

基于改善空间关联性的混沌控制*

周小安¹⁾ 钱恭斌^{1,2)} 丘水生²⁾

1) 深圳大学信息工程学院, 深圳 518060)

2) 华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)

(2005 年 11 月 23 日收到, 2006 年 4 月 20 日收到修改稿)

基于混沌信号的统计特性, 提出了一种通过改善混沌信号的空间关联性实现混沌控制的方法. 以 Hénon 离散混沌系统和四阶 Chua's 电路超混沌连续系统为例进行了数值研究, 验证了这种控制方法的有效性. 结果表明, 通过改善混沌信号之间的空间关联性, 混沌系统能以较快的速度收敛到它的平衡点或多种周期轨道.

关键词: 混沌控制, 空间关联性, Hénon 系统, 四阶 Chua's 电路

PACC: 0545

1. 引 言

自从 Ott, Grebogi 和 Yorke^[1]成功地实现非线性系统中混沌行为的控制后, 混沌系统的控制研究日益受到科学工作者的关注, 各种混沌控制方法也应运而生, 形成了较为系统的控制理论与方法. 相继出现了连续自反馈控制^[2]、自适应控制^[3]等反馈控制方法和参数扰动混沌控制^[4]、漂移混沌控制^[5]等非反馈控制方法. 反馈控制方法的优点是无需事先知道控制目标的信息, 物理上容易实现和操作, 这种方法已被广泛地应用到生物学、光学、电子学、化学、社会经济学等实际系统中, 因而这种方法具有很大的应用潜力.

国内不少文献^[6-9]讨论了反馈控制方法, 获得了较好的控制结果, 但大多数是根据 Lyapunov 指数来分析其控制机制的. 本文从混沌信号统计特性角度出发, 提出了基于改善混沌信号间的空间关联性的控制策略. 该控制策略属于一种线性反馈控制策略. 文中的空间关联性是指两混沌信号间的互相关性. 对 Hénon 离散混沌系统和四阶 Chua's 电路超混沌连续系统等典型混沌运动的控制仿真实验结果表明, 基于改善混沌信号的空间关联性的混沌控制方法是可行的, 其控制效果好、收敛速度快.

2. 控制方法

首先考虑一般的离散非线性系统

$$\begin{aligned} x_{n+1}(1) &= f_1(x_1(1), x_2(2), \dots, x_n(N), \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m), \\ x_{n+1}(2) &= f_2(x_1(1), x_2(2), \dots, x_n(N), \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m), \\ &\dots \\ x_{n+1}(N) &= f_N(x_1(1), x_2(2), \dots, x_n(N), \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m). \end{aligned} \quad (1)$$

系统(1)中 $x_j(k)$ 和 μ_i 为实数, μ_i 是系统参数, 其中 $k=1, 2, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, n+1$; $i=1, 2, \dots, m$. 设系统(1)在 $\mu_i = \mu_{i0}$ 有不稳定不动点

$$x_f = (x_f(1), x_f(2), \dots, x_f(N)), \quad (2)$$

即

$$\begin{aligned} x_f(1) &= f_1(x_f(1), x_f(2), \dots, x_f(N), \mu_{10}, \mu_{20}, \dots, \mu_{m0}), \\ x_f(2) &= f_2(x_f(1), x_f(2), \dots, x_f(N), \mu_{10}, \mu_{20}, \dots, \mu_{m0}), \\ &\dots \\ x_f(N) &= f_N(x_f(1), x_f(2), \dots, x_f(N), \mu_{10}, \mu_{20}, \dots, \mu_{m0}). \end{aligned} \quad (3)$$

为稳定控制系统(1)中的不稳定不动点, 在系统(1)的基础上, 某一时刻对不同的状态 $x_{n+1}(i), x_{n+1}(j)$ 进行耦合, 引入如下控制:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+1}(i) &= (1 - \varepsilon_{ij})x_{n+1}(i) + \varepsilon_{ij}x_{n+1}(j), \\ \tilde{x}_{n+1}(j) &= \varepsilon_{ij}x_{n+1}(i) + (1 - \varepsilon_{ij})x_{n+1}(j), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 ε_{ij} 是两状态之间的耦合强度, $i, j=1, 2, \dots, N$. 再将耦合后的信号 $\tilde{x}_{n+1}(i), \tilde{x}_{n+1}(j)$ 反馈回系统.

* 国家自然科学基金(批准号: 40374017)和网络与交换技术国家重点实验室开放基金资助的课题.

根据 (4) 式, 比较加入控制前后的空间关联性, 有

$$\begin{aligned}
& E\tilde{x}_{n+1}(i)\tilde{x}_{n+1}(j) \\
&= E[(1 - \epsilon_{ij})x_{n+1}(i) + \epsilon_{ij}x_{n+1}(j)] \\
&\quad \times [\epsilon_{ij}x_{n+1}(i) + (1 - \epsilon_{ij})x_{n+1}(j)] \\
&= E[(1 - \epsilon_{ij})\epsilon_{ij}x_{n+1}^2(i) + (1 - \epsilon_{ij})\epsilon_{ij}x_{n+1}^2(j) \\
&\quad + ((1 - \epsilon_{ij})^2 + \epsilon_{ij}^2)x_{n+1}(i)x_{n+1}(j)]. \quad (5)
\end{aligned}$$

在 $x_{n+1}(i) \neq x_{n+1}(j)$ 条件下, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned}
& (1 - \epsilon_{ij})\epsilon_{ij}x_{n+1}^2(i) + (1 - \epsilon_{ij})\epsilon_{ij}x_{n+1}^2(j) \\
&> 2(1 - \epsilon_{ij})\epsilon_{ij}x_{n+1}(i)x_{n+1}(j). \quad (6)
\end{aligned}$$

由 (5) 和 (6) 式得

$$\begin{aligned}
E\tilde{x}_{n+1}(i)\tilde{x}_{n+1}(j) &> E[(1 - \epsilon_{ij})^2 + \epsilon_{ij}^2 \\
&\quad + 2\epsilon_{ij}(1 - \epsilon_{ij})]x_{n+1}(i)x_{n+1}(j) \\
&= E x_{n+1}(i)x_{n+1}(j). \quad (7)
\end{aligned}$$

由 (7) 式可知, 混沌系统内两状态之间的耦合, 可增加混沌信号之间的空间关联性.

由于混沌系统具有内在随机性, 混沌信号间的关联程度在部分时间间隔内弱, 甚至不相关. 混沌信号间系统变量的相互耦合, 改善了混沌信号间的关联程度, 从而抑制了系统内的混沌, 使混沌系统向有序稳定的方向转化. 选择不同的耦合系数, 可得到多种稳定的控制行为. 与离散系统的理论分析一样, 连续系统两状态之间的相互耦合也可改善混沌信号的空间关联性, 从而促使连续混沌系统向有序稳定的方向转化.

3. 实验研究与分析

下面分析上述控制策略被应用在离散混沌系统 Hénon 系统和连续混沌系统四阶 Chua's 电路的情形.

3.1. Hénon 系统

Hénon 系统可通过如下差分方程来表示:

$$\begin{aligned}
x(n+1) &= p - x^2(n) + qy(n), \quad (8) \\
y(n+1) &= \epsilon x(n),
\end{aligned}$$

式中的 p 和 q 是两个实参数. 当 $p = 1.4$ 和 $q = 0.3$ 时, Hénon 系统处于混沌状态且有一个混沌吸引子, 在混沌吸引子内有一个不稳定的鞍型固定点 $z_f = (x_f, y_f)$, 可通过下式来计算:

$$z_f = x_f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

这里,

$$\begin{aligned}
x_f &= -c + (c^2 + p)^{1/2}, \\
c &= \frac{1}{2}(1 - q).
\end{aligned}$$

当 $p = 1.4, q = 0.3$ 时, z_f 为 $(0.8839, 0.8839)$. 作用于 Hénon 混沌系统的控制策略如下:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(n) &= (1 - \epsilon)x(n) + \epsilon y(n), \quad (10) \\
\tilde{y}(n) &= \epsilon x(n) + (1 - \epsilon)y(n).
\end{aligned}$$

加入控制信号后的 Hénon 混沌系统变为

$$\begin{aligned}
x(n+1) &= p - ((1 - \epsilon)x(n) + \epsilon y(n))^2 \\
&\quad + q(\epsilon x(n) + (1 - \epsilon)y(n)), \\
y(n+1) &= (1 - \epsilon)x(n) + \epsilon y(n). \quad (11)
\end{aligned}$$

在其不动点 z_f Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -2(1 - \epsilon)x_f & -2\epsilon x_f + q(1 - \epsilon) \\ (1 - \epsilon) & q\epsilon \end{bmatrix}. \quad (12)$$

当其特征根的模小于 1 时, Hénon 混沌系统收敛到它的不稳定不动点 $(0.8839, 0.8839)$, 这时计算出对应的耦合系数范围约为 $(0.3, 1)$. 图 1 表明了 Hénon 混沌系统的特征根的模 $|\lambda|$ 与耦合系数之间的关系. 从图 1 可看出, 受控后的 Hénon 系统的特征根的模小于 1 时对应的耦合强度的范围为 $(0.3, 1)$, 与理论分析一致. 这里初始位置为 $(0.5, -0.5)$. 控制策略在迭代 100 次后加入. 特别是当耦合强度为 0.5 时, Hénon 混沌系统的特征根的模最小, 此时受控后的 Hénon 系统收敛到其不动点的速度最快.

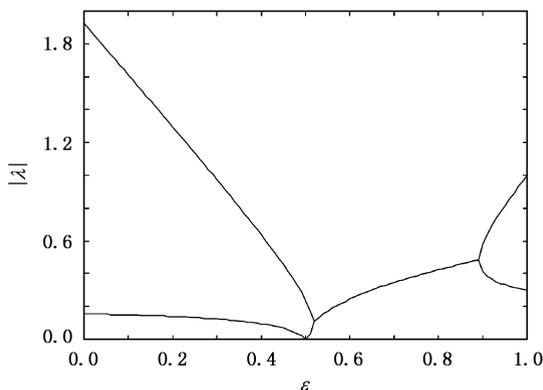


图 1 Hénon 混沌系统特征根的模 $|\lambda|$ 与耦合强度 ϵ 的关系

对 Hénon 混沌系统进行进一步仿真分析, 得到的结果如图 2—图 6 所示. 图 2 说明了 Hénon 混沌系统的状态与耦合强度之间的变化关系. 初始位置为 $(0.5, -0.5)$, 控制信号在迭代 100 次后加入. 图 2 说明随着两状态之间耦合系数的增加, Hénon 混沌系统能被控制收敛到周期 4、周期 2、周期 1 等多种

周期轨道,而耦合系数小于 0.05 时, Hénon 混沌系统处于混沌状态. 图 3—图 6 分别给出了耦合强度取不同值时的控制结果.

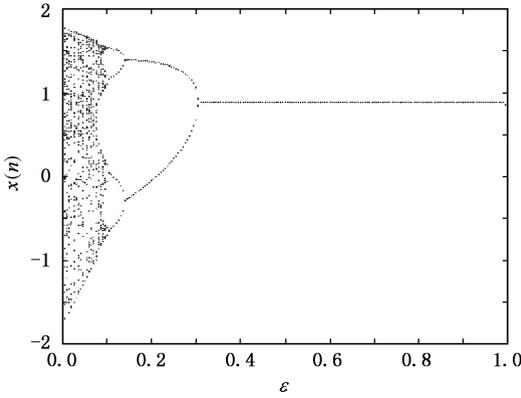


图 2 Hénon 混沌系统状态与耦合强度之间的变化关系

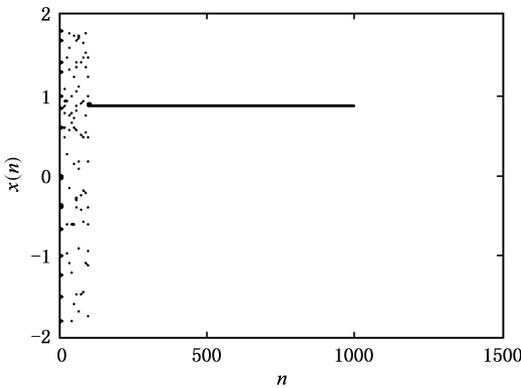


图 3 周期 1 的控制结果(耦合系数 ε 为 0.5)

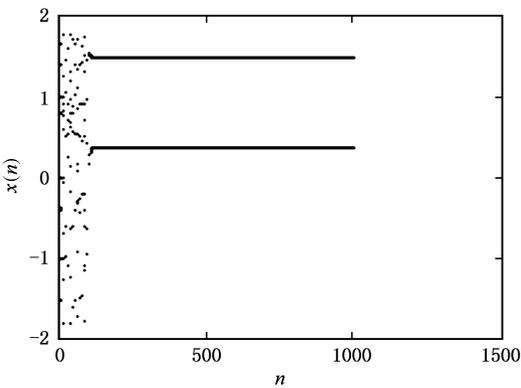


图 4 周期 2 的控制结果(耦合系数 ε 为 0.2)

3.2. 四阶 Chua 's 电路

最近,超混沌的控制研究在控制理论和非线性

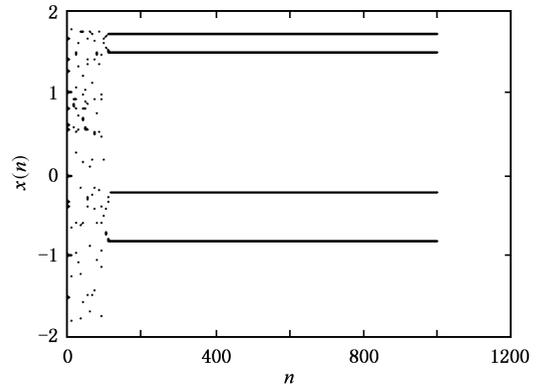


图 5 周期 4 的控制结果(耦合系数 ε 为 0.12)

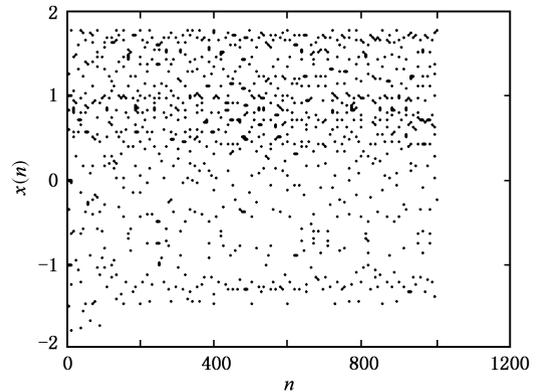


图 6 耦合系数 ε 为 0.04 时, Hénon 系统无法得到控制

科学领域引起了高度重视^[10-13]. 超混沌系统有两个或两个以上的正 Lyapunov 指数,其行为更复杂,因而对其控制更困难. 四阶 Chua 's 电路有两个正的 Lyapunov 指数,是一个超混沌系统. 参数取 $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.05$, $L_1 = 1$, $L_2 = \frac{2}{3}$, $R = 1$, $m_0 = 3$, $m_1 = -0.2$ 时,其 Lyapunov 指数分别为 0.024, 0.06, 0.00, -53.8. 四阶 Chua 's 电路的不稳定不动点为 $(0, 0, 0, 0)$, $(1.6, 0, -1.6, 1.6)$ 和 $(-1.6, 0, 1.6, -1.6)$. 下面以四阶 Chua 's 电路超混沌系统为例讨论本文介绍的控制方法.

四阶 Chua 's 电路的振荡方程如下:

$$C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} = g(v_{c_2} - v_{c_1}) - i_{L_1},$$

$$C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} = -g(v_{c_2} - v_{c_1}) - i_{L_2},$$

$$L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} = v_{c_1} + Ri_{L_1},$$

$$L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} = v_{C_2}. \quad (13)$$

这里函数 $g(x)$ 满足方程

$$\begin{aligned} & g(v_{C_2} - v_{C_1}) \\ &= m_0(v_{C_2} - v_{C_1}) + 0.5(m_0 - m_1) \\ & \quad \times (|v_{C_2} - v_{C_1} - 1| + |v_{C_2} - v_{C_1} + 1|). \end{aligned}$$

考虑系统两状态 v_{C_1} 与 i_{L_2} 之间的耦合, 加入如下控制策略:

$$\begin{aligned} v'_{C_1} &= (1 - \varepsilon)v_{C_1} + \varepsilon i_{L_2}, \\ i'_{L_2} &= \varepsilon v_{C_1} + (1 - \varepsilon)i_{L_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

初始位置为 $(0.5, -0.2, 1, 0.5)$, 控制策略在积分 1000 步后加入, 积分步长为 0.05. 当耦合系数取 0.17 时, 得到了系统平衡点 $(-1.6, 0, 1.6, -1.6)$, 如图 7 所示. 当耦合系数取 0.16 时, 得到了周期 1 轨道, 如图 8 所示.

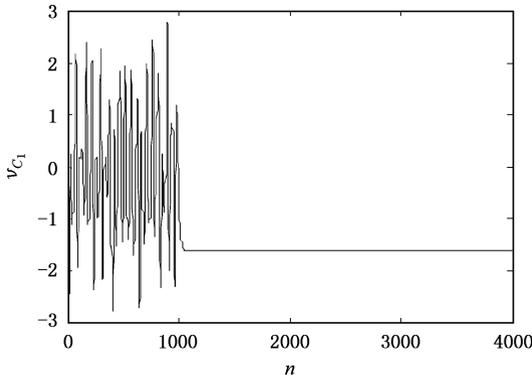


图 7 当 v_{C_1} 与 i_{L_2} 耦合系数 ε 为 0.17 时, 平衡点控制结果

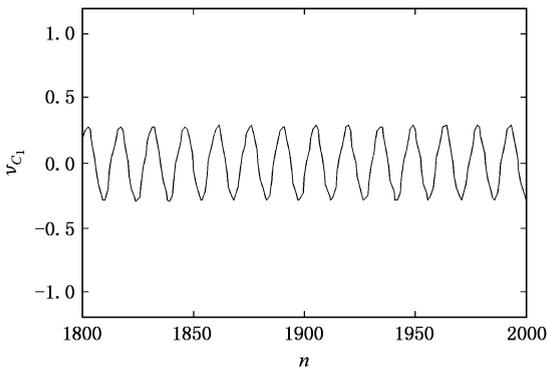


图 8 当 v_{C_1} 与 i_{L_2} 耦合系数 ε 为 0.16 时, 周期 1 控制结果

本文对四阶 Chua's 电路的其他两个状态耦合的情况进行了仿真实验分析. 结果表明, 通过两个状

态耦合, 四阶 Chua's 电路也能被控制收敛到其平衡点或周期轨道. 图 9 和图 10 分别给出了 v_{C_1} 与 v_{C_2} 耦合, v_{C_2} 与 i_{L_2} 耦合时的控制情形. 另外, 本文对其他系统(如 Lorenz 系统、Colpitts 振荡电路等典型混沌系统)也进行了仿真实验分析. 结果表明, 这些混沌系统都能被控制收敛到其平衡点或周期轨道.

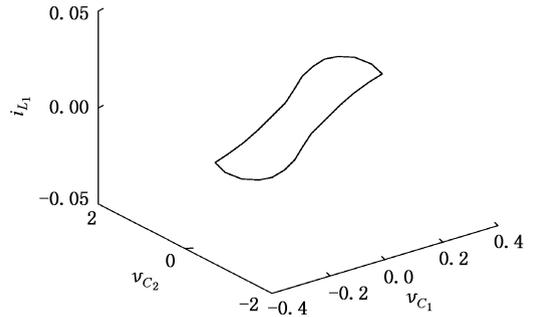


图 9 当 v_{C_1} 与 v_{C_2} 耦合系数 ε 为 0.042 时, 周期 1 控制结果

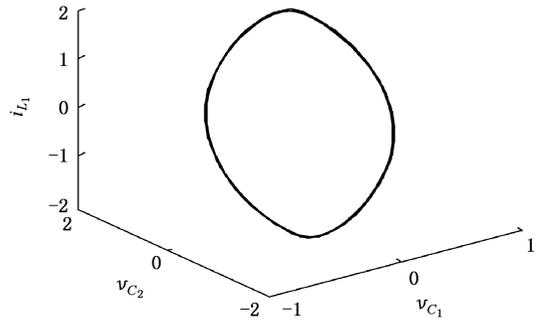


图 10 当 v_{C_2} 与 i_{L_2} 耦合系数 ε 为 0.2 时, 周期 1 控制结果

4. 结 论

本文根据混沌信号的统计特性提出了一种基于改善空间关联性的混沌控制方法. 理论分析说明, 混沌信号的空间关联性可通过系统的两个状态耦合得到改善. 实验结果表明, 当耦合强度取不同值时系统能收敛到它的平衡点或多种周期轨道. 这种方法控制混沌系统并不需要知道它的参数, 也不必知道混沌系统的动力学方程, 因此这种控制方法适用于含有未知参数或系统方程难以精确的系统. 本文从混沌信号的统计特性的角度初步分析了该控制方法的物理机制, 这对于混沌控制的理论研究具有一定的意义.

- [1] Ott E , Grebogi C , Yorke A J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196 (in Chinese) [龚礼华 2003 北京师范大学学报(自然科学版) **39** 340]
- [2] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [3] Huberman B A 1990 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37** 547
- [4] Braiman Y , Goldhirsch I 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545
- [5] Jackson A E 1990 *Phys. Lett. A* **151** 478
- [6] Feng J , Wang X Y , Chen S *et al* 2004 *Contr. Theory Appl.* **23** 19 (in Chinese) [冯江、王晓燕、陈爽等 2004 控制理论与应用 **23** 19]
- [7] Min F H , Xu Z Y , Xu W B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1360 (in Chinese) [闵富红、徐振源、须文波 2003 物理学报 **52** 1360]
- [8] Gong L H 2003 *J. Beijing Normal Univ. (Natural Science)* **39** 340
- [9] Luo X S , Chen G R , Wang B H *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 (in Chinese) [罗晓曙、陈光荣、汪秉宏等 2003 物理学报 **52** 790]
- [10] Fang J Q 1997 *Disc. Dyn. Nat. Soc.* **1** 283
- [11] Liu W P , Yu D J , Harrison R G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3316
- [12] Jiang P Q , Wang B H , Xia Q H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3280 (in Chinese) [蒋品群、汪秉宏、夏清华等 2004 物理学报 **53** 3280]
- [13] Yu Q M , Wang Y N 2001 *Acta Electron. Sin.* **29** 678 (in Chinese) [余群明、王耀南 2001 电子学报 **29** 678]

Chaotic control of nonlinear systems based on improving the space correlation^{*}

Zhou Xiao-An¹⁾ Qian Gong-Bin^{1,2)} Qiu Shui-Sheng²⁾

¹⁾ College of Information Engineering , Shenzhen University , Shenzhen 518060 , China)

²⁾ College of Electronic and Information Engineering , South China University of Technology , Guangzhou 510640 , China)

(Received 23 November 2005 ; revised manuscript received 20 April 2006)

Abstract

A method of chaotic control based on improving the space correlation is presented. As examples , the Hénon discrete chaotic system and the four-order Chua 's circuit is studied numerically. The results show that by improving the space correlation between chaotic signals , the chaotic dynamic systems can be controlled to converge rapidly to its equilibrium point or to the multi-periodic orbits.

Keywords : chaotic control , space correlation , Hénon map , four-order Chua 's circuit

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40374017) and the Foundation of State Key Laboratory for Network and Exchange Technology , China.