] Fang H Z , Peng H Y , Zhao Z 2005 *Chin . Phys . Lett .* **22** 1611
- [42] Ren J , Zhao Z , Gao C J 2005 *Chin . Phys . Lett .* **22** 2489
- [43] Li H L , Jiang Q Q , Yang S Z 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 539(in Chinese) 李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539]

Statistical entropy of the black hole ^{*}

Zhao Ren^{1 2)} Zhang Li-Chun²⁾ Hu Shuang-Qi¹⁾

¹ *Department of Environment and Safety Engineering , North University of China , Taiyuan 030051 , China)*

² *Department of Physics , Shanxi Datong University , Datong 037009 , China)*

(Received 19 January 2006 ; revised manuscript received 22 February 2006)

Abstract

Using the quantum statistical method , we directly obtain the partition function of Bose field and Fermi field on the background of Schwarzschild spacetime . The integral expression is obtained . According to the latest research results , Hawking radiation process of the black hole is a tunnel effect . During the creation of tunnel effect , the energy of the black hole changes . The lower limit of integral is the location of the black hole horizon . Therefore , the leading term of the black hole entropy is a quarter of the horizon area . In our calculation , there are no cutoffs . We obtain that the energy of the black hole radiation particle is proportional to the radiation temperature . This provides an insight into the thermodynamics and quantum property of the black hole .

Keywords : black hole entropy , quantum statistics , tunnel effect , retroaction

PACC : 0420 , 9760L