第 55 卷 第 8 期 2006 年 8 月
1000-3290/2006/55(08)/3916-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.8, August, 2006

供应链型网络中双幂律分布模型*

郭进利

(上海理工大学管理学院,上海 200093)

(2005 年 12 月 8 日收到;2006 年 4 月 25 日收到修改稿)

考察了供应链网络的基本特征,提出了节点到达过程是更新过程、新增入边和出边数是具有 Bernoulli 分布随机变量的供应链型有向网络. 研究了这类网络节点的瞬态度分布和稳态平均度分布. 利用更新过程理论对这类网络进行了分析,获得了网络节点瞬态度分布和网络稳态平均度分布的解析表达式. 分析表明,虽然这类网络节点的稳态度分布不存在,但是网络的稳态平均度分布具有双向幂律性.

关键词:复杂网络,入度,出度,度分布

PACC:0540J,8980H

1. 引 言

近年来,物理学领域关于复杂网络的研究非常活跃[1—16],研究者来自计算机网络、图论、统计物理学、社会学以及经济学等各个不同领域. Albert 和 Barabási 在文献[6]中对复杂网络研究进行了很好综述. 他们在文献[6]的展望中指出:许多网络模型(包括小世界网络和演化网络)忽略了网络的有向性;然而,WWW 网表明,出边和入边会遵从不同的标度律. 在这一方面,Barabási-Albert 模型(BA 模型)[4]仅仅解释了入边的度分布,因为根据它的构造规则,每一个结点都有 m 条出边,所以出边的度分布是 δ 函数. 这些有向模型的特征是令人感兴趣的工作. 文献[6]还指出:大多数网络是动态过程,无标度拓扑结构在决定复杂网络同步时非常重要. 网络同步近来已成为复杂网络研究的一个热点领域. 文献[8]研究了无标度动态网络同步性质. 文献[9—11]提出了广义时变复杂网络模型,给出了复杂动力网络的同步准则.

文献[4,5]提出的 BA 模型是著名的无向复杂网络模型,目的是试图建立无标度网络的理论基础. 但是,由于 BA 模型太理想化,而不能很好地刻画现实生活中的复杂网络. 为此,很多学者对 BA 模型进行了推广或修正[2—7]. Barabási 等的主要贡献是提出了无向复杂网络的增长和择优连接机制[4,5],而他们关于 BA 模型度分布的分析有逻辑错误,这是因为他们在分析过程中假定了节点在 $t=1,2,\cdots$ 等时间间隔离散地到达网络,并且假定了到达时间服从均匀分布[4—7]. 文献[17]对这个错误进行了论证.

Internet、交互式 Web 应用以及电子商务的出现,彻底改变了商业方式,也改变了供应链结构,传统经销商将消失,其功能将被全球网络电子商务所取代. 多层的供应链将转变为基于 Internet 开放式全球网络供应链. 在供应链这个复杂网络上企业都具有双重身份,既是客户又同时是供应商,该复杂网络的节点是公司,供应被看成入度,销售被看成出度. 这个复杂网络有四个基本特点:(1)有向网络;(2)节点是随机增长的(并不是等时间间隔的增加);(3)节点间是择优连接;(4)新节点具有入边和出边. 许多公司在注册之前已经有了潜在的客户和供应商,当这个公司在进入供应链网络时,它同时具有了入边和出边,目前对这样有向复杂网络的拓扑结构还不清楚.

本文考察了网络节点连续时间增加的供应链网络特征,提出了节点到达过程是更新过程、新增入边和出边数是具有 Bernoulli 分布的供应链型有向网络. 研究了这类网络的度分布和稳态平均度分布. 我们利用更新过程理论对这类网络进行了分析,获得了度分布的解析表达式. 研究表明,供应链型有向网

* 上海市重点学科建设基金(批准号:T0502)和上海市教育委员会自然科学基金(批准号:05EZ35)资助的课题.

络具有双向幂律度分布，并且稳态平均入度和出度分布的幂律指数在区间$(2,+\infty)$内.

2. 模型的描述

2.1. BA 模型

40 多年前 Price 在文献[18]中提出了"积累优势"的机制，此机制可用以解释许多网络中存在的幂律分布，如引文网、WWW 网、协作关系网、Internet 和其他技术网络.然而，当时 Price 的工作在社会科学领域很少为人所知，他的"积累优势"的观点也没有在网络研究中流行起来，直到 Barabási 和 Albert 重新发现这一机制[4,5]，并提出了与 Price 类似的网络增长模型，"积累优势"的机制才被人们所接受[19].

BA 模型是指满足如下两条规则的网络：(1)开始于较少的节点数 m_0，在每个时间间隔增添一个具有 $m(m\leqslant m_0)$条边的新节点，连接这个新节点到 m 个不同的已经存在于网络中的节点；(2)在选择新节点连接时，新节点连接到节点 i 的概率 W 取决于节点 i 的度数 k_i，即满足

$$W(k_i)=\frac{k_i}{\sum_j k_j}.$$

2.2. 供应链型有向模型

BA 模型的增长机制是节点在 $t=1,2,\cdots$等时间间隔离散地进入系统，在文献[4—6]关于 BA 模型的分析中一直是这样假定的，但是在现实复杂网络中节点是随机到达的.

令 $\{X_n\mid n\geqslant 1\}$独立同分布的非负随机变量，其共同分布为

$$P\{X_i\leqslant x\}=A(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x \quad (i=0,1,2,\cdots),$$

$$\frac{1}{\lambda}\equiv\int_0^\infty x\mathrm{d}A(x)=E[X_i],$$

并假设 $\lambda>0$，$A(t)$有连续单调的正密度函数 $f(t)$.我们引进

$$t_0=0,$$

$$t_n=\sum_{i=1}^n X_i \quad (n\geqslant 1),$$

$$N(t)=\max\{n\mid t_n\leqslant t\}.$$

定义　随机过程 $\{N(t)\mid t\geqslant 0\}$被称为更新过程[13]，简称更新过程 $N(t)$.如果 $\lambda>0$，$f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$，$\{N(t)\mid t\geqslant 0\}$被称为具有率 λ 的 Poisson 过程[13] $N(t)$.

对于更新过程 $\{N(t)\mid t\geqslant 0\}$，$\mu(t)=E[N(t)]$表示区间$[0,t)$的平均更新数，对于具有率 λ 的 Poisson 过程，我们从文献[13]知道，

$$\mu(t)=E[N(t)]=\lambda t.$$

引理[13]　对于更新过程 $\{N(t)\mid t\geqslant 0\}$，有

$$\mu(t)=\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \quad (t\geqslant 0),$$

$$u(t)=f(t)+\int_0^t f(t-s)\mu\mathrm{d}s \quad (t\geqslant 0).$$

供应链型一般增长有向模型(G 有向模型)是指满足以下两条规则的网络.(1)开始带有较少的节点数 m_0，节点的到达过程是更新过程 $N(t)$.在 t 时刻，当一个新节点进入网络时，此节点具有 $m(m\leqslant m_0)$条边(与网络中已有的 m 个节点连通)，并且入边数 l 服从 Bernoulli 分布 $B(m,q)$，出边数 l 服从 Bernoulli 分布 $B(m,1-q)$，其中 $q\in(0,1)$.(2)当选择网络中已有的节点与新节点连接时，如果新节点是始点，则选择终点 i 的概率 W 依赖于节点 i 的入度 I_i，即满足

$$W(I_i)=\frac{I_i}{\sum_j I_j}. \tag{1}$$

如果新节点是终点，则选择始点 i 的概率 W 依赖于节点 i 的出度 O_i，即满足

$$W(O_i)=\frac{O_i}{\sum_j Q_j}. \tag{2}$$

供应链型 Poisson 有向模型是指满足以下两条规则的网络.(1) 开始带有较少的节点数 m_0，节点的到达过程是具有率 λ 的 Poisson 过程.在 t 时刻，当一个新节点进入网络时，此节点具有 $m(m\leqslant m_0)$条边(与网络中已有的 m 个节点连通)，并且入边数 l 服从 Bernoulli 分布 $B(m,q)$，出边数 l 服从 Bernoulli 分布 $B(m,1-q)$，其中 $q\in(0,1)$.(2) 当选择网络中已有的节点与新节点连接时，如果新节点是始点，则选择终点 i 的概率 W 依赖于节点 i 的入度 I_i，即满足(1)式.如果新节点是终点，则选择始点 i 的概率 W 依赖于节点 i 的出度 O_i，即满足(2)式.

如果 $f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$，供应链型 G 有向模型则为供应链型 Poisson 有向模型.

3. 节点的瞬态度分布

记 $N(t)$ 为时刻 t 网络的节点数与初始节点数 m_0 之差，

$$\mu(t) = E[N(t)].$$

因为节点的到达过程 $N(t)$ 是更新过程，由更新过程理论可知，

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t), \tag{3}$$

式中 $A_n(t)$ 表示 $A(t)$ 的 n 重卷积，$n = 1,2,\cdots$. 记 $A_0(t)$ 为

$$A_0(t) = U_1(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 0), \\ 1 & (t > 0). \end{cases}$$

我们用 t_i 表示第 i 个节点进入网络的时刻，即第 i 个节点 i 的到达时刻. I_i 表示节点 i 在时刻 t 的入度. 假定 I_i 是连续实值变量，由于 I_i 的变化率正比于概率 $W(I_i)$，从而 I_i 满足动态方程

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = (1-q)\, m\mu'(t) \frac{I_i}{\sum_j I_j}. \tag{4}$$

由于

$$\sum_j I_j = mE[N(t)] = m\mu(t),$$

因此

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \frac{I_i \mu'(t)}{\frac{1}{1-q}\mu(t)}. \tag{5}$$

解方程(5)，得

$$I_i(t) = I_i(t_i)\left(\frac{\mu(t)}{\mu(t_i)}\right)^{1-q}. \tag{6}$$

由(6)式，得

$$P(I_i(t) < k) = P\left(\mu(t_i) > \left(\frac{I_i(t_i)}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}} \mu(t)\right).$$

因为 $\mu(t) = E[N(t)]$ 是 $[0, t)$ 内节点到达的平均数，从引理知 $\mu(t) = E[N(t)]$ 是严格单调递增的，因此

$$P(I_i(t) < k) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} \times P\left\{t_i > \mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}} \mu(t)\right)\right\}.$$

从 $t_i = t_i - t_{i-1} + t_{i-1} - t_{i-2} + \cdots + t_1 - t_0$ 和更新定理[15]，我们有

$$P(I_i(t) < k) = 1 - \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} \times A_i\left(\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}} \mu(t)\right)\right). \tag{7}$$

因此，供应链型 G 有向模型瞬态入度分布为

$$p(I_i(t) = k) = \frac{\mu(t)}{(1-q)k^{1+\frac{1}{1-q}}} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} \frac{l^{\frac{1}{1-q}}}{\mu'\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)} \times \int_0^{\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)} f\left(\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right) - s\right) \mathrm{d}A_{i-1}(s) \quad (i = 1,2,\cdots). \tag{8}$$

对于出度 O_i，类似于入度 I_i，我们有供应链型 G 有向模型瞬态出度分布为

$$p(O_i(t) = k) = \frac{\mu(t)}{qk^{1+\frac{1}{q}}} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} \frac{l^{1/q}}{\mu'\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{1/q}\mu(t)\right)} \times \int_0^{\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{1/q}\mu(t)\right)} f\left(\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{1/q}\mu(t)\right) - s\right) \mathrm{d}A_{i-1}(s) \quad (i = 1,2,\cdots). \tag{9}$$

从 $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ 和 Poisson 理论，我们有

$$\mu(t) = E[N(t)] = \lambda t,$$

$$\mu'\left(\frac{m^2}{k^2}\mu(t)\right) = \lambda,$$

$$\int_0^{\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)} f\left(\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right) - s\right) \mathrm{d}A_{i-1}(s) = \lambda \exp\left(-\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\lambda t\right) \frac{\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\lambda t\right)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

由(8)式可知供应链型 Poisson 有向模型瞬态入度分布为

$$p(I_i(t) = k) \approx \frac{\lambda t}{(1-q)k^{1+\frac{1}{1-q}}} \times \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} l^{\frac{1}{1-q}} \times \exp\left(-\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\lambda t\right) \frac{\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\lambda t\right)^{i-1}}{(i-1)!} \quad (i = 1,2,\cdots). \tag{10}$$

同理可得，供应链型 Poisson 有向模型瞬态出度分布为

$$p(O_i(t) = k) \approx \frac{\lambda t}{qk^{1+\frac{1}{q}}} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (1-q)^l q^{m-l} l^{1/q} \times \exp\left(-\left(\frac{l}{k}\right)^{1/q}\lambda t\right) \frac{\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{1/q}\lambda t\right)^{i-1}}{(i-1)!}$$

$(i = 1,2,\cdots).$ (11)

(8)和(9)式给出了网络节点 i 在时刻 t 的度分布，他们不仅与时间有关，也与节点的到达过程有关. 图 1 给出了当 $t = 10000$，$i = 100$，$m = 16$，$\lambda = 1/2$ 时，不同 q 的供应链型 Poisson 有向网络节点的度分布双对数图.

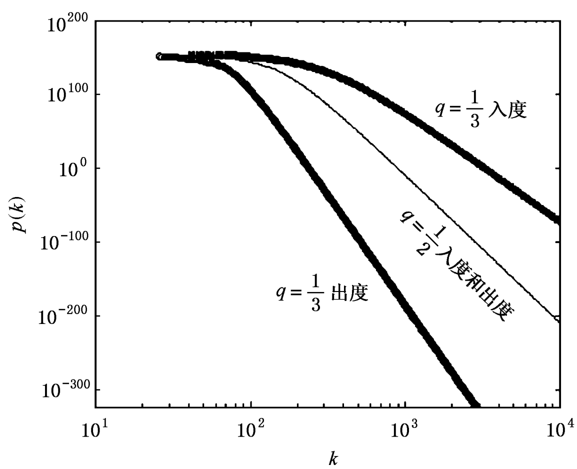

图 1　供应链型 Poisson 有向网络节点的瞬态度分布　$t = 10000$，$i = 100$，$m = 16$，$\lambda = 1/2$. $q = 1/2$ 时出度分布线和入度分布线相重合

4. 网络的稳态平均度分布

以上我们讨论了网络节点的瞬态度分布，从图 1 可见网络节点的瞬态入度和出度分布并不是幂律分布. 实际上，从(10)和(11)式可得

$$\lim_{t\to+\infty} p(I_i(t) = k) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda t}{(1-q)k^{1+\frac{1}{1-q}}} \times \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l} q^l (1-q)^{m-l} l^{\frac{1}{1-q}} \times \exp\left(-\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\lambda t\right)\frac{\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\lambda t\right)^{i-1}}{(i-1)!} = 0$$
$$(i = 1,2,\cdots), \tag{12}$$

$$\lim_{t\to+\infty} p(O_i(t) = k) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{qk^{1+\frac{1}{q}}}\lambda t \times \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(1-q)^l q^{m-l} l^{\frac{1}{q}} \times \exp\left(-\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{q}}\lambda t\right)\frac{\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{q}}\lambda t\right)^{i-1}}{(i-1)!} = 0$$
$$(i = 1,2,\cdots). \tag{13}$$

由(12)和(13)式可知，供应链型 Poisson 有向网络任何节点 i 的稳态入度和出度分布不存在. Albert 和 Barabási 在文献[6]中混淆了节点 i 的稳态度分布和网络的稳态平均度分布的概念，其实，Dorogovtsev 等在文献[16]中讨论的是稳态平均度分布.

由(8)式和 Live 定理，我们有

$$p(k) \approx \lim_{t\to\infty}\frac{1}{E[N(t)]}\sum_{i=1}^{\infty} p(I_i(t) = k)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1-q)k^{1+\frac{1}{1-q}}}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}q^l(1-q)^{m-l} \times \frac{l^{\frac{1}{1-q}}}{\mu'\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)} f\left(\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)\right)\right.$$
$$+ \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}q^l(1-q)^{m-l}\frac{l^{\frac{1}{1-q}}}{\mu'\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)}$$
$$\left.\times\int_0^{\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right)} f\left(\mu^{-1}\left(\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{1-q}}\mu(t)\right) - s\right)\mathrm{d}\mu(s)\right\}. \tag{14}$$

再由基本更新定理、关键更新定理[15]及 $\mu(t) = E[N(t)]$ 的严格单调递增性，从(14)式可知供应链型 G 有向模型稳态平均入度分布为

$$p(k) \approx \frac{1}{(1-q)k^{1+\frac{1}{1-q}}} \times \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}q^l(1-q)^{m-l}l^{\frac{1}{1-q}}. \tag{15}$$

同理可得，供应链型 G 有向模型稳态平均出度分布为

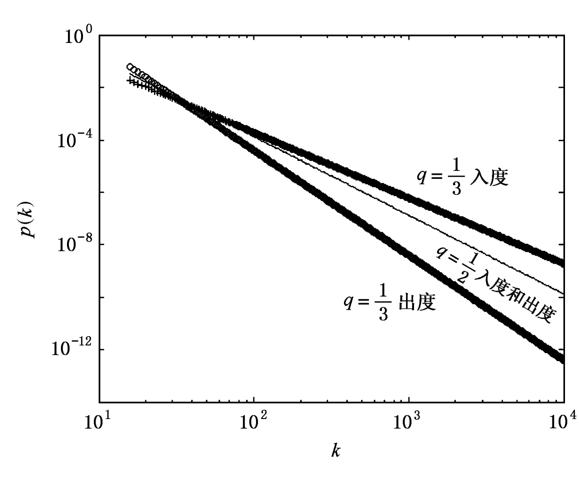

图 2　供应链型 Poisson 有向网络稳态平均度分布　$m = 16$，$\lambda = 1/2$. $q = 1/2$ 时稳态平均出度分布线和稳态平均入度分布线相重合

$$p(k) \approx \frac{1}{qk^{1+\frac{1}{q}}} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (1-q)^l q^{m-l} l^{\frac{1}{q}}. \quad (16)$$

综上所述,供应链型 G 有向模型稳态平均入度分布和供应链型 G 有向模型稳态平均出度分布的表达式分别为(15)和(16)式.可见,这类网络的稳态平均入度分布和稳态平均出度分布是幂律分布.当 $m=16$,$\lambda=1/2$ 时,图 2 给出了不同 q 的供应链型 Poisson 有向网络节点的稳态平均度分布的双对数图.

5. 结 论

本文提出了连续时间增加的供应链型有向网络模型.研究表明,供应链型 G 有向模型的稳态平均入度分布和稳态平均出度分布是与渐近时间无关的(且与系统规模 $N=\mu(t)+m_0$ 无关),尽管网络在持续不断地增长,但是网络节点平均度分布却达到一个稳定的状态.虽然此网络的稳态平均入度和出度分布与节点的到达过程无关,但是瞬态入度和出度分布是依赖于节点的到达时间间隔分布 $A(t)$ 的.表明这类有向网络具有双向幂律度分布,稳态平均入度和稳态平均出度分布是指数分别为 $1+\frac{1}{1-q}$ 和 $1+\frac{1}{q}$ 的幂律分布.由于 $q\in(0,1)$,因此,这个幂律指数在区间$(2,+\infty)$内,而瞬态入度和出度分布并不是幂律分布.虽然供应链型 Poisson 有向网络的稳态平均入度和稳态平均出度分布是幂律分布,但是这个网络任何节点 i 的稳态入度和出度分布并不存在.

[1] Lü J H 2004 *Syst. Eng. Theor. Prac.* **24**(4) 17 [吕金虎 2004 系统工程理论与实践 **24**(4) 17]
[2] Krapivsky P L, Rodgers G J, Redner S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5401
[3] Tadic B 2001 *Physica* A **293** 273
[4] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
[5] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica* A **272** 173
[6] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
[7] Barabási A L, Jeong H, Néda Z *et al* 2002 *Physica* A **311** 590
[8] Wang X F, Chen G 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst.* Ⅰ **49** 54
[9] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica* A **334** 281
[10] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst.* Ⅰ **51** 787
[11] Lü J H, Chen G, Cheng D 2005 *IEEE Trans. Aut. Contr.* **50** 841
[12] Li Y, Shan X M, Ren Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3695 (in Chinese) [李 炅、山秀明、任 勇 2004 物理学报 **53** 3695]
[13] He S W 1990 *Renewal Process Theory* (Shanghai: East China Normal University Press) (in Chinese) [何声武 1990 更新过程理论 (上海 华东师范大学出版社)]
[14] Ross S M 1983 *Stochastic Processes* (New York: John Wiley & Sons Inc.)
[15] Cohen J W 1982 *The Single Server Queue* (Amsterdam: North-Holland)
[16] Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4633
[17] Guo J L, Bai Y Q 2006 *DCDIS* B **13** 520
[18] Price D J de S 1965 *Science* **149** 510
[19] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167

The bilateral power-law distribution model of supply chain networks*

Guo Jin-Li

（*Business School*，*University of Shanghai for Science and Technology*，*Shanghai* 200093，*China*）

（Received 8 December 2005；revised manuscript received 25 April 2006）

Abstract

Basing on the property of supply-chain networks，this paper proposes a randomly growing directional model whose node-arrival process is a renewal process and the number of new edges is a random variable with Bernoulli distribution. We calculate the degree distributions and stationary average degree distributions of the network model by using the renewal process theory and the continuum theory. The paper shows that the supply chain networks have bilateral power-law distributions.

Keywords：complex network，in-degree，out-degree，degree distribution

PACC：0540J，8980H

* Project supported by the Foundation of Priority Academic Discipline of Shanghai，China（Grant No. T0502）and the Natural Science Foundation of Education Committee of Shanghai，China（Grant No. 05EZ35）.