

一个新混沌系统及其电路仿真实验

刘 凌¹⁾ 苏燕辰¹⁾ 刘崇新²⁾

1) 西南交通大学机械工程系, 成都 610031)

2) 西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

(2005 年 10 月 23 日收到, 2006 年 4 月 10 日收到修改稿)

提出了一个新的混沌系统, 对其基本动力学特性进行了研究. 同时运用 EWB 软件对实现该混沌系统的振荡器电路进行了仿真实验验证.

关键词: 新型混沌系统, 动力学行为, 电路实现

PACC: 0545

1. 引 言

混沌是发生在确定性系统中的一种不确定行为, 混沌状态是平衡状态、周期状态、拟周期状态等以外的第四状态. 自从麻省理工学院的 Lorenz 于 20 世纪 60 年代在数值实验中偶然发现第一个混沌吸引子以来, Lorenz 系统作为第一个混沌的物理和数学模型, 成为后人研究混沌理论的出发点和基石^[1]. 1999 年陈关荣在混沌系统反控制中发现了一个与 Lorenz 系统并不拓扑等价的新混沌吸引子 Chen 系统^[2,3]. 2002 年吕金虎等^[4]进一步发现了 Lü 系统. 以上三种系统属于三种不同类型. 2004 年, 刘崇新等^[5]又提出一种新的三维自治混沌系统, 这个新的系统亦属于 Lorenz 系统族.

本文提出了一个新的混沌系统, 我们将对它的奇怪吸引子、Lyapunov 指数、分维数、连续功率谱等基本动力学特性和复杂的动力学行为进行研究. 同时运用 EWB 软件对实现该新型混沌系统的电路仿真进行了实验验证.

近年来, 随着人类对混沌吸引子现象的不断探索, 对其动力学行为和基本特性的逐步了解, 混沌在工程领域的应用已取得了一定进展. 在图像数据加密、保密通信、电力电网动态分析和保护、机械振动故障诊断、电子振荡发生器设计、信号检测与处理中得到了有效的应用. 在这些应用中, 我们需要有目的地控制混沌或者加强已存在的混沌行为, 通过电路设计来产生混沌信号和实现混沌动力学行为^[6,7]. 随着混沌理论的不断发展和完善, 混沌将会在很多领

域里得到广泛的应用^[8,9].

2. 基本分析

新三维自治混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(z - x), \\ \dot{y} &= bx - dx^2, \\ \dot{z} &= kxy - cy - gz. \end{aligned} \quad (1)$$

我们令 $a = 8, b = 40, k = 1, d = 1, c = \frac{10}{3}, g = 4$, 显然系统(1)仅存在两个非线性项, 在这个系统中状态变量分别为 x, y, z . 为了求其平衡点, 我们令

$$\begin{aligned} a(z - x) &= 0, \\ bx - dx^2 &= 0, \\ kxy - cy - gz &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

求解(2)式, 可得系统的两个平衡点: $O(0, 0, 0)$ 和 $E\left(40, \frac{48}{11}, 40\right)$.

在平衡点 $O(0, 0, 0)$, 对系统(1)进行线性化得 Jacobian 矩阵为

$$\begin{aligned} J_o &= \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ b - 2dx & 0 & 0 \\ ky & -c + kx & -g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 0 & 8 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

为了求系统相应的特征根, 令

$$\det(J_o - \lambda I) = 0.$$

得其特征根为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -14.7390, \\ \lambda_2 &= 1.3695 + j8.3961, \\ \lambda_3 &= 1.3695 - j8.3961.\end{aligned}$$

λ_1 为负实根, 而 λ_2 和 λ_3 是一对具有正实部的共轭复根, 因此平衡点 $O(0, 0, 0)$ 为鞍焦点. 由此可见它是不稳定的.

在平衡点 $E\left(40, \frac{48}{11}, 40\right)$, 同样对系统 (1) 进行线性化得 Jacobian 矩阵为

$$J_E = \begin{bmatrix} -a & 0 & a \\ b - 2dz & 0 & 0 \\ ky & -c + kx & -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -40 & 0 & 0 \\ \frac{48}{11} & \frac{110}{3} & -4 \end{bmatrix}.$$

为了求系统相应的特征根, 令

$$\det(J_E - \lambda I) = 0.$$

得其特征根为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -27.5568, \\ \lambda_2 &= 7.7784 + j19.1124, \\ \lambda_3 &= 7.7784 - j19.1124.\end{aligned}$$

λ_1 为负实根, 而 λ_2 和 λ_3 是一对具有正实部的共轭复根, 由此知平衡点 $E\left(40, \frac{48}{11}, 40\right)$ 也为鞍焦点. 可见它们同样是不稳定的.

从上述分析可知, 系统 (1) 中的两个平衡点都是不稳定的鞍焦点. 为了研究其非线性动力学行为, 我们应用 Matlab 进行了数值仿真. 新系统混沌吸引子的三维图像如图 1 所示. 此混沌吸引子在 $x-z$ 平面相图如图 2 所示. 在相图中其轨线在特定的吸引域内具有遍历性. 这个混沌系统的奇怪吸引子与 Lorenz 发现的第一个蝴蝶型吸引子形状完全不同, 也与近年来发现的 Chen 吸引子、Lü 吸引子以及最近报道的 Liu 吸引子不同, 它们均有三个平衡点. 而本文提出的这个新系统仅存在两个平衡点, 因此这个新系统的拓扑结构与上述发现的系统拓扑结构完全不同.

由混沌理论可知, 在状态空间混沌吸引子的相邻轨线之间呈现出彼此排斥的趋势, 并以指数速率相互分离, 而 Lyapunov 指数是定量描述轨线收缩或扩张的量. 这个系统正的 Lyapunov 指数 $\lambda_{11} = 0.950826$, 另一个 Lyapunov 指数 $\lambda_{12} = 0$, 而负的

Lyapunov 指数 $\lambda_{13} = -12.9498$, 从而我们可以得到新系统的 Lyapunov 维数为

$$\begin{aligned}D_L &= j + \frac{1}{|\lambda_{1j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{1i} \\ &= 2 + \frac{(\lambda_{11} + \lambda_{12})}{\lambda_{13}} \\ &= 2 + \frac{0.950826 + 0}{|-12.9498|} = 2.073.\end{aligned}$$

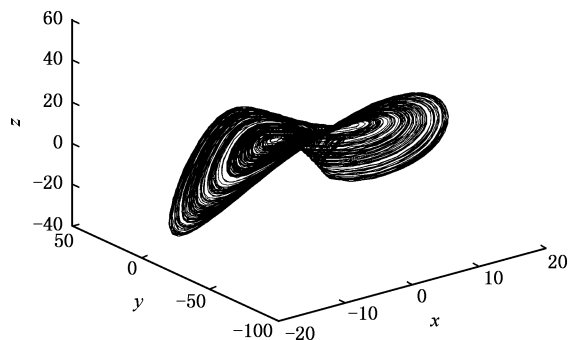


图 1 系统的三维奇怪吸引子

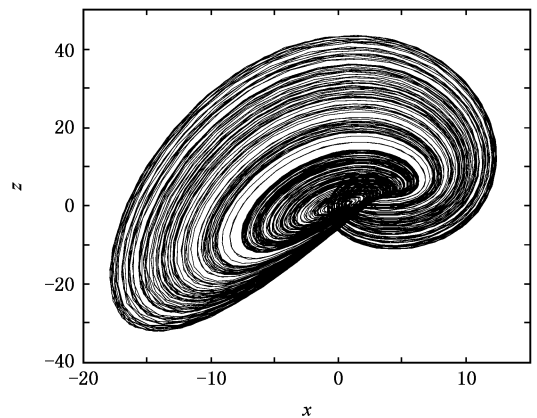


图 2 $x-z$ 平面奇怪吸引子

系统混沌振荡的时域波形具有非周期性, 解的流对初始值极为敏感, 它的时域波形如图 3 所示. 系统的频谱是连续谱, 其频谱图如图 4 所示.

由此可见, 这个新系统的维数是分数维数.

这是一个耗散系统. 由方程组 (1) 可得

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\ &= -a - g = -12.\end{aligned}$$

这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个体积元均以指数率 -12 收敛到零. 事实上, 系统的轨迹最终渐近地运动到一个特定的零体积的极限集中, 即一个吸引子上.

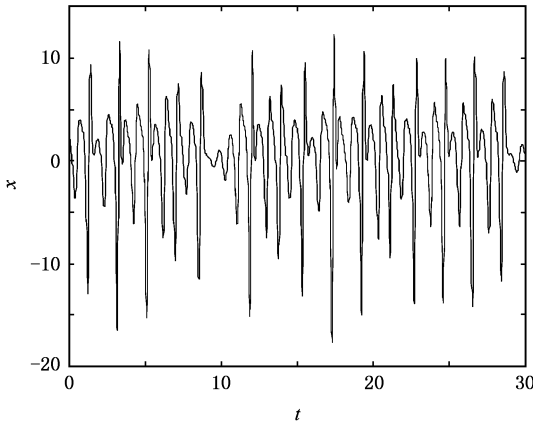


图 3 x 的时域波形图

3. 系统的振荡器电路实现

我们对本文所提出的系统(1)进行了振荡器电路设计,它由三个部分组成,此电路的设计参考了文献[10].运算放大器、模拟乘法器 AD633、线性电阻和电容器用来执行加、减、乘法运算,并将三个状态变量 x, y 和 z 连接成一个整体,其电路如图 5 所示.

系统的电路方程为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{C_1} &= \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} U_{C_3} - \frac{R_6 R_3}{R_2 R_5 R_4 C_1} U_{C_1} \\ \dot{U}_{C_2} &= \frac{R_8}{R_7 R_{10} C_2} U_{C_1} - \frac{R_{21} R_8 R_6^2}{10 R_{20} R_9 R_{10} R_5^2 C_2} U_{C_1}^2 \\ \dot{U}_{C_3} &= \frac{R_{12}}{10 R_{11} R_{13} C_3} U_{C_1} U_{C_2} - \frac{R_{19} R_{12}}{R_{18} R_{17} R_{13} C_3} U_{C_2} \\ &\quad - \frac{R_{16} R_{12}}{R_{14} R_{15} R_{13} C_3} U_{C_3} \end{aligned} \quad (3)$$

这里电阻值分别取为

- $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$,
- $R_3 = 8 \text{ k}\Omega$,
- $R_4 = 100 \text{ k}\Omega$,
- $R_5 = R_6 = 1 \text{ k}\Omega$,
- $R_8 = 4 \text{ k}\Omega$,
- $R_7 = R_{10} = 10 \text{ k}\Omega$,
- $R_{18} = R_{19} = 2 \text{ k}\Omega$,
- $R_{17} = 3 \text{ k}\Omega$,
- $R_{11} = 1 \text{ k}\Omega$,
- $R_{12} = 3 \text{ k}\Omega$,

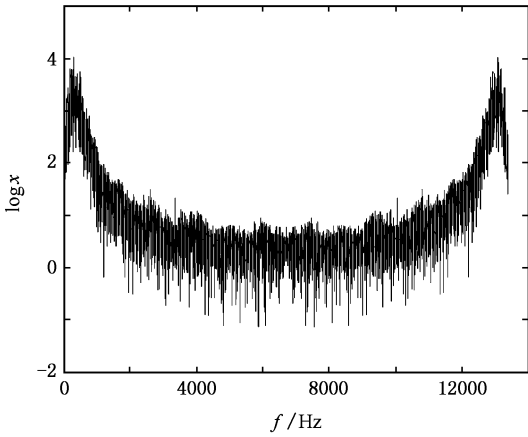


图 4 系统的频谱图

通过上述理论分析和数值仿真,证明这个新系统确实是一个新的混沌系统.

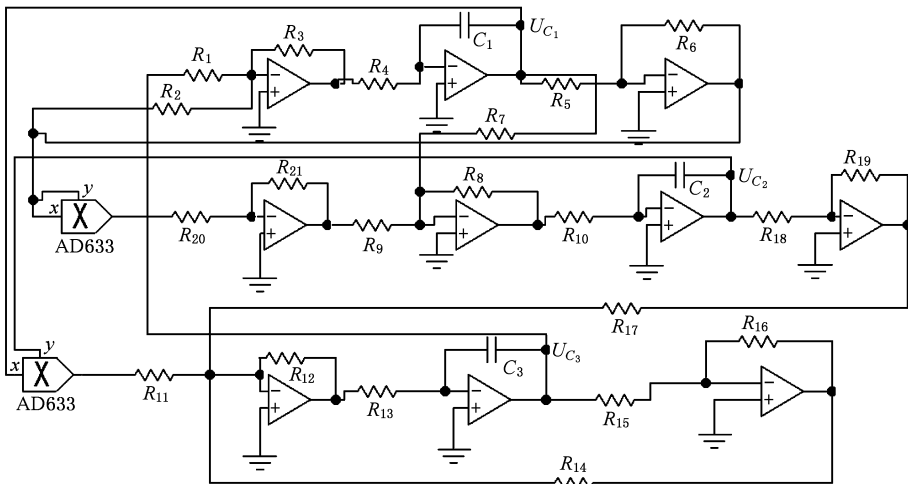


图 5 系统(1)的振荡器电路图

$$\begin{aligned}
 R_{13} &= 100 \text{ k}\Omega, \\
 R_{20} &= R_{21} = 1 \text{ k}\Omega, \\
 R_9 &= 40 \text{ k}\Omega, \\
 R_{15} &= 1 \text{ k}\Omega, \\
 R_{16} &= 4 \text{ k}\Omega, \\
 R_{14} &= 10 \text{ k}\Omega.
 \end{aligned}$$

电容值分别取为

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = 1 \mu\text{F}, \\
 C_3 &= 3 \mu\text{F}.
 \end{aligned}$$

我们令 $U_{C_1} = x$, $U_{C_2} = y$, $U_{C_3} = z$, 则(1)和(3)式是等价的. 我们采用 EWB 软件平台对电路进行了仿真实验, 仿真结果如图 6 和图 7 所示.

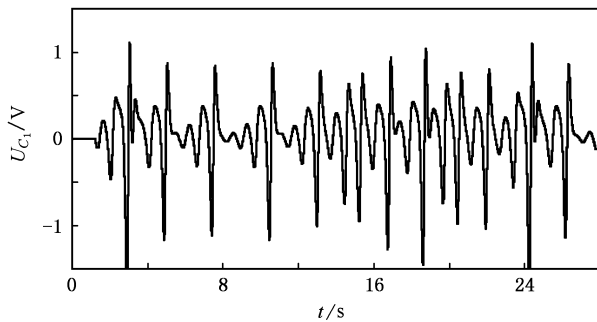


图 6 EWB 振荡器电路仿真实验 $U_{C_1}(t)$ 时域波形

由于 EWB 软件采用的是实际电路元件模型, 所以其仿真实验与实际电路实验应该是基本符合的, 因而仿真实验结果是有效的. 我们可以看到, EWB 仿真实验结果与数值仿真结果是一致的.

通过上述理论分析和仿真实验证实了本文

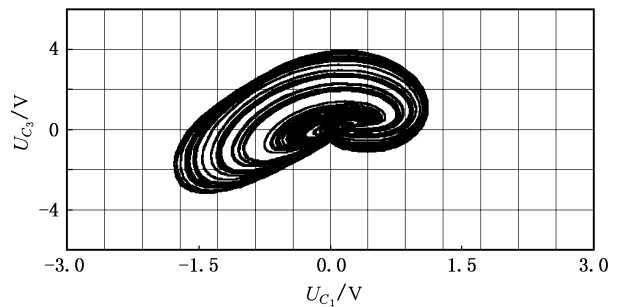


图 7 x - z 平面 EWB 振荡器电路仿真实验相图

提出的非线性系统是一个混沌系统, 它具有一切混沌系统的共有特征: 确定性、有界性、对初值的极端敏感性、长期不可预测性、正的最大 Lyapunov 指数、一定频率范围内的连续谱和遍历性等.

4. 结 论

通过以上理论分析和计算机仿真, 我们得出以下结论.

(1) 本文提出的混沌系统拓扑结构简单, 仅仅具有两个平衡点.

(2) 在这个新的混沌系统中存在着复杂的混沌动力学行为, 它具有一切混沌系统的共有特性.

(3) 这个系统可以用电子振荡器电路来实现, 它在电子测量、保密通信等领域中具有潜在的应用价值.

如何控制这个系统以及深入研究它的动力学行为是作者今后将要进行的工作.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [2] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
 [3] Celikovskiy S, Chen G 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1789
 [4] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z et al 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
 [5] Liu C X, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 1031
 [6] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in

- Chinese)[陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
 [7] Tan W, Wang Y N, Zeng Z F et al 2004 *Chin. Phys.* **13** 459
 [8] Guan X P, He Y H, Wu J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2718 (in Chinese)[关新平、何宴辉、邬晶 2003 物理学报 **52** 2718]
 [9] Chen Z S, Sun K H, Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2580 (in Chinese)[陈志盛、孙克辉、张泰山 2005 物理学报 **54** 2580]
 [10] Han F L, Wang Y, Yu X H et al 2004 *Chaos Solitons Fract.* **21** 69

A new chaotic system and its circuit emulation

Liu Ling¹⁾ Su Yan-Chen¹⁾ Liu Chong-Xin²⁾

1) *Department of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*

2) *College of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

(Received 23 October 2005 ; revised manuscript received 10 April 2006)

Abstract

In this paper a new chaotic system is presented. Some basic dynamical properties are investigated. The oscillator circuit of a new chaotic system realized is simulated using EWB.

Keywords : new chaotic system , dynamical behavior , circuit realization

PACC : 0545