

# 一个新的混沌系统及其性质研究\*

王杰智<sup>†</sup> 陈增强 袁著祉

(南开大学自动化系, 天津 300071)

(2005 年 11 月 22 日收到, 2006 年 4 月 7 日收到修改稿)

构造了一个新的不同于 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统的三维连续自治混沌系统. 该系统含有四个参数, 两个非线性乘积项. 通过理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 截面图研究了系统的基本动力学特性, 并分析了改变不同参数时系统动力学行为的变化.

关键词: 混沌系统, 混沌生成, Lorenz 系统, Lyapunov 指数谱

PACC: 0545

## 1. 引言

自 1963 年 Lorenz<sup>[1]</sup>发现第一个混沌吸引子以来, 混沌理论得到了迅猛的发展. Lorenz 吸引子是迄今为止被研究最为深入的混沌吸引子. 在 Lorenz 系统的基础上, 1999 年 Chen<sup>[2]</sup>利用混沌反控制方法成功实现了一个新的三维混沌系统——Chen 系统. 2002 年 Lü 和 Chen<sup>[3]</sup>又通过混沌反控制思想发现了 Lü 系统, 这个三维混沌系统在 Lorenz 系统和 Chen 系统之间架起了一座桥梁. Lorenz 系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= cx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (1)$$

Chen 系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (2)$$

Lü 系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (3)$$

混沌反控制法使人们对混沌生成的研究产生了极大的兴趣. 文献 4 在 Lorenz 系统的基础上又构造

了一个统一的混沌系统族. 文献 5, 6 构造了两个具有五个平衡点的新的三维混沌系统. 文献 5 中构造的新系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - yz, \\ \dot{y} &= -cy + xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \quad (4)$$

文献 6 中构造的新系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + yz, \\ \dot{y} &= cx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (5)$$

近几年来, 人们对混沌和超混沌的生成进行了许多有成效的研究<sup>[7-14]</sup>.

本文提出了一个新的三维混沌系统, 该系统含有四个参数, 第二个方程和第三个方程各含有一个非线性乘积项. 文中利用理论推导、数值仿真、Lyapunov 指数 (LE) 谱、分岔图和 Poincaré 截面图分析了新混沌系统的基本动力学特性, 验证了系统的混沌特性.

## 2. 一个三维混沌模型及基本动力学特性

### 2.1. 新的混沌模型及其典型混沌吸引子

本文提出的混沌系统的动力学方程为

\* 国家自然科学基金(批准号 60374037, 60574036), 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20050055013)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号 2005-290)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: wjzh197845@mail.nankai.edu.cn

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y), \\ \dot{y} = -cy + xz, \\ \dot{z} = -bz + dxy. \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{dX}{dt} = f(X), \quad (7)$$

式中  $X = (x, y, z) \in R^3$ ,  $f(X)$  是方程 (6) 右边的函数,  $a, b, c, d$  为实常数. 当  $a = 20, b = 2, c = 28, d = 1$  时系统存在一个典型混沌吸引子, 如图 1 所示.

为了方便起见, 可以将方程 (6) 写成向量的形式

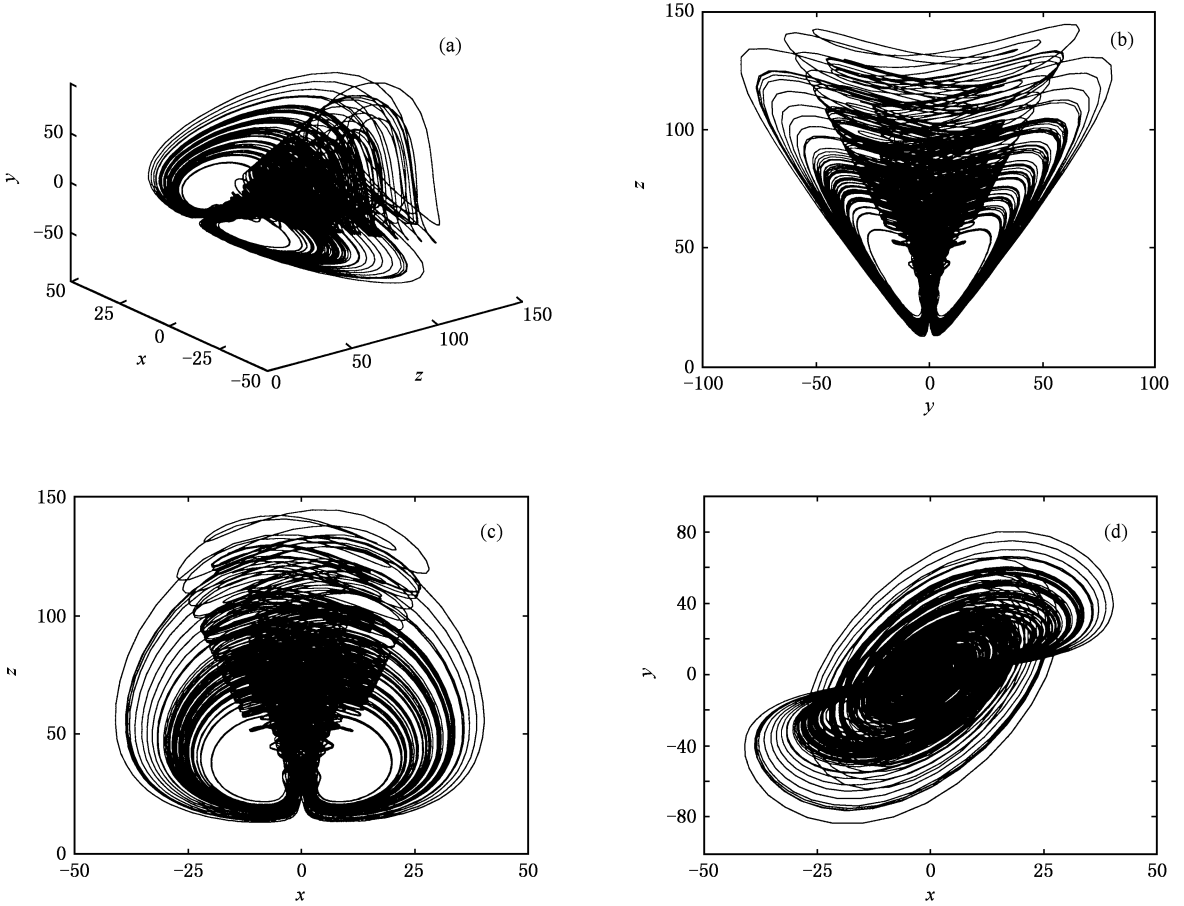


图 1 当  $a = 20, b = 2, c = 28, d = 1$  时系统 (6) 的典型混沌吸引子 (a)  $xyz$  三维空间相图 (b)  $yz$  平面相图 (c)  $xz$  平面相图, (d)  $xy$  平面相图

## 2.2. 基本动力学特性

### 2.2.1. 对称性

系统 (6) 具有自然的对称性, 即做变换

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z) \quad (8)$$

后, 系统保持不变. 变换 (8) 式可表示为

$$P: R^3 \rightarrow R^3, \quad X \mapsto PX,$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

它满足

$$f(PX) = Pf(X),$$

即系统关于  $z$  轴对称, 且这种对称性对所有参数均成

立. 例如, 由图 1(d) 可以看出, 当  $a = 20, b = 2, c = 28, d = 1$  时, 系统在  $xy$  平面的相图关于原点对称.

### 2.2.2. 稳定性

可以证明, 在  $a < 0, b > 0, d < 0$  且满足条件  $4cd - a < 0$  时, 系统 (6) 关于原点是全局、一致渐近稳定的. 事实上, 我们可以构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 - dy^2 + z^2).$$

对系统 (6), 可以验证

$$\begin{aligned} \dot{V} &= xx' - dy'y' + zz' \\ &= a\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{4cd - a}{4}y^2 - bz^2 < 0. \end{aligned}$$

2.2.3. 耗散性

由于散度

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\ &= a - c - b. \end{aligned}$$

为了使系统(6)成为耗散的,要求

$$a - b - c < 0. \quad (9)$$

在(9)式的条件下,系统(6)是耗散的,并以指数形式

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(b+c-a)t}$$

收敛.也就是一个初始体积为  $V(0)$  的体积元在时刻  $t$  时收缩为体积元  $V(0)e^{-(b+c-a)t}$ .这意味着,当  $t \rightarrow \infty$  时,包含系统轨线的每个小体积元以指数速率  $-(b+c-a)$  收缩到零,所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上,其渐近运动将被固定在一个吸引子上.这说明了吸引子的存在性.

2.2.4. 平衡点

令系统(6)的右端为零,若

$$bcd > 0, \quad (10)$$

则系统具有如下的三个平衡点:

$$\begin{aligned} S_0 &= (0 \ 0 \ 0), \\ S_1 &= \left( \frac{\sqrt{bcd}}{d}, \frac{\sqrt{bcd}}{d}, c \right), \\ S_2 &= \left( -\frac{\sqrt{bcd}}{d}, -\frac{\sqrt{bcd}}{d}, c \right). \end{aligned}$$

把系统(6)在各平衡点处的线性化系统的特征多项式统一表示为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C. \quad (11)$$

在  $S_0$  处把系统(6)线性化,得 Jacobian 矩阵

$$J_0 = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

和特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - a)(\lambda + c)(\lambda + b) \\ &= \lambda^3 + (b + c - a)\lambda^2 \\ &\quad + (bc - ac - ab)\lambda - abc. \end{aligned}$$

由(11)式可知,此时

$$\begin{aligned} A &= b + c - a, \\ B &= bc - ac - ab, \\ C &= -abc. \end{aligned}$$

若

$$\begin{aligned} a &> 0, \quad b > 0, \\ c &< 0, \quad d > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

根据 Routh-Hurwitz 条件,所有的特征值都具有负实部当且仅当  $A > 0, B > 0, C > 0, AB - C > 0$ .在(9)和(12)式的条件下,此时不是所有的特征值都具有负实部,因此平衡点  $S_0 = (0 \ 0 \ 0)$  是不稳定的,且是一个三维相空间中的鞍点.

把系统(6)分别在平衡点  $S_1, S_2$  处线性化,可以得到如下相同的特征多项式:

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (b + c - a)\lambda^2 - ab\lambda + 2abc.$$

在(9)和(12)式的条件下,根据 Routh-Hurwitz 条件,这两个平衡点都不稳定.

2.2.5. 分岔图、LE 谱图及轨道图

情况 1 固定参数  $b = 2, c = 28, d = 1$ , 改变  $a$ ,  $a \in [0.1 \ 26.9]$ .

当  $a$  在  $[0.1 \ 26.9]$  变化时,系统的 LE 谱以及关于  $y$  的分岔图如图 2 所示.当有一个 LE 大于零的

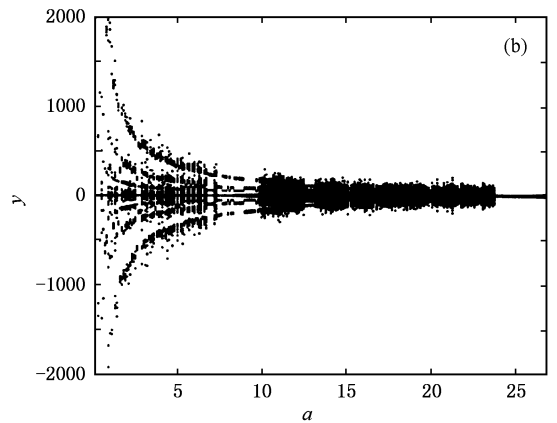
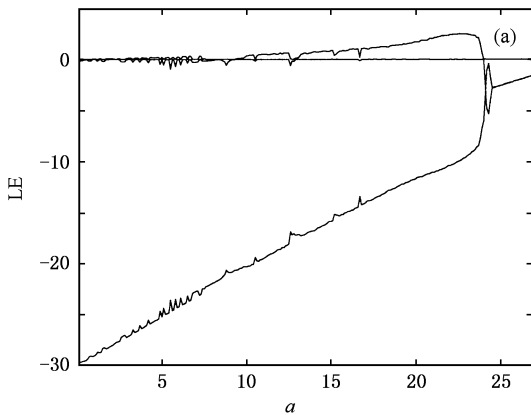


图 2 a 变化时系统的 LE 谱以及关于 y 的分岔图 (a) LE 谱 (b) 关于 y 的分岔图

时候,系统处于混沌状态.由图 3(a)可见,随着  $a$  的变化,系统的最大 LE 时而大于零,时而等于零,说明在  $a$  变化的过程中混沌与周期轨交替出现.实际上,随着参数的变化,混沌与周期解之间的过渡

没有很明确的界限.图 3 给出了参数  $a$  取定一些值时系统的轨道图.当  $a = 4$  时,系统存在一个混沌吸引子,当  $a = 7, 7.5$  和 26 时系统均是周期的.

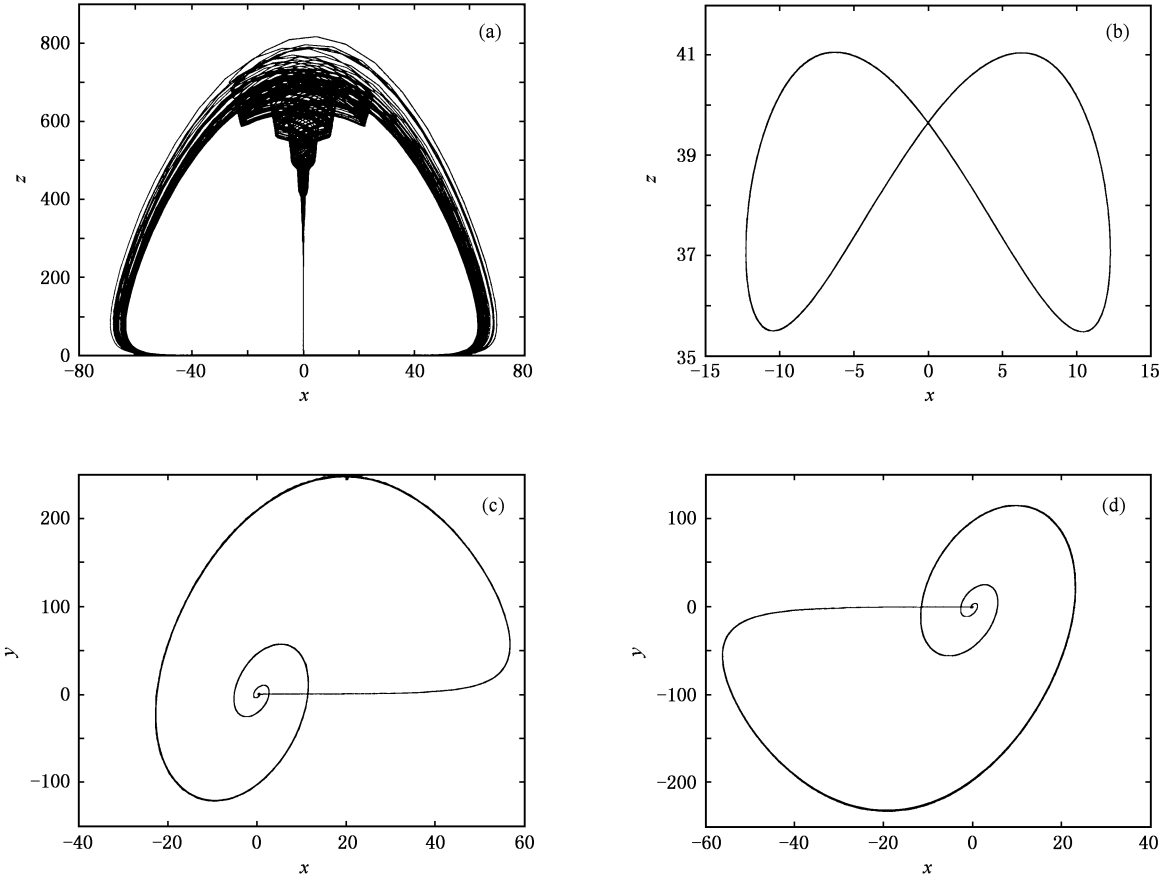


图 3  $a = 4, 7, 7.5$  和 26 时系统的轨道图 (a)  $a = 4$  时混沌吸引子的  $xz$  平面相图 (b)  $a = 26$  时周期轨的  $xz$  平面相图 (c)  $a = 7$  时周期轨的  $xy$  平面相图 (d)  $a = 7.5$  时周期轨的  $xy$  平面相图

**情况 2** 固定参数  $a = 20, c = 28, d = 1$ , 改变  $b$ ,  $b \in [0.1, 9]$ .

当  $b$  在  $[0.1, 9]$  变化时,系统的 LE 谱以及关于  $y$  的分岔图如图 4 所示.由图 4(a)可见,随着  $b$  的

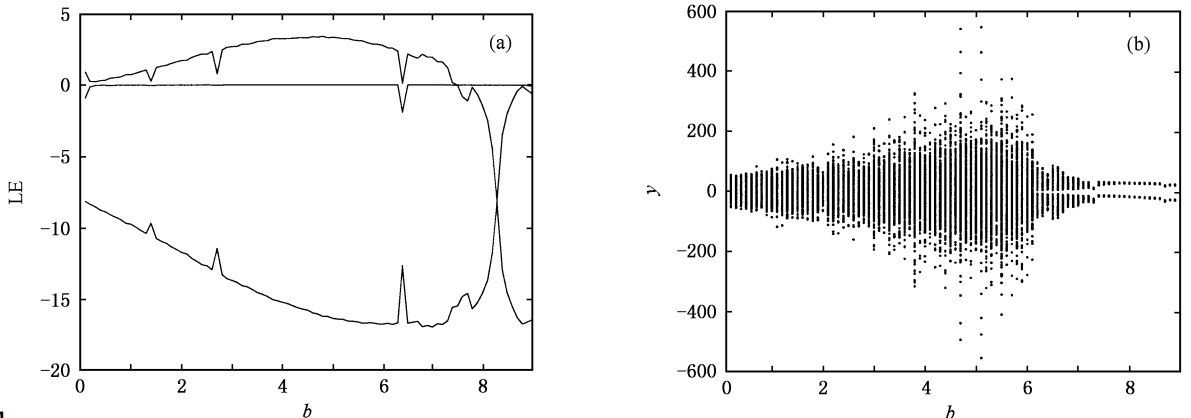


图 4  $b$  变化时系统的 LE 谱以及关于  $y$  的分岔图 (a) LE 谱图 (b) 关于  $y$  的分岔图



变化,系统的最大 LE 由大于零过渡到等于零.图 4 (b)也反映出随着  $b$  的变化,系统由混沌状态过渡到周期解.图 5 给出了参数  $b = 0.1$  和 8 时系统的轨道图.

情况 3 固定参数  $a = 20, b = 2, d = 1$ , 改变  $c, c \in [21, 66]$ .

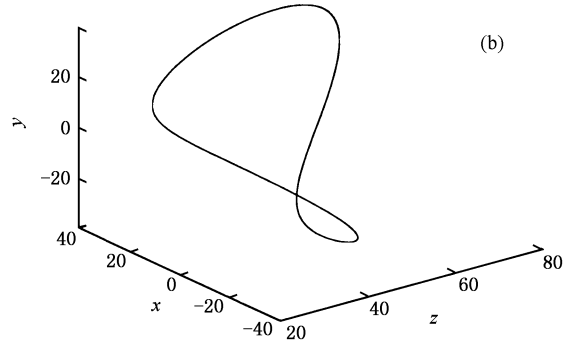
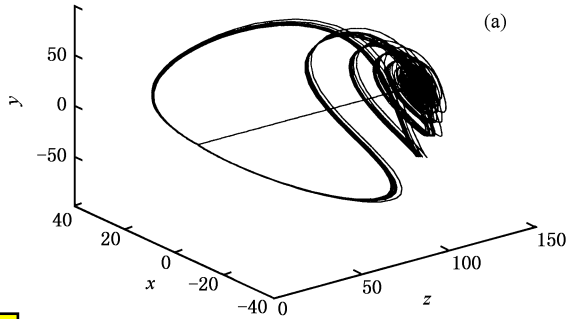


图 5  $b = 0.1$  和 8 时系统的轨道图 (a)  $b = 0.1$  时的混沌吸引子 (b)  $b = 8$  时的周期解

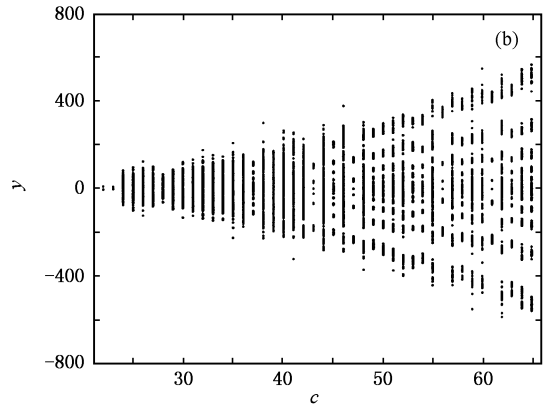
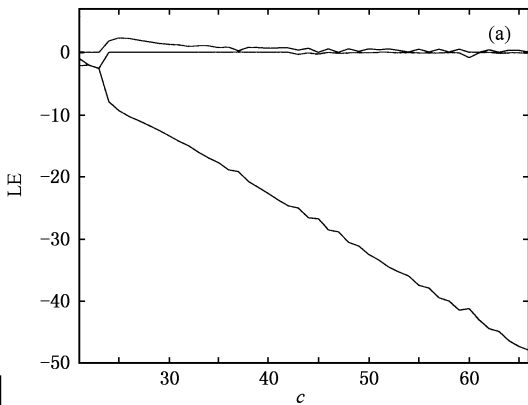


图 6  $c$  变化时系统的 LE 谱以及关于  $y$  的分岔图 (a) LE 谱 (b) 关于  $y$  的分岔图

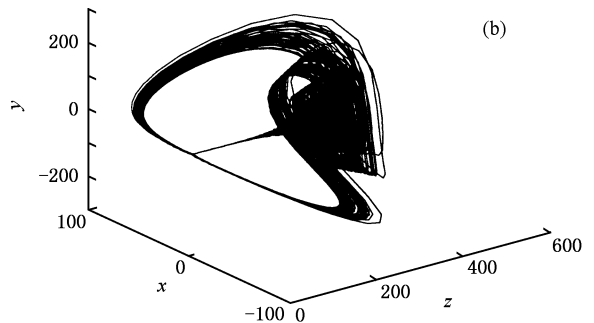
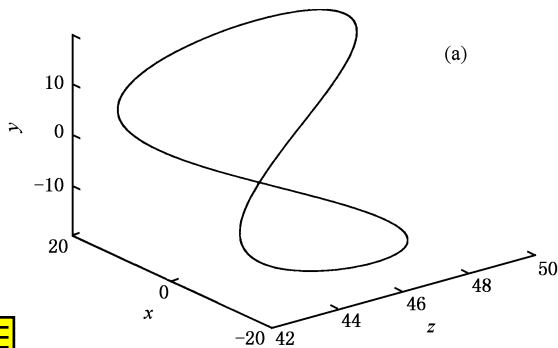


图 7  $c = 21$  和 42 时系统的轨道图 (a)  $c = 21$  时的周期解 (b)  $c = 42$  时的混沌吸引子

情况 4 固定参数  $a = 20, b = 2, c = 28$ , 改变  $d, d \in [0.1, 333809]$ .

图 8 给出了当  $d \in [0.1, 10], d \in [10, 809]$  和

当  $c$  在  $[21, 66]$  变化时,系统的 LE 谱以及关于  $y$  的分岔图如图 6 所示.由图 6 (a) 可见,随着  $c$  的变化,系统的最大 LE 时而等于零,时而大于零,说明在  $c$  变化的过程中周期轨与混沌交替出现.图 7 给出了参数  $c = 21$  和 42 时系统的轨道图.

$d \in [809, 333809]$  时系统关于  $y$  的分岔图.当  $d \in [0.1, 333809]$  时,系统都处于混沌状态.图 9 给出了当  $a = 20, b = 2, c = 28, d = 809$  时,系统

LE 随时间的演化图,随着时间的演化,系统的三个 LE 终将趋于常值.由图 9 可见,在这组参数

下,系统有一个 LE 大于零,系统此时处于混沌状态.

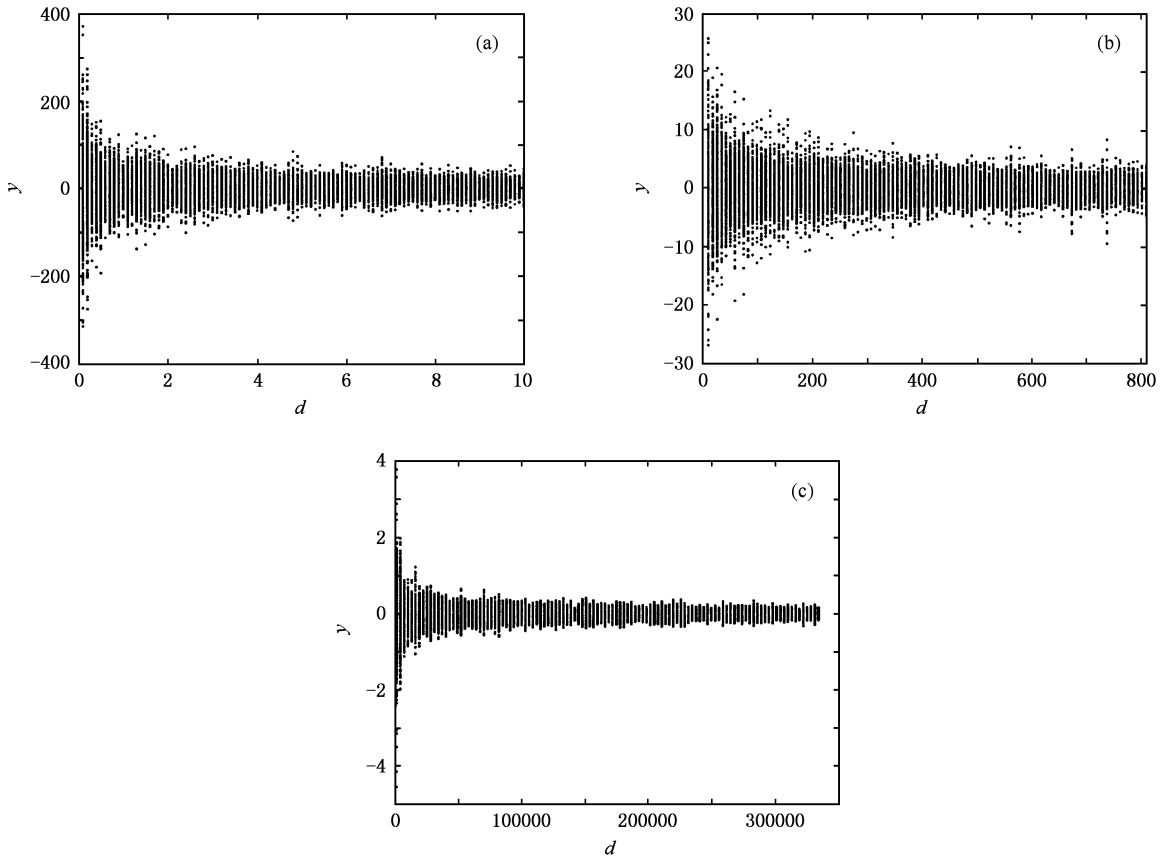


图 8  $d$  变化时系统关于  $y$  的分岔图 (a)  $d \in [0.1, 10]$  (b)  $d \in [10, 809]$  (c)  $d \in [809, 333809]$

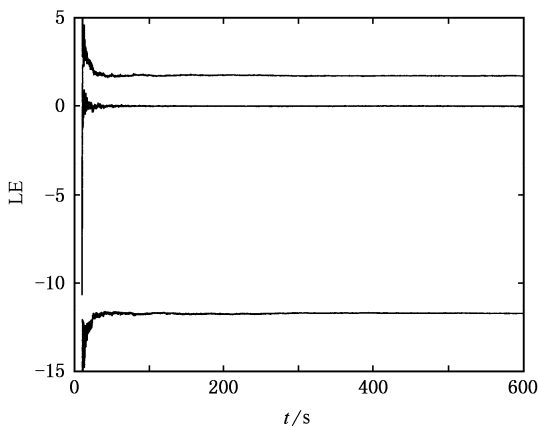


图 9  $a = 20, b = 2, c = 28, d = 809$  时 LE 随时间  $t$  的演化图

### 2.2.6. Poincaré 截面

为了利于观察系统的动力学行为, Poincaré 截面的选取要恰当,此截面不能包含系统的轨线,也不能与轨迹相切.在给定的某组参数下,本文选取了相空间中穿过某一个平衡点的平面作为 Poincaré 截面,

然后观察 Poincaré 截面上截点的情况,由此判断在这组固定的参数下系统的运动是否为混沌的.

固定  $a = 20, b = 2, c = 28, d = 1$  时,系统有一个 LE 大于零,可知系统处于混沌状态,图 10 展示了此时系统在几个截面上的 Poincaré 映象.

由图 10 可以看出, Poincaré 截面上有一些成片的具有分形结构的密集点,吸引子的叶片清晰可见,进一步说明了此时系统的运动是混沌的.

固定  $a = 20, b = 8, c = 28, d = 1$  和  $a = 7, b = 2, c = 28, d = 1$  时,系统均有一个 LE 等于零,另外两个 LE 小于零,可知系统均为周期的.图 11 展示了在这两组参数下系统在截面  $y = \sqrt{bc}$  上的 Poincaré 映象.由图 11 可见, Poincaré 截面上只有少数离散的点,表明系统的运动是周期的.

### 2.2.7. 微分同胚和拓扑等价

由于系统(6)与 Lorenz 系统, Chen 系统和 Lü 系统之间均不存在同胚变换,则系统(6)与这三个系统均不是拓扑等价的.

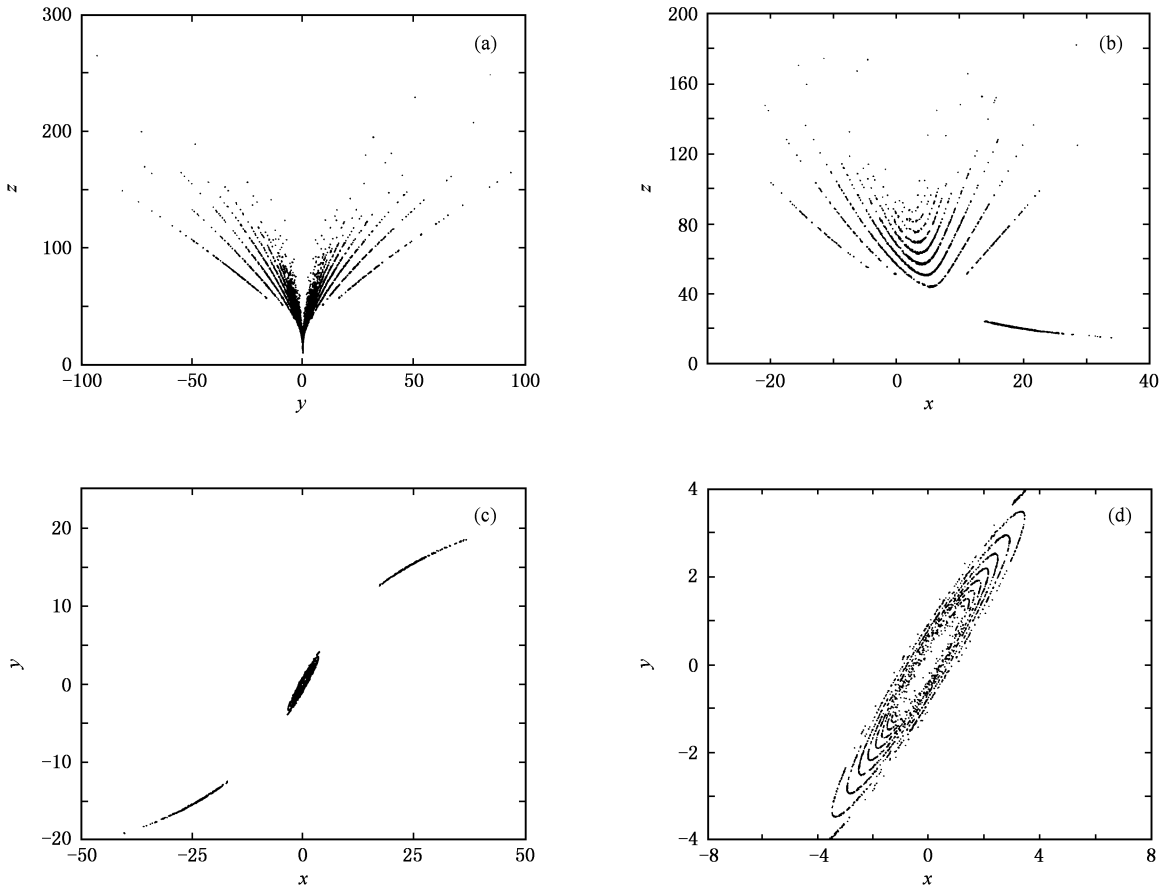


图 10 Poincaré 映象 ( a )  $x=0$  ( b )  $y=\sqrt{bc}$  ( c )  $z=c$  ( d )为 ( c ) 的局部放大

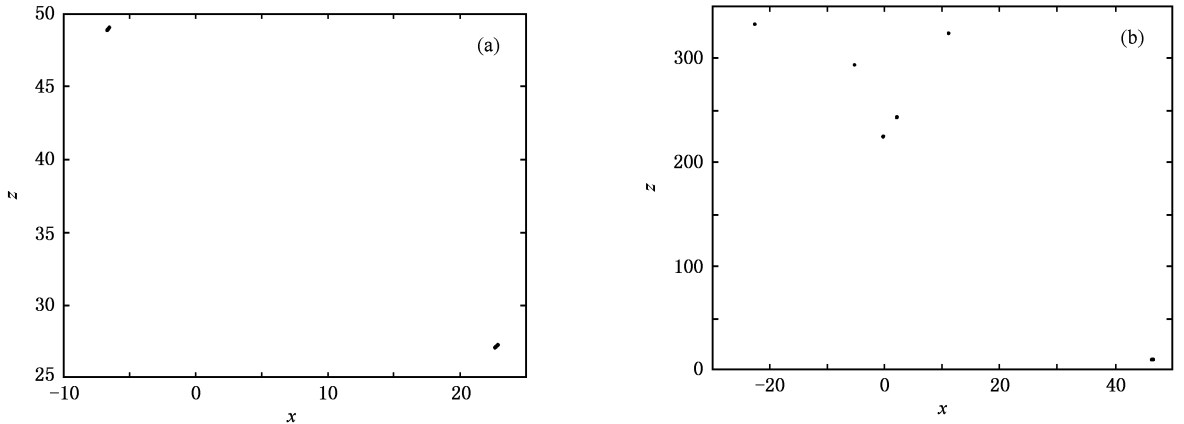


图 11 Poincaré 映象 ( a )  $a=20, b=8, c=28, d=1$  ( b )  $a=7, b=2, c=28, d=1$

### 3. 结 论

本文提出了一个新的三维自治混沌系统,系统含有 4 个参数,两个非线性项.该系统的混沌吸引子

的形状有别于 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统.通过 LE 和 Poincaré 截面图分析了新混沌系统的基本动力学特性,验证了系统丰富的混沌特性.该系统对于混沌在信息加密中具有重要的应用价值.

- [ 1 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 2 ] Chen G R , Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [ 3 ] Lü J H , Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [ 4 ] Lü J H , Chen G R , Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [ 5 ] Liu W B , Chen G R 2004 *J. Southeast Univ.* **20** 477
- [ 6 ] Qi G Y , Chen G R , Du S Z *et al* 2005 *Physica A* **352** 295
- [ 7 ] Guan X P , Fan Z P , Zhang Q L *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2216 ( in Chinese ) [ 关新平、范正平、张群亮等 2002 物理学报 **51** 2216 ]
- [ 8 ] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 ( in Chinese ) [ 禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111 ]
- [ 9 ] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 ( in Chinese ) [ 禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500 ]
- [ 10 ] Qi G Y , Du S Z , Chen G R *et al* 2004 *Chaos Solitons Fract.* **23** 1671
- [ 11 ] Yu S M , Lin Q H , Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 ( in Chinese ) [ 禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25 ]
- [ 12 ] Yu S M , Ma Z G , Qiu S S *et al* 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [ 13 ] Tao J W , Shi Y W , Chang W X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1682 ( in Chinese ) [ 陶建武、石要武、常文秀 2004 物理学报 **53** 1682 ]
- [ 14 ] Yu S M , Lin Q H , Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 ( in Chinese ) [ 禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084 ]

## A new chaotic system and analysis of its properties<sup>\*</sup>

Wang Jie-Zhi<sup>†</sup> Chen Zeng-Qiang Yuan Zhu-Zhi

( Department of Automation , Nankai University , Tianjin 300071 , China )

( Received 22 November 2005 ; revised manuscript received 7 April 2006 )

### Abstract

This paper reports a new three-dimensional continuous autonomous chaotic system , which is different from the Lorenz , Chen and Lü systems. The new system contains two quadratic cross-product terms and four system parameters. Basic dynamic properties of the new system are studied by means of theoretical analysis , numerical simulation , Lyapunov exponent spectrum , bifurcation diagrams and Poincaré section diagrams. The different dynamic behaviors of the new system are analyzed when each system parameter is changed.

**Keywords** : chaotic system , chaos generation , Lorenz system , Lyapunov exponents spectrum

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60374037 , 60574036 ) , the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China ( Grant No. 20050055013 ) and the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China ( Grant No. 2005-290 ).

<sup>†</sup> E-mail : wjzh197845@mail.nankai.edu.cn