

基于 Laguerre 多项式逼近法的随机双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌研究^{*}

马少娟^{1)†} 徐 伟¹⁾ 李 伟¹⁾

1) 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2) 西北第二民族学院信息与计算科学系, 银川 750021)

(2005 年 6 月 28 日收到, 2006 年 4 月 10 日收到修改稿)

应用 Laguerre 正交多项式逼近法研究了含有随机参数的双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌行为. 系统参数为指数分布随机变量的非线性动力系统首先被转化为等价的确定性扩阶系统, 然后通过数值方法求得响应. 数值模拟结果的比较表明, 含有随机参数的双势阱 Duffing 系统保持着与确定性系统相类似的倍周期分岔和混沌行为, 但是由于随机因素的影响, 在局部小区域内随机参数系统的动力学行为会发生突变.

关键词: 双势阱 Duffing 系统, 指数分布概率密度函数, Laguerre 多项式逼近, 随机分岔

PACC: 0547

1. 引 言

受迫 Duffing 系统是一个非常典型的非线性动力学模型, 其动力学微分方程如下^[1]:

$$\ddot{x} + ax' + bx + cx^3 = F \cos \omega t.$$

Duffing 系统根据刚度系数 b 的不同, 可划分为三种类型: 标准型 ($b > 0$)、上田型 ($b = 0$) 及双势阱型 ($b < 0$). Holmes^[2] 结合理论方法和计算机模拟详细研究了双势阱 Duffing 系统的周期和混沌运动, Moon 等^[3] 则通过实验方法验证了文献 [2] 中的结论. 近几十年来, 众多学者已经研究过受迫双势阱 Duffing 系统丰富的动力学行为, 如拟周期、倍周期、由倍周期通向混沌以及混沌控制等等^[4-8]. 这些工作都局限于确定性系统或随机外激及参激作用下的确定性系统, 针对刚度系数或阻尼系数为随机参数的双势阱 Duffing 系统的动力学行为研究还很少, 因此有待于作进一步的发展.

非线性随机动力系统的随机性主要来自于两个方面: 外激激励的随机性以及系统本身参数的随机性. 半个世纪以来, 随机外激激励作用下非线性随机动力系统的研究有了很大进展, 并形成了比较成熟

的分析方法, 如随机平均法^[9]、多尺度法^[10]、胞映射法^[11]等. 虽然这些成果进一步完善了非线性随机动力系统的研究, 但是在实际模型的构建过程中还存在一个不可忽视的系统本身的随机性问题. 由于材料、测量、制造及安装中存在着诸多不确定因素的影响, 现实生活中的机械装置和土木工程结构往往是一类具有随机参数的随机系统. 这类系统的模型较之于确定性系统模型, 能更真实地描述系统的动态特性, 因此具有随机参数的非线性随机动力系统的动态响应、复杂性、随机分岔、混沌等方面的研究在实际工程问题中具有非常重要的应用价值. 由于数学处理上的困难, 目前研究此类动力系统的工程应用问题还较少, 考虑物理参数本身具有随机特性的研究则大都局限在静力分析、结构稳定及动力特征值等方面^[12]. 针对数学处理上的困难, 近年逐渐发展起来一种正交多项式逼近方法则可以很好地予以处理. 2002 年, 李杰等^[13] 对线性随机参数系统在随机激励下的响应问题应用正交展开理论进行了分析研究. 2003 年, Fang 等^[14] 将正交多项式逼近法和统一解法相结合, 研究了随机激励下具有随机参数的线性系统的响应问题. 继而, 冷小磊^[15] 应用正交多项式逼近法初步研究了随机参数影响下 Duffing 系统的一些基本非线性现象. 2004 年, 文献 [16] 在前

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472091, 10332030)资助的课题.

[†] E-mail: mashaajuan@mail.nwpu.edu.cn

人工作的基础上应用 Chebyshev 多项式逼近法研究了具有拱形分布随机参数的 van der Pol 系统的倍周期分岔,并进一步指出了随机参数系统倍周期分岔的特性.

本文应用正交多项式逼近法研究具有服从指数分布随机变量的受迫双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌行为.首先介绍指数分布的随机变量以及相对应 Laguerre 多项式,然后将具有此类分布随机参数的双势阱 Duffing 系统转化为等价的确定性扩阶系统,再利用数值方法求得其响应.最后通过数值模拟结果的比较来分析随机系统的分岔和混沌.

2. 指数分布概率密度函数和 Laguerre 多项式

实际工程问题中不同的模型会涉及不同的随机参数.当随机变量样本的取值限制为非负数,且其概率密度函数单调递减不为零时,可以令此类随机变量服从指数分布.图 1 为随机变量 u 服从指数分布概率密度函数 $p(u)$ 的曲线图, $p(u)$ 的表达式为

$$p(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(u-\mu)} & (x \geq \mu), \\ 0 & (x < \mu). \end{cases} \quad (1)$$

为简化计算,可令表达式中参数 $\lambda = 1, \mu = 0$.基于此分布的概率密度函数,由正交多项式的性质^[17],可选择 Laguerre 多项式为正交多项式基. Laguerre 多项式的一般表达式为

$$L_n(u) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} u^k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

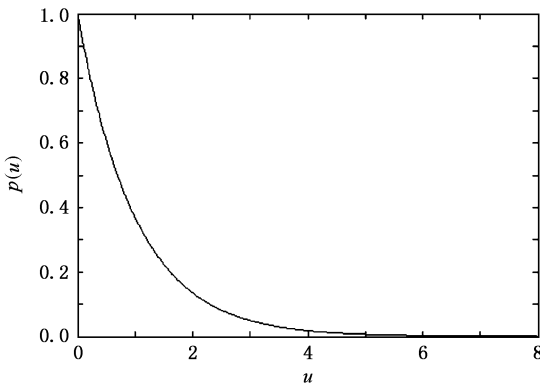


图 1 随机变量 u 的概率密度函数 $p(u)$ 曲线图

从而有

$$\begin{aligned} L_0(u) &= 1, \\ L_1(u) &= -u + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(u) &= u^2 - 4u + 2, \\ L_3(u) &= -u^3 + 9u^2 - 18u + 6, \\ L_4(u) &= u^4 - 16u^3 + 72u^2 - 96u + 24, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

Laguerre 多项式的循环推导公式为

$$L_{n+1}(u) = (2n + 1 - u) L_n(u) - n^2 L_{n-1}(u). \quad (3)$$

另外, Laguerre 多项式的正交性可表示为

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} L_i(u) L_j(u) du = \begin{cases} (i!) & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \quad (4)$$

根据文献 [17], u 在 0 到 $+\infty$ 间随机取值,但是其每一个样本都是服从指数分布的,因此随机性并不影响多项式的正交性.(4)式代表了一种加权正交关系,加权函数正好为指数分布概率密度函数.(4)式等号左端可以认为是 $L_i(u) L_j(u)$ 乘积的期望.根据 Laguerre 多项式的正交性,随机变量 U 的任何连续的、平方可积函数 $f(u)$ 可以展开成下列级数形式:

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i L_i(u),$$

式中

$$c_i = \int_p^{+\infty} f(u) L_i(u) du.$$

同样可以得到具有多个相互独立随机变量的可测函数相似的展开结果.这种展开称为随机函数 $f(u)$ 的正交分解,是正交分解方法的理论基础.

3. 含随机参数双势阱 Duffing 系统的 Laguerre 多项式逼近

谐和激励作用下二阶单自由度双势阱 Duffing 系统,其动力学微分方程表达式如下:

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - bx + x^3 = F \cos(1.2t), \quad (5)$$

式中 $F \cos(1.2t)$ 为谐和激励, b ($b > 0$) 为随机参数,表示为

$$b = \bar{b} + \delta u. \quad (6)$$

这里 \bar{b} 和 $\delta/2$ 为 b 的均值和方差,称 δ 为随机参数 b 的强度. u 为定义在 $[0, +\infty]$ 上服从指数分布概率密度函数的随机变量.根据正交多项式逼近原理,系统 (5) 的响应可以展开成下列级数形式:

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^N x_i(t) L_i(u), \quad (7)$$

式中 $L_i(u)$ 表示第 i 个 Laguerre 多项式, N 代表所取多项式的最大项数,并且有

$$x_i(t) = \int_0^{+\infty} p(u) x(t, u) L_i(u) du.$$

同时注意到只有 $N \rightarrow \infty$ 时,级数和 $\sum_{i=0}^N x_i(t) L_i(u)$ 才能精确代表随机系统的解,否则有限项的级数只能是原系统的近似解.在以下的数值分析中,为了方便计算,取 $N = 4$.

把(6)(7)式代入(5)式,可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) \sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \\ & - \delta u \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \right) \\ & + \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \right)^3 = F \cos(1.2t). \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式等号左端的非线性项 $\left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \right)^3$ 可以展开为随机变量的三项 Laguerre 多项式乘积形式,借助 Laguerre 多项式的循环推导公式(3),多项式的三项乘积可以进一步约化成相关单个多项式的线性组合,如

$$L_0(u)^3 = L_0(u),$$

$$L_1(u)^2 L_0(u) = L_2(u) - 2L_1(u) + L_0(u),$$

...

定义线性组合中 $L_i(u)$ 的系数为 $X_i(t)$ (8)式等号左端的非线性项最终可以转化为

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \right)^3 \\ & = X_0(t) L_0(u) + X_1(t) L_1(u) + \dots \\ & = \sum_{i=0}^{12} X_i(t) L_i(u), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $X_i(t) (i = 0, 1, 2, \dots, 12)$ 的表达式借助计算机代数方法 Maple^[18]算出.此时(8)式等号左端含随机变量的项可以化为

$$\begin{aligned} & u \delta \left(\sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \right) \\ & = \delta \sum_{i=0}^4 x_i(t) [(2i+1) L_i(u) \\ & \quad - i^2 L_{i-1}(u) - L_{i+1}(u)] \\ & = \delta \left(\sum_{i=0}^4 L_i(u) [(2i+1)x_i(t) \right. \\ & \quad \left. - (i+1)^2 x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)] \right. \\ & \quad \left. - L_5(u) x_4(t) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

为简化计算及逼近解的定义,可令(10)式中 $x_{-1}(t)$,

$x_5(t)$ 为零.把(9)(10)式代入(8)式,可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) \sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u) \\ & + \sum_{i=0}^{12} X_i(t) L_i(u) - \delta \left(\sum_{i=0}^4 L_i(u) [(2i+1)x_i(t) \right. \\ & \quad \left. - (i+1)^2 x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t)] - L_5(u) x_4(t) \right) \\ & = F \cos(1.2t). \end{aligned} \quad (11)$$

在(11)式等号的两端依次乘以 $L_j(u) (j = 0, 1, 2, \dots)$,再关于 $L_i(u) L_j(u)$ 取数学期望,为方便对(11)式求解,可令 $i = 0, 1, \dots, 4$.由 Laguerre 多项式的正交性,可以借助 Laguerre 多项式逼近法把含有服从拱形分布的随机参数的随机双势阱 Duffing 系统简化成为一个与其等价的确定性系统,等价的方程组为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) x_0 + X_0 \\ & - \delta [x_0(t) - x_1(t)] = F \cos(1.2t), \\ & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) x_1 + X_1 \\ & - \delta [3x_1(t) - 4x_2(t) - x_0(t)] = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) x_2 + X_2 \\ & - \delta [5x_2(t) - 9x_3(t) - x_1(t)] = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) x_3 + X_3 \\ & - \delta [7x_3(t) - 16x_4(t) - x_2(t)] = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 0.3 \frac{d}{dt} - \bar{b} \right) x_4 + X_4 \\ & - \delta [11x_4(t) - 25x_5(t) - x_3(t)] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

令等价系统的初始条件为

$$x(0) = [x_0(0), \dots, x_4(0)]^T,$$

$$\dot{x}(0) = [\dot{x}_0(0), \dots, \dot{x}_4(0)]^T.$$

通过数值方法就可求得(12)式的数值解 $x_i(t) (i = 0, 1, \dots, 4)$.原非线性随机系统的逼近随机响应可以近似地表示为

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^4 x_i(t) L_i(u). \quad (13)$$

非线性随机系统的集合平均响应为

$$E[x(t, u)] = \sum_{i=0}^4 x_i(t) E[L_i(u)] = x_0(t). \quad (14)$$

当 $\delta = 0$ 时,随机 Duffing 系统退化为确定性系统

$$\ddot{x} + 0.3\dot{x} - \bar{b}x + x^3 = F \cos(1.2t). \quad (15)$$

定义(15)式的初始条件为 $x_0 = x(0), y_0 = \dot{x}(0)$.接

下来,通过比较随机双势阱 Duffing 系统的集合平均响应和确定性 Duffing 系统的响应来研究非线性随机参数系统——具有随机参数的 Duffing 系统在随机因素影响下的分岔和混沌行为. 本文中的激励幅值以及随机强度 δ 的取值较小,因此令确定性等价系统(12)的初始条件的取值与确定性系统(15)的初始条件的取值相同,即

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(0), \\ y_0 &= \dot{x}_0(0), \\ x_i(0) &= \dot{x}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

(12)式的初始条件可取为

$$\begin{aligned} x(0) &= [2.0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ y(0) &= [4.0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ x_0 &= 2.0, \quad y_0 = 4.0. \end{aligned} \quad (16)$$

4. 含随机参数双势阱 Duffing 系统的分岔和混沌分析

确定性受迫双势阱 Duffing 系统(15)在参数 $\bar{b} = 1.0$, 初始条件满足(16)式时,分岔参数图如图2(a)所示. 由图2(a)可知,随着谐和激励振幅的增大,系统经历了一个由周期 $1T$ 到周期 $2T$ 再到周期 $4T$, 然后到周期 $8T$ 的倍周期分岔,继而依照文献[19]中的结论,系统由倍周期分岔通向混沌状态,随后又由混沌状态进入稳定状态,然后再次达到混沌

状态的过程. 含随机参数的双势阱 Duffing 系统在 $\bar{b} = 1.0, \delta = 0.01$, 初始条件相同时的分岔参数图如图2(b)所示. 由图2(b)可见,随机系统的运动状态基本与确定性系统保持一致,经历了同样的低倍周期的倍周期分岔运动. 当激励振幅继续增大时,随机参数系统没有出现类似确定性 Duffing 系统的高倍周期的倍周期分岔状态,而是直接进入一个非常短暂的混沌状态,继而又进入一个低倍周期的倍周期分岔状态. 这一状态也非常短暂,随后随机参数系统进入不稳定状态. 混沌过后,确定性系统出现了一个稳定的过渡窗口,而随机参数系统则没有这一现象.

通过图2(a)和(b)的比较可以发现,确定性双势阱 Duffing 系统和含随机参数的随机双势阱 Duffing 系统在谐和激励振幅为分岔参数时的动力学行为结构比较相似,但由于随机因素的影响,随机参数系统的动力学行为出现了突变. 首先其倍周期分岔没有像确定性系统一样,在周期激励增大的过程

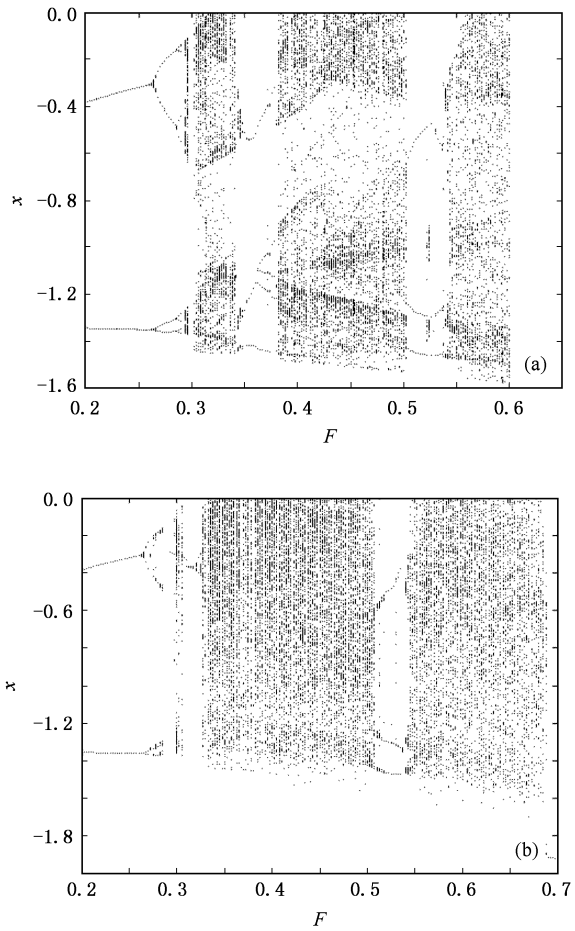


图2 分岔参数图 (a)确定性系统 $\bar{b} = 1.0, \delta = 0.0$ (b)随机参数系统 $\bar{b} = 1.0, \delta = 0.01$

中由周期 $1T$ 倍增到周期 $2T$ 再倍增到周期 $4T$ 到周期 $8T$, 而是由周期 $1T$ 分岔到周期 $2T$, 再到周期 $4T$, 之后就进入混沌状态. 当 $F \in [0.2, 0.264)$ 时,数值模拟出的集合平均响应相轨的周期为周期 $1T$, 当 $F \in [0.264, 0.287)$ 时,其周期倍增为周期 $2T$, 当 $F \in [0.287, 0.288)$ 时,系统的周期倍增到周期 $4T$. 其次,随机参数系统经历短暂混沌后又进入了一个倍周期状态,而此时确定性系统正处于混沌状态中. 图3(a)(b)(c)分别是确定性双势阱 Duffing 系统在分岔参数 F 取 $0.31, 0.325, 0.33$ 时系统的 Poincaré 截面图. 图3中具有自相似性质的轨线为系统的混沌吸引子. 此时具有随机参数的双势阱 Duffing 系统的相轨图如图4所示. 当 $F = 0.31$ 时,对应取定的初始条件,数值模拟结果显示出一稳态的周期 $1T$ 的响应相轨,如图4(a)所示. 当 $F = 0.325$ 时,稳态周期 $1T$ 的响应相轨被另一周期 $2T$ 的相轨所代替,如图4(b)所示. 图4(c)为以上两种状态的

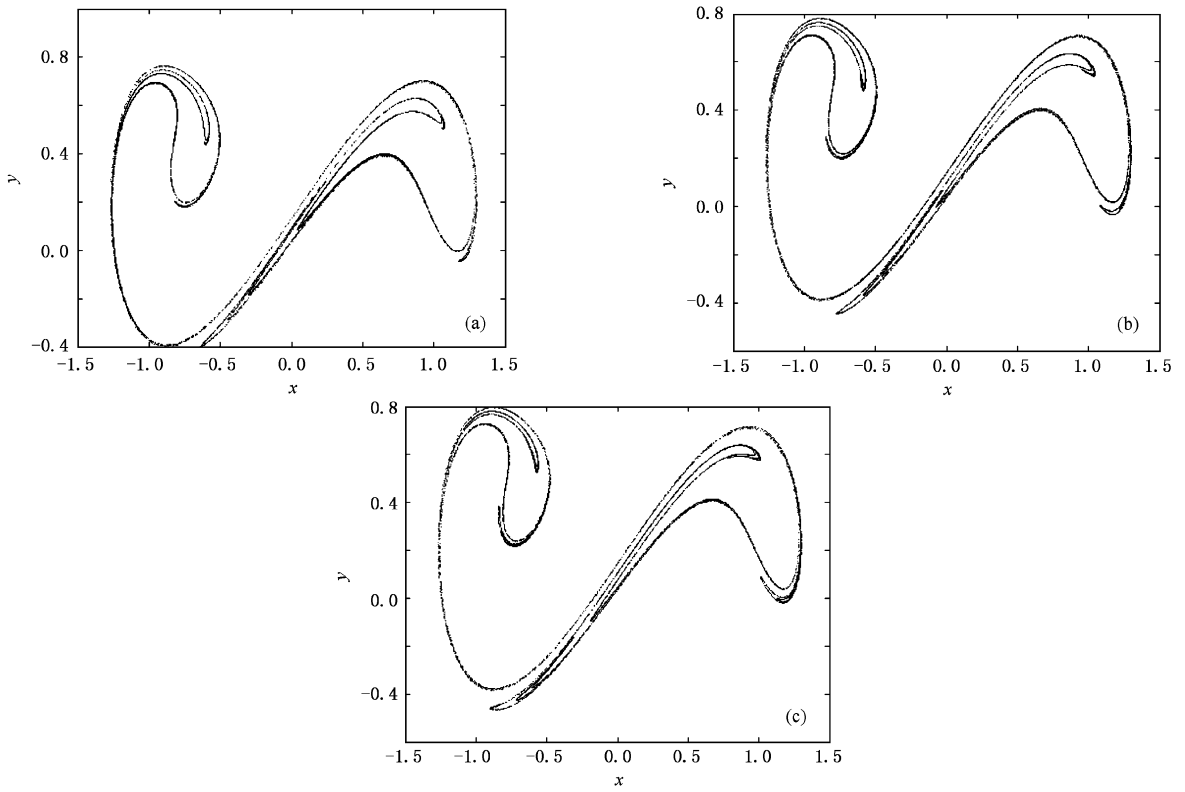


图 3 确定性 Duffing 系统的 Poincaré 截面图 $\bar{b} = 1.0, \delta = 0.0$. (a) $F = 0.31$, (b) $F = 0.325$, (c) $F = 0.33$

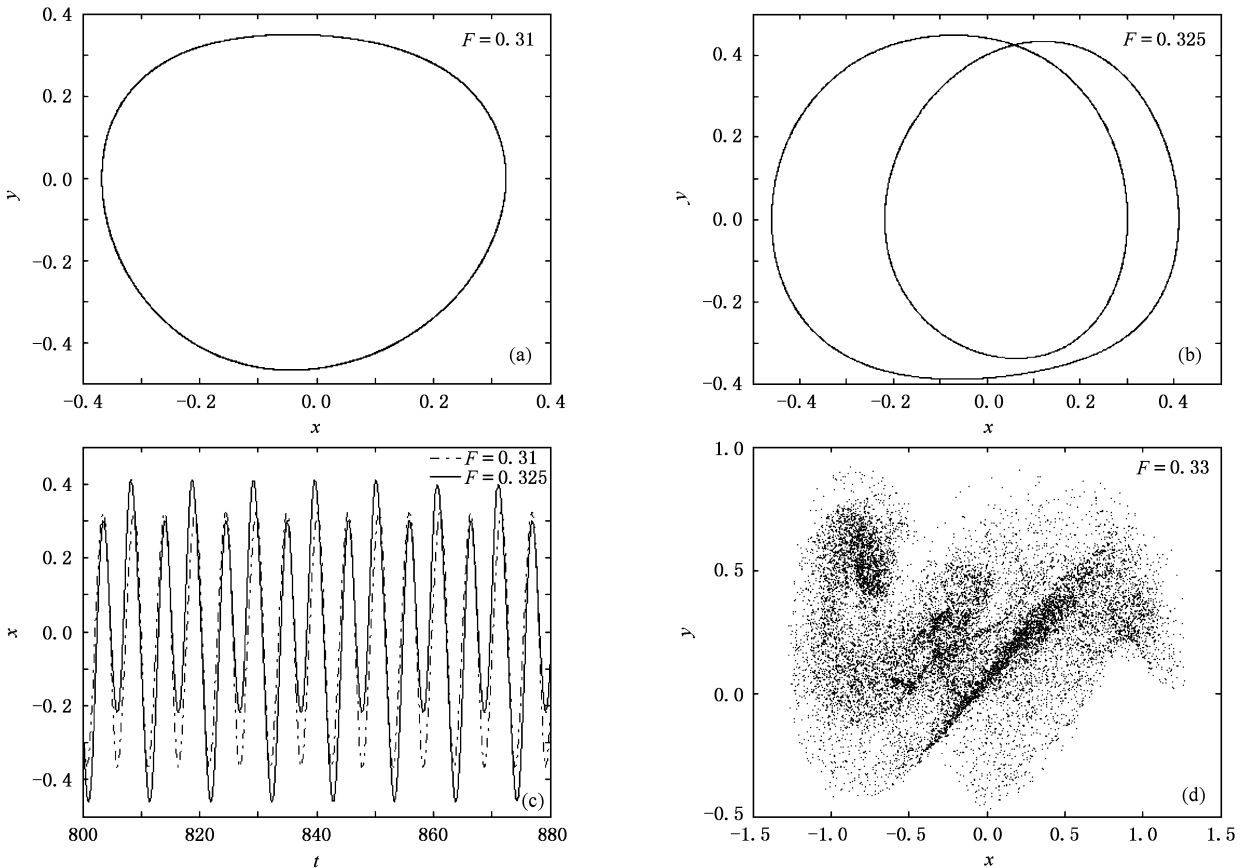


图 4 随机 Duffing 系统 $\bar{b} = 1.0, \delta = 0.01$ 的相轨图 (a) (b) 时间历程图 (c) 和 Poincaré 截面图 (d)

时间历程比较图. 经历了这一短暂的倍周期分岔后, 随机参数系统也进入了混沌状态, 当 $F = 0.33$ 时, 图 4(d) 为随机参数系统的 Poincaré 截面图, 图中点的分布域与确定性系统的吸引子相似, 但是比较分散, 没有明显的自相似性, 但结合分岔参数图可见随机参数系统此时已经进入混沌状态.

5. 结 论

针对具有随机参数的非线性随机动力系统, 正交多项式逼近提供了一种有效分析方法, 可以把非

线性随机参数动力学系统约化成等价的确定性扩阶系统, 再应用传统的数值方法来研究其动力学行为. 文中以含有指数分布随机参数的双势阱 Duffing 为例, 应用 Laguerre 多项式逼近法研究了随机参数系统的分岔和混沌行为. 数值结果显示随机参数系统在整体动力学结构上与确定性系统保持了基本的一致, 但是在某些局部的小区域, 受随机因素的影响, 其行为发生了突变. 由此可见, 正交多项式逼近法是一种探索非线性系统丰富现象的新方法, 可以借助等价确定性模型研究随机参数 Duffing 系统其他丰富的动力学行为.

- [1] Guckenheimer J, Holmes P J 1983 *Nonlinear Oscillators, Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields* (New York : Springer-Verlag)
- [2] Holmes P J 1979 *Philos. Trans. R. Soc. A* **292** 419
- [3] Moon F C, Holmes P J 1979 *J. Sound Vib.* **65** 275
- [4] Osipov G, Glatz L, Troger H 1998 *Chaos Solitons Fract.* **9** 307
- [5] Litvak-Hinenzon A, Rom-Kedar V 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4964
- [6] Chacón R, García-Hoz A M 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6558
- [7] Kim S Y, Kim Y 2000 *Phys. Rev. E* **61** 6517
- [8] Szemplińska-Stupnicka W, Zubrzycki A, Tyrkiel E 2000 *Int. J. Bifurc. Chaos* **10** 1367
- [9] Zhu W Q, Huang Z L, Suzuki Y 2001 *Int. J. Non-Linear Mech.* **36** 1235
- [10] Rong H W, Meng G, Wang X D 2003 *J. Sound Vib.* **266** 875
- [11] Xu W, He Q, Rong H W *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐 伟、贺 群、戎海武等 2003 物理学报 **52** 1365]
- [12] Zhao L, Chen Q 1999 *Adv. Mech.* **29** 9 (in Chinese) [赵 雷、陈 虬 1999 力学进展 **29** 9]
- [13] Li J, Liao S T 2002 *Acta Mech. Sin.* **34** 416 (in Chinese) [李 杰、廖松涛 2002 力学学报 **34** 416]
- [14] Fang T, Leng X L, Song C Q 2003 *J. Sound Vib.* **226** 198
- [15] Leng X L 2002 *Ph. D. Thesis* (Xi'an : Northwestern Polytechnical University) (in Chinese) [冷小磊 2002 博士学位论文 (西安 : 西北工业大学)]
- [16] Ma S J, Xu W, Li W *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese) [马少娟、徐 伟、李 伟等 2005 物理学报 **54** 3508]
- [17] Liu S K, Liu S D 1988 *Special Function* (Beijing : China Meteorological Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达 1988 特殊函数 (北京 : 气象出版社)]
- [18] Kammerich E 1999 *A Guide to Maple* (New York : Springer)
- [19] Ouyang B Y, He X T, Chen S G 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 7 (in Chinese) [欧阳碧耀、贺贤士、陈式刚 1994 物理学报 **43** 7]

Analysis of bifurcation and chaos in double-well Duffing system via Laguerre polynomial approximation *

Ma Shao-Juan^{1,2)†} Xu Wei¹⁾ Li Wei¹⁾

¹ *Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

² *Department of Information and Computation Science, Second Northwest University for Nationalities, Yinchuan 750021, China*

(Received 28 June 2005; revised manuscript received 10 April 2006)

Abstract

Laguerre polynomial approximation method is applied to study the period-doubling bifurcation and chaos behavior in double-well Duffing system with a random parameter subjected to harmonic excitation. Firstly the stochastic system is reduced to its equivalent deterministic counterpart, through which the response of the stochastic system can be obtained by numerical methods. Then bifurcation and chaos in the stochastic double-well Duffing system is explored. Numerical simulations show that the nonlinear dynamical behavior is similar to their counterpart in deterministic nonlinear system such as period-doubling bifurcation, but in some local areas they are shown to have their specific features.

Keywords: double-well Duffing system, exponential distribution probability density function, Laguerre polynomial approximation, stochastic bifurcation

PACC: 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091, 10332030).

† E-mail: mashaojuan@mail.nwpu.edu.cn