

一种新的分段混沌系统的同步控制*

单 梁 李 军 王 执 铨

(南京理工大学自动化系, 南京 210094)

(2005 年 11 月 21 日收到 2006 年 4 月 10 日收到修改稿)

利用状态观测器思想构造驱动和响应系统, 实现了一个新近提出的分段线性混沌系统的同步控制, 并且推导了两个不同初值的系统实现同步的充分条件. 理论分析说明该方法对原系统结构没有特殊要求, 无需求解 Lyapunov 函数, 适合应用于分段混沌系统. 仿真实验的良好结果验证了该算法的有效性, 对于不同初值的分段系统均能实现快速同步. 同时该算法适用于一类分段混沌系统的同步控制.

关键词: 分段线性混沌系统, 状态观测器, 同步控制

PACC: 0545

1. 引 言

自从 1990 年 PC 混沌同步方法被提出, 十多年来混沌同步研究不断深入. 研究发现, 混沌同步在保密通信等领域中有着广阔的应用前景, 同步控制已成为混沌研究中的一个热点. 近年来提出了驱动-响应同步^[1]、主动-被动同步^[2]、耦合同步^[3-5]、反馈同步^[6-8]、自适应同步^[9]等多种同步方法.

上述的同步控制方法, 往往需要将控制系统分解成若干稳定的子系统^[1, 2], 或者计算 Lyapunov 函数^[7, 9]来确定控制参量. 这都给算法的应用带来了局限性. 对于分段混沌系统^[10-13], 由于结构中具有分段函数部分, 系统分解过程比连续系统的难度更大; 在不同的初值条件下系统处于不同的状态, 求取误差系统的 Lyapunov 函数也更为复杂; 同时耦合同步等方法在同步过程中容易破坏系统的混沌特性. 因此分段混沌系统同步控制的研究工作开展得比较少, 目前的研究主要集中于蔡氏系统的同步控制^[10, 11]. 蔡氏系统的主要同步思路是将分段函数项(绝对值函数部分)进行函数变换使其近似于连续混沌系统, 再使用连续系统的控制方法实现同步.

2004 年 Zheng 等^[13]提出了一个新的分段线性混沌系统, 其分段函数部分比蔡氏系统更复杂. 本文利用状态观测器思想^[14-16]实现了该分段混沌系统的同步控制. 基于状态观测器的同步方法对原系统

结构没有特殊要求, 无需求解 Lyapunov 函数. 算法中控制量都是线性项, 没有引入非线性控制项, 这符合混沌同步控制的发展趋势. 使用尽量少的能量、比较简单的结构实现系统的快速控制. 仿真实验说明该算法能够实现分段系统的快速同步, 同时适用于一类分段混沌系统.

2. 三维分段线性混沌系统

2002 年 Lü 等^[12]提出了一个分段线性混沌系统, 该系统是三维自治系统, 具有一个混沌吸引子. 系统模型表示为

$$\dot{X} = AX + f(X), \quad (1)$$

式中,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$
$$f(X) = \begin{cases} k(-x & -y & d) & (z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ 0 & & & (\text{其他}). \end{cases} \quad (2)$$

2004 年 Zheng 等^[13]在系统(1)的基础上提出了一个改进的分段线性混沌系统, 该系统具有上下两个混沌吸引子. 本文的同步研究工作主要针对这一分段系统. 系统模型表示为

$$\dot{X} = AX + f(X), \quad (3)$$

式中,

* 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20020288025)资助的课题.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$f(X) = \begin{cases} k(-x & -y & d)^T & (z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ m(-x & -y & e)^T & (z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m), \\ 0 & (\text{其他}), \end{cases} \quad (5a)$$

$$(5b)$$

$$(5c)$$

其中 a, b, c, d, e, k, m 都是实参数, 且 $k > 0, m > 0$. 参数 c, d, e 的变化决定系统平衡点的个数: 当 $-d/c > 1, e/c > 1$ 时, 系统有 3 个平衡点 $S_0(0, 0, 0), S_1(0, 0, -kd/c)$ 和 $S_2(0, 0, -me/c)$; 当 $-d/c < 1, e/c < 1$ 时, 系统只有 1 个平衡点 S_0 ; 当 $-d/c > 1, e/c < 1$ 时系统有 2 个平衡点 S_0 和 S_1 ; 当 $-d/c < 1, e/c > 1$ 时, 系统有 2 个平衡点 S_0 和 S_2 .

对系统结构的分析发现, 各个参数将直接影响系统平衡点.

(1) 当 $a > 0$ 或 $c > 0$ 时, S_0 是不稳定平衡点; 当 $a < 0$ 且 $c < 0$ 时, S_0 是稳定的平衡点; 当 $a = 0, c < 0$ 时, S_0 是一个 Hopf 分叉点.

(2) 当 $a > k$ 或 $c > 0$ 时, S_1 是不稳定平衡点; 当 $a < k$ 且 $c < 0$ 时, S_1 是稳定的平衡点; 当 $a = k, c < 0$ 时, S_1 是一个 Hopf 分叉点.

(3) 当 $a > m$ 或 $c > 0$ 时, S_2 是不稳定平衡点; 当 $a < m$ 且 $c < 0$ 时, S_2 是稳定的平衡点; 当 $a = m, c < 0$ 时, S_2 是一个 Hopf 分叉点.

该系统具有上下两个混沌吸引子, 分段函数中 (5a) 和 (5c) 式形成了 z 轴上方的混沌吸引子 (5b) 和 (5c) 式形成了 z 轴下方的混沌吸引子. 根据平衡点的分析, 系统参数满足以下条件才能保证系统是混沌的:

$$\begin{aligned} a &> 0, \quad c < 0, \\ 0 &< d < -c, \\ c &< e < 0, \\ a &< k \leq a - c, \\ a &< m \leq a - c. \end{aligned} \quad (6)$$

参数 b 不会影响系统的混沌特性^[13], 一般取 $b > 0$.

由于系统迭代过程只会在

$$z > 0, \quad z + \sqrt{x^2 + y^2} = k$$

与

$$z < 0, \quad z - \sqrt{x^2 + y^2} = -m$$

间产生分段切换变化, 因此当初始值 $z_0 > 0$ 时系统

不会运行到 z 轴下方, 反之亦然. 当参数 $k = m, d + e = 0$ 时, 系统在 z_0 取正负不同值时得到的图形关于 z 轴对称. 参数 d, e, k, m 在满足条件 (6) 式下的不同取值只影响系统图形的形状, 不改变系统的混沌特性. 图 1 为系统 (3) 取 $a = 3, b = 20, c = -20, d = 10, e = -10, k = m = 4$ 时得到的吸引子图形. 图 1 (a) 显示了系统 z 轴上方的混沌吸引子, 图 1 (b) 显示了 z 轴下方的混沌吸引子.

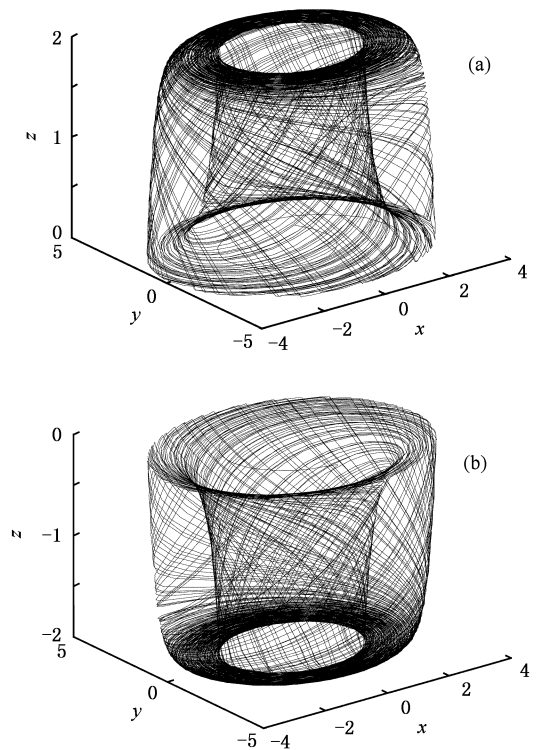


图 1 分段线性系统吸引子 (a) $z_0 > 0$ (b) $z_0 < 0$

3. 基于状态观测器的同步算法研究

3.1. 状态观测器的构造

构造自治非线性(混沌)系统的状态观测器, 其结构为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BF(X), \\ Y &= KX + F(X), \end{aligned} \tag{7}$$

式中 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $F: R^n \rightarrow R^m$ ($m \leq n$), AX 为线性部分, $F(X)$ 为非线性映射, $BF(X)$ 为非线性部分. 混沌系统的同步问题, 就是设计一个(7)式的状态观测器问题. 利用现代控制理论的状态观测器原理, 构造(7)式的状态观测器为

$$\dot{X}' = AX' + BF(X') + B(Y - Y'), \tag{8}$$

式中 X' 为状态观测器的状态, $Y' = KX' + F(X')$ 为状态观测器的输出.

3.2. 分段线性混沌系统的同步算法研究

针对分段线性混沌系统(3), 由(7)和(8)式构造的同步状态观测器结构中, 线性部分 AX 对应(4)式, 非线性部分 $F(X)$ 对应(5)式的分段函数部分. 于是误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{X} - \dot{X}' \\ &= AX + BF(X) - AX' - BF(X') \\ &\quad - B[KX + F(X) - KX' - F(X')] \\ &= AX + BKX - AX' - BKX' \\ &= (A - BK)e. \end{aligned} \tag{9}$$

不管系统的初值误差有多大, 只要使 $|A - BK|$ 的特征值均具有负实部, 则误差系统 $e \rightarrow 0$, 即 $X' \rightarrow X$, 实现混沌系统的同步.

上述的分析表明, 三维分段线性混沌系统(3)关于 x 轴和 y 轴是对称的. 设计的同步系统既要结构简单, 又要能够快速实现系统的同步, 因而同步系统

矩阵 B 和 K 取为如下形式:

$$B = [1 \ 0 \ 1]^T, \tag{10}$$

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3] \quad (k_1, k_2, k_3 \in R). \tag{11}$$

于是可得

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3] \\ &= \begin{bmatrix} a - k_1 & b - k_2 & -k_3 \\ -b & a & 0 \\ -k_1 & -k_2 & c - k_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

要确定 k_1, k_2, k_3 的取值, 使 $|A - BK|$ 的特征值均具有负实部,

$$\begin{aligned} &|\lambda - A + BK| \\ &= \left| \begin{bmatrix} \lambda - a + k_1 & -b + k_2 & k_3 \\ b & \lambda - a & 0 \\ k_1 & k_2 & \lambda - c + k_3 \end{bmatrix} \right| \\ &= (\lambda - a + k_1)(\lambda - a - k_1 - c + k_3) + bk_2k_3 \\ &\quad - k_1k_3(\lambda - a) - (b - k_2)(\lambda - c + k_3) \\ &= \lambda^3 + (k_1 + k_3 - 2a - c)\lambda^2 + [a(a - k_1) \\ &\quad + (k_1 - 2a)(k_3 - c) - k_1k_3 + (b - k_2)(b - k_2)]\lambda \\ &\quad + [a(a - k_1)(k_3 - c) + bk_2k_3 + ak_1k_3 \\ &\quad + (b - k_2)(k_3 - c)], \end{aligned} \tag{13}$$

因此误差系统(9)渐进稳定的充分条件是(13)式的特征值 λ_i ($i = 1, 2, 3$) 均具有负实部.

为了清楚地说明响应系统的具体形式(5)式分解成以下三种表达式:

$$f_x(x, y, z) = \begin{cases} -kx & (z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ -mx & (z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m), \\ 0 & (\text{其他}); \end{cases} \tag{14}$$

$$f_y(x, y, z) = \begin{cases} -ky & (z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ -my & (z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m), \\ 0 & (\text{其他}); \end{cases} \tag{15}$$

$$f_z(x, y, z) = \begin{cases} kd & (z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ me & (z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases} \tag{16}$$

当 $B = [1 \ 0 \ 1]^T$ 时, 响应系统的结构表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= ax' + by' + f_x(x', y', z') + [KX + f_x(x, y, z) \\ &\quad - KX' - f_x(x', y', z')] \\ &= ax' + by' + (k_1x + k_2y + k_3z) + f_x(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(k_1x' + k_2y' + k_3z'), \\ \dot{y}' &= -bx' + ay' + f_y(x', y', z'), \\ \dot{z}' &= cz' + f_z(x', y', z') + [KX + f_x(x, y, z) \\ &\quad - KX' - f_x(x', y', z')] \end{aligned}$$

$$= ax' + by' + (k_1x + k_2y + k_3z) + f_2(x, y, z) - (k_1x' + k_2y' + k_3z'). \quad (17)$$

响应系统的结构中虽然增加了一些控制项,却没有填入非线性控制量.这符合现在同步控制的发展趋势:使用尽量少的能量,比较简单的控制规则实现系统的快速同步.

4. 同步控制的仿真实验

由于分段线性系统中参数 a, b, c, d, e, k, m 和控制参数 k_1, k_2, k_3 均是可变参数,很难直观地分析可控条件.在(6)式的条件下,不失一般性地取(7)式的参数为 $a = 3, b = 20, c = -20, d = 10, e = -10, k = m = 4$,于是(13)式转化为

$$\begin{aligned} &|\lambda - A + BK| \\ &= \lambda^3 + (k_1 + k_3 + 14)\lambda^2 \\ &\quad + (17k_1 - 20k_2 - 6k_3 + 289)\lambda \\ &\quad + (-60k_1 - 400k_2 + 409k_3 + 8180). \end{aligned} \quad (18)$$

图2所示为控制参数 k_1, k_2, k_3 与(18)式特征值的关系.当控制参数 k_1, k_2, k_3 取值位于图2阴影部分时,(18)式的特征值均具有负实部.令 $k_1 = k_2 = 10, k_3 = 5$ (18)式的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -27.9969, \\ \lambda_2 &= -0.5016 + 14.1656i, \\ \lambda_3 &= -0.5016 - 14.1656i. \end{aligned} \quad (19)$$

针对系统(3)构造的驱动和响应系统初值分别为(0.6, 0.8, 0.5)和(4.2, 1, -2.2),采用龙格-库塔函数进行仿真,步长取为0.02,迭代500步.以 $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} < 0.05$ 作为同步

标准,系统迭代54步达到同步.图3是 $x - x', y - y', z - z'$ 的误差状态图.

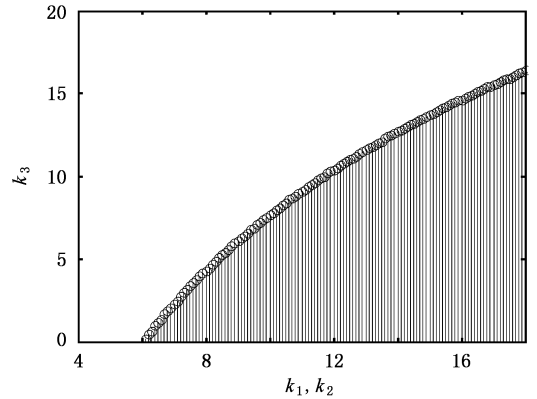


图2 控制参数位于阴影部分时 $\lambda_i < 0$

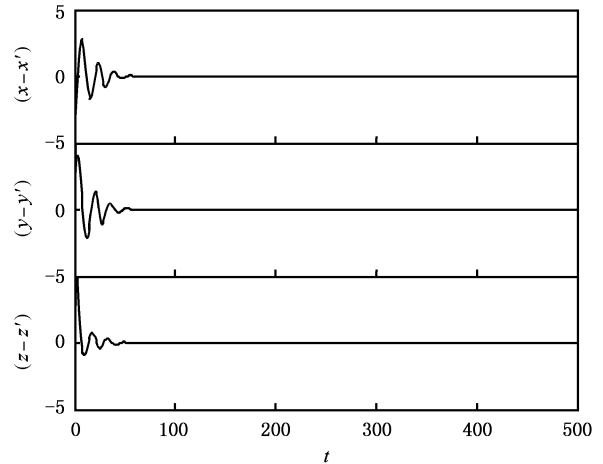


图3 基于系统(3)的系统同步误差图

表1列出了选取参数 a, b, c 不同取值和系统不同初始值下的同步速度.

表1 参数 a, b, c 不同取值下的同步速度

参数(a, b, c)	初值(x_0, y_0, z_0)	初值(x'_0, y'_0, z'_0)	k_1	k_2	k_3	同步所需步数
(3, 20, -20)	(0.3, 0.8, 0.5)	(4.0, 1, 2.5)	10	10	5	57
(3, 20, -20)	(0.3, 0.8, 0.5)	(4.5, 8, -0.5)	10	10	2	49
(3, 20, -20)	(0.3, 0.8, -2.5)	(0.3, 0.8, 0.9)	16	16	2	48
(2, 15, -15)	(0.3, 0.8, 0.5)	(4.0, 1, 2.5)	10	10	5	55
(2, 15, -15)	(0.3, 0.8, 0.5)	(4.5, 8, -6.5)	12	12	2	54
(2, 15, -15)	(0.3, 0.8, -2.5)	(0.3, 0.8, 0.9)	16	16	2	55

图2、图3和表1说明,本文算法可以使分段线

性混沌系统实现快速同步.

5. 基于状态观测器的同步算法在一类分段系统中的应用

实验结果证明,当分段混沌系统的参数在(6)式的条件下发生改变时,只要保证(13)式的特征值均具有负实部,都可以实现快速同步.研究发现,本文的同步算法是基于状态观测器的,设计中将线性部分和非线性部分分开,对于一类分段混沌系统具有普遍的适用性.该同步算法同样适用于分段混沌系统(1),图4和图5的仿真图形验证了算法的有效性.系统(1)相应的响应系统设计为

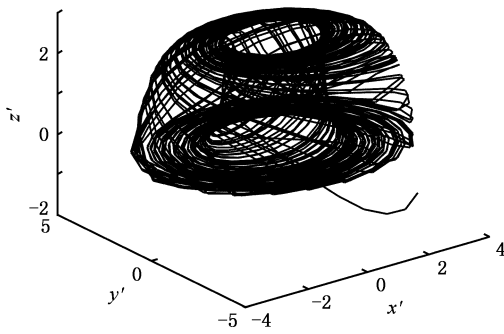


图4 基于系统(1)的响应系统状态图

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= ax' + by' + (k_1x + k_2y + k_3z) \\ &\quad + g_x(x, y, z) \\ &\quad - (k_1x' + k_2y' + k_3z'), \\ \dot{y}' &= -bx' + ay' + g_y(x', y', z'), \quad (20) \\ \dot{z}' &= ax' + by' + (k_1x + k_2y + k_3z) \\ &\quad + g_z(x, y, z) \\ &\quad - (k_1x' + k_2y' + k_3z'), \end{aligned}$$

式中,

$$g_x(x, y, z) = \begin{cases} -kx & (z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ 0 & (\text{其他}); \end{cases} \quad (21)$$

$$g_y(x, y, z) = \begin{cases} -ky & (z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ 0 & (\text{其他}); \end{cases} \quad (22)$$

$$g_z(x, y, z) = \begin{cases} kd & (z + \sqrt{x^2 + y^2} > k), \\ 0 & (\text{其他}). \end{cases} \quad (23)$$

令参量 $a = 2, b = 15, c = -15, d = 10, e = -10, k = m = 4, k_1 = k_2 = 12, k_3 = 2$,原系统和响应系统的初值为(0.3, 0.8, 2.5)和(3.5, 1, -1.5),得到响应系统的状态图(图4)和同步误差图(图5).

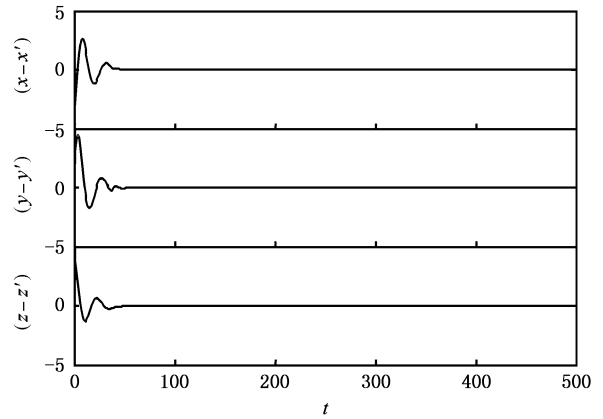


图5 基于系统(1)的系统同步误差图

6. 结 论

本文利用状态观测器的思想,对新近提出的分段线性混沌系统进行了同步控制,并对实现同步的充分条件进行了分析和推导.该方法不需要推导 Lyapunov 指数,克服了分段混沌系统状态不连续、求解 Lyapunov 函数比较困难的缺点.仿真结果验证了算法的有效性和快速性.该算法适用于一类分段混沌系统.

当然,本文只是采用状态观测器的思想对分段混沌系统进行的初步研究.在保密通信系统中的实际应用等问题,都有待于深入研究.

[1] Tao Y, Chua L 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 215
 [2] Sivaprakasam S, Pierce I 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013805
 [3] Zheng Z G, Hu B, Hu G 2000 *Phys. Rev. E* **62** 402
 [4] Jiang G P, Tang W, Chen G R 2003 *Chaos Solitons Fract.* **15** 925
 [5] Min F H, Wang Z H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 (in Chinese)
 [闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]
 [6] Liu W B, Chen G R 2003 *ISCAS (III)* **2** 100
 [7] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese)
 [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
 [8] Liu Y, Chen H F 2001 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **48** 1484
 [9] Chen S H, Zhao L M, Liu J 2002 *Chin. Phys.* **11** 543
 [10] Hector P, Jose A R, Ilse C 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **50** 280
 [11] Jiang G P 2002 *J. China Univ. Posts Telec.* **9** 28

- [12] Lü J H , Zhou T S 2002 *Chaos* **12** 344
- [13] Zheng Z H , Lü J H 2004 *Chaos Solitons Fract.* **20** 277
- [14] Germani A , Manes C , Pepe P 2002 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **47** 96
- [15] Li G H , Zhou S P , Xu D M 2004 *Chin. Phys.* **13** 168
- [16] Wang W W , Gao Z Q 2003 *Proc. Amer. Contr. Conf.* **13** 47543

Synchronization control of a new piecewise chaotic system *

Shan Liang Li Jun Wang Zhi-Quan

(Department of Automation , Nanjing University of Science and Technology , Nanjing 210094 , China)

(Received 21 November 2005 ; revised manuscript received 10 April 2006)

Abstract

Using state observers theory , the drive and response systems are constructed , and then synchronization control of a new piecewise-linear chaotic system is achieved. The sufficient condition is deduced for synchronizing two chaotic systems with different initial values. Theoretical analysis shows that the algorithm has no special requests for the original systems , nor needs the Lyapunov functions to be solved , which makes it adequate to control piecewise chaotic systems. Satisfactory results of simulation experiments verified the validity of this algorithm. The method can quickly synchronize two systems at different initial values. This algorithm should be feasible for synchronization control of a class of piecewise chaotic systems.

Keywords : piecewise-linear chaotic system , state observers , synchronization control

PACC : 0545