

# 弱相互作用费米气体的不稳定性判据<sup>\*</sup>

袁都奇

(宝鸡文理学院物理系, 宝鸡 721007)

(2005 年 9 月 27 日收到, 2006 年 1 月 9 日收到修改稿)

根据由赝势法得到的弱相互作用费米气体的自由能, 利用热力学方法研究了无外场时弱相互作用费米气体的稳定性. 结果表明, 无外场情况下理想费米气体与存在弱排斥相互作用的费米气体是稳定的, 而具有弱吸引相互作用的费米气体在一定条件下可出现不稳定性. 给出了不稳定性判据和温度判据, 就不同逸度情况下临界粒子数密度的具体表达结果以及温度、粒子质量和吸引相互作用对临界粒子数密度的影响进行了讨论.

关键词: 费米气体, 相互作用, 不稳定性判据

PACC: 0530F, 1230

## 1. 引言

碱金属原子<sup>87</sup>Rb, <sup>23</sup>Na, <sup>7</sup>Li 的玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)实现<sup>[1-3]</sup>以后, 有关 BEC 现象的大量研究工作正在广泛进行. 由于在适当条件下费米子可以形成库珀对, 有玻色系统所具有的一些宏观量子效应现象, 加上囚禁超冷费米气体实验的进展<sup>[4-6]</sup>, 超冷费米气体的研究在此基础上蓬勃开展<sup>[7-13]</sup>, 展示了丰富的物理内涵.

量子气体的粒子间都存在弱相互作用, 这种相互作用对系统的许多性质会产生重要影响. 对于玻色气体, 相互作用对系统的稳定性有着重要影响. 由于 s 波散射引起的相互吸引作用会导致凝聚体的崩塌<sup>[14]</sup>, 空间均匀的玻色气体不能形成稳定的 BEC. 理论预期, 在原子数充分少或原子间的相互作用非常弱且处于外力场时, 凝聚体是稳定的<sup>[15-17]</sup>, 上述条件不满足时, 凝聚体发生的衰变和崩塌也有不少研究<sup>[18-21]</sup>. 对于费米气体, 由于描述费米子波函数的反对称性, 处在同一自旋态的两个费米子不可能有 s 波散射, 而下一级的 p 波散射在低能情况下又非常弱, 所以常将其视为理想系统. 然而对于那些具有超精细能态结构的费米子系统, 处在两个不同超精细能态的费米子, 由 s 波散射所产生的相互作用不能忽略<sup>[22]</sup>, 此时相互作用对费米气体系统性质的影响也必须考虑.

文献 9 报道了在外势场中观察到有较强吸引相互作用的简并费米气体出现不稳定性, 发生坍塌的实验结果. 将大约  $10^5$  的费米子<sup>40</sup>K 原子和  $10^8$  的玻色子<sup>87</sup>Rb 原子置于磁光阱中, 采用激光冷却的方法冷却到  $100 \mu\text{K}$  左右, 然后将其置于磁阱中使 Rb 原子射频蒸发, 而 K 原子则通过原子间的相互碰撞得到有效冷却. 在蒸发 25 s 后, 当系统同时出现简并时观察到的 K 原子大约有  $3 \times 10^4$ , Rb 原子大约有  $2 \times 10^5$ . 温度进一步降低, 若两种气体的原子数被限制在大约  $2 \times 10^4$ , 系统是稳定的. 增加原子数时情况发生了显著变化, 在 Rb 原子发生 BEC 时, 由于与 Rb 原子的非弹性碰撞, 观察到 K 原子有相对缓慢的衰变, 而当 Rb 原子的 BEC 完全形成时, K 原子突然丢失为原来的一半. 通过 K 原子的突然丢失, 判断简并的费米系统出现了不稳定性, 发生了坍塌. 研究表明, 这种不稳定性只有在粒子数超过某一临界值时才会发生.

目前对于费米气体不稳定性的实验研究才刚刚开始, 这种不稳定性的出现, 并无理论上的详细研究及其解析判据. 因此, 研究不同条件下相互作用对于费米气体稳定性的影响并给出相应不稳定性出现的解析判据, 对于超低温费米气体的研究具有重要的理论和实际意义. 本文将利用文献 22 导出的弱相互作用费米气体的自由能, 运用热力学理论, 研究无外场时弱相互作用对费米气体稳定性的影响, 给出弱吸引相互作用下系统出现不稳定性时的粒子数密

<sup>\*</sup> 陕西省教育厅科研计划 批准号 06JK358 和宝鸡文理学院科研基金(批准号 ZK2515)资助的课题.

度判据和温度判据,并就不同情况下临界粒子数密度的表达式以及温度、粒子质量、吸引相互作用对于临界粒子数密度的影响进行讨论。

## 2. 不稳定性及其粒子数密度和温度判据

考虑一个限定在体积  $V$  内,存在弱相互作用、自旋为  $1/2$  的  $N$  个费米子组成的气体系统.设无外场存在,利用赝势法求得系统的自由能为<sup>[22]</sup>

$$A = NkT \left[ -\frac{2}{\lambda^3 n} f_{3/2}(z_0) + \ln z_0 + \frac{1}{2} a \lambda^2 n \right] \quad (1)$$

式中,  $k$  为玻耳兹曼常数,  $T$  为热力学温度,  $n$  为粒子数密度,

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2}{\lambda^3} f_{3/2}(z_0). \quad (2)$$

这里,  $z_0$  是无相互作用的费米子组成的“虚构”系统的逸度,  $f_n(z_0)$  为费米积分,  $\lambda$  为热波长.

$$f_n(z_0) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z_0^{-1} e^x + 1} dx, \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi mkT)^{1/2}},$$

式中,  $h$  为普朗克常数,  $m$  为粒子质量.  $a$  为粒子间二体相互作用的  $s$  波散射长度,满足弱相互作用条件

$$\frac{|a|}{\lambda} \ll 1, \quad (4)$$

$$n|a^3| \ll 1.$$

这里,  $a > 0$  表示粒子间存在排斥相互作用;  $a < 0$  表示粒子间存在吸引相互作用.

利用(1)(2)式以及关系式

$$\frac{\partial f_n(z_0)}{\partial z_0} = \frac{1}{z_0} f_{n-1}(z_0), \quad (5)$$

求得弱相互作用费米气体系统的物态方程为

$$P = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_{N,T}$$

$$= \frac{NkT}{V} \left[ \frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} + \frac{Na\lambda^2}{2V} \right]. \quad (6)$$

由(2)(5)(6)式可以求得

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = - \frac{NkT}{V^2} \left[ \frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} + na\lambda^2 \right]. \quad (7)$$

根据(7)式,由平衡的稳定性条件

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T < 0$$

可知,弱相互作用的费米气体系统处于稳定平衡时

必须满足

$$\frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} + na\lambda^2 > 0. \quad (8)$$

对于理想费米气体系统( $a = 0$ )和存在排斥相互作用的费米气体系统( $a > 0$ )(8)式总是满足的.所以理想费米气体与存在排斥相互作用的费米气体在低温、低密度下的状态总是稳定的.对存在吸引相互作用的费米气体系统( $a < 0$ ),若温度一定,当粒子数密度满足

$$n < \frac{2\pi mkT}{|a|h^2} \frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} \quad (9)$$

时,系统是稳定的.若满足

$$n > \frac{2\pi mkT}{|a|h^2} \frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} \quad (10)$$

时,系统是不稳定的.由此可见,弱吸引相互作用的费米气体系统,存在一个临界粒子数密度  $n_c$ ,

$$n_c = \frac{2\pi mkT}{|a|h^2} \frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)}. \quad (11)$$

当  $n < n_c$  时,系统是稳定的;当  $n > n_c$  时,系统将出现不稳定性.由(11)式以及(2)式可知,对于给定系统,决定稳定性的临界粒子数密度不仅与系统性质有关,还与系统所处的状态有关.由热波长与温度的关系以及(7)式可知,存在吸引相互作用的费米气体,若系统粒子数密度一定,当温度满足

$$T > \frac{n|a|h^2}{2\pi mk} \frac{f_{1/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} \quad (12)$$

时,系统是稳定的;当温度满足

$$T < \frac{n|a|h^2}{2\pi mk} \frac{f_{1/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} \quad (13)$$

时,系统是不稳定的.这说明,存在吸引相互作用的费米气体,在粒子数密度一定时,存在一个特征温度  $T_s$ ,

$$T_s = \frac{n|a|h^2}{2\pi mk} \frac{f_{1/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)}. \quad (14)$$

若  $T > T_s$ ,系统是稳定的;若  $T < T_s$ ,系统是不稳定的.

## 3. 讨 论

### 3.1. 不同 $z_0$ 值对应的 $n_c$ 以及温度对 $n_c$ 的影响

由于临界粒子数密度表达式(11)中出现的费米积分  $f_n(z_0)$  中的  $z_0$  为无相互作用费米子组成的“虚构”系统的逸度,所以(11)式表示了“虚构”系统的逸度取不同值时,与其对应的存在吸引相互作用的

实际系统的临界粒子数密度.因此,我们可就此讨论“虚构”系统的逸度分别处于  $z_0 \ll 1$ ,  $z_0 = 1$  以及  $z_0 \gg 1$  这三种情况时,与其对应的实际系统临界粒子数密度  $n_c$  的表达式及温度对其产生的影响.

若  $z_0 \ll 1$ ,  $f_n(z_0) \approx z_0$ , 则 (11) 式可以变为

$$n_c = \frac{2\pi mkT}{|a|h^2} = \frac{1}{|a|\lambda^2}. \quad (15)$$

由此可以看出,在  $z_0 \ll 1$ , 即与实际系统对应的无相互作用的费米子组成的“虚构”系统满足经典近似时,无外场且存在吸引相互作用的费米气体系统的临界粒子数密度  $n_c$  与温度  $T$  成正比.

若  $z_0 = 1$  时,由“虚构”系统逸度的定义  $z_0 = e^{\mu/kT}$  可知,“虚构”系统粒子的化学势  $\mu$  为零,此时

$$f_n(1) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \zeta(n), \quad (16)$$

式中  $\zeta(n)$  为黎曼  $\zeta$  函数.当  $n \leq 1$  时,  $\zeta(n)$  是发散的,即  $f_{1/2}(1) \rightarrow \infty$ , 所以  $n_c = 0$ .这说明,当“虚构”系统对应的  $z_0 = 1$ , 即“虚构”系统粒子的化学势  $\mu$  为零时,无外场作用且存在吸引相互作用的费米气体将会出现不稳定性.

若  $z_0 \gg 1$ , 由于<sup>[23]</sup>

$$f_{3/2}(z_0) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z_0)^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z_0)^2 + \dots\right] \quad (17)$$

$$f_{1/2}(z_0) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\ln z_0)^2 \left[1 - \frac{\pi^2}{24} (\ln z_0)^2 + \dots\right], \quad (18)$$

此时临界粒子数密度的表达式可近似表示为

$$n_c \approx \frac{4\pi mkT}{3|a|h^2} \ln z_0 \left[1 + \frac{\pi^2}{6} (\ln z_0)^2\right]. \quad (19)$$

(19) 式表示了“虚构”系统对应为简并状态时,无外场且存在吸引相互作用的费米系统的临界粒子数密度.注意到在简并条件下,“虚构”系统有较好的近似关系<sup>[23]</sup>

$$kT \ln z_0 = \mu \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right], \quad (20)$$

式中,  $\mu$  为“虚构”系统粒子的化学势,  $\varepsilon_F$  为“虚构”系统费米能.这样 (19) 式可进一步表示为

$$n_c \approx \frac{4\pi m}{3|a|h^2} \varepsilon_F \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]. \quad (21)$$

比较 (15) 与 (21) 式可以看出,在“虚构”系统处于经典近似与简并的不同情况下,温度对弱吸引相互作用费米系统临界粒子数密度的影响不同.若“虚构”系统对应状态满足经典近似时,实际系统的  $n_c$  与温度  $T$  成正比,若“虚构”系统为简并的费米气体时,由于

$$\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2 \ll 1,$$

故温度对于实际系统临界粒子数密度的影响较小,仅以微扰形式出现.

### 3.2. 吸引相互作用及粒子质量对于 $n_c$ 的影响

由 (11) 式可知,费米子的质量愈大其临界粒子数密度亦愈大,质量愈小其临界粒子数密度亦愈小.另外,采用赝势法时,认为稀薄的非理想气体系统中粒子是通过具有有限范围的势发生相互作用的,因而并不存在任何二体束缚态<sup>[23]</sup>,即本文所得判据不能用于  $a \rightarrow -\infty$  的束缚态.在有限范围势散射的情况下,  $s$  波散射长度  $a$  与相互作用势有关.  $a < 0$  意味着吸引相互作用,  $|a|$  增大,表明吸引相互作用势阱深度增加,吸引相互作用增强.因此 (11) 式反映出的  $n_c$  与  $|a|$  成反比,说明吸引相互作用愈强,  $n_c$  就愈小,系统愈容易出现不稳定性.可见,粒子质量较小,吸引相互作用较强的非理想费米气体系统,较容易出现不稳定状态;而粒子质量较大,吸引相互作用较弱的非理想费米气体系统,不易出现不稳定状态.

## 4. 结 论

研究表明,无外场时理想费米气体和存在弱相互排斥作用的费米气体是稳定的.存在弱吸引相互作用的费米气体,在温度一定、 $n > n_c$  或在粒子数密度一定、 $T < T_s$  时,系统将会呈现不稳定性.(10), (13) 式可作为其不稳定性的判据.

[1] Anderson M H, Enscher J R, Methews M R et al 1995 *Science* **269** 198

[2] Davis K B, Mewes M O, Anderson M R et al 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[3] Bradley C C, Sackett C A, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[4] Mealexande W I, Abraham E R I, Ritchie N W M et al 1995 *Phys. Rev. A* **51** R871

- [ 5 ] Cataliotti F S , Cornell E A , Fort C *et al* 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1136
- [ 6 ] Demarco B , Jin D S 1999 *Science* **285** 1703
- [ 7 ] Ho T L , Mueller E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 160404
- [ 8 ] O'Hara K M , Hemmer S L , Gehm M E *et al* 2002 *Science* **298** 2179
- [ 9 ] Modugno G , Roati G , Riboli F *et al* 2002 *Science* **297** 2240
- [ 10 ] Regal C A , Jin D S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 230404
- [ 11 ] Bartenstiiin M , Altmeyer A , Riedl S *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 120401
- [ 12 ] Zwierlein M W , Stan C A , Schunck C H *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 120403
- [ 13 ] Kinast J , Hemmer S L , Gehm M E *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 150402
- [ 14 ] Yan K Z , Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 ( in Chinese )  
[ 闫珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909 ]
- [ 15 ] Ruprecht P A , Edwards M , Burnett K *et al* 1996 *Phys. Rev. A* **54** 4178
- [ 16 ] Kagan Y , Shlyapnikov G V , Waltraven J T M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2670
- [ 17 ] Ueda M , Leggett A J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1576
- [ 18 ] Baym G , Pethick C J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 6
- [ 19 ] Dodd R J , Edwards M , Williams C J *et al* 1996 *Phys. Rev. A* **54** 661
- [ 20 ] Shuryak E V 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3151
- [ 21 ] Lin W M , Fan W B , Zheng W M *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [ 22 ] Sun G Z , Chen L X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 984 ( in Chinese )  
[ 苏国珍、陈丽璇 2004 物理学报 **53** 984 ]
- [ 23 ] Pathric R K 1972 *Statistical Mechanics* ( Oxford , New York , Toronto , Sydney , Braunschweig : Pergam ) p220 ,300

## The criterion of instability for a weakly interacting Fermi gas<sup>\*</sup>

Yuan Du-Qi

( Department of Physics , Baoji College of Arts and Science , Baoji 721007 , China )

( Received 27 September 2005 ; revised manuscript received 9 January 2006 )

### Abstract

Using the equation of free energy for a weakly interacting Fermi gas , the stability of a weakly interacting Fermi gas in the absence of external potential is studied by means of thermodynamics . The instability arising from the weakly attractive interacting of a Fermi gas is pointed out . The particle density criterion and the temperature criterion of instability for the imperfect Fermi gas with weakly attractive interaction are given , and the dependance of the critical density of particles on the temperature and the mass of particle and the attractive interaction is discussed .

**Keywords** : Fermi gas , interacting , criterion of instability

**PACC** : 0530F , 1230

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Program of Education Bureau of Shaanxi Province , China ( Grant No.06JK358 ) and the Scientific Research Foundation of Baoji College of Arts and Science , China ( Grant No.ZK2515 ).