

高斯白噪声对神经元二维映射 模型动力学的影响^{*}

宋 杨 赵同军[†] 刘金伟 王向群 展 永

(河北工业大学理学院, 天津 300130)

(2005 年 12 月 12 日收到 2006 年 4 月 25 日收到修改稿)

从神经元二维映射模型出发, 用高斯白噪声模拟了神经元的噪声环境, 进而研究了高斯白噪声对参数空间相图的影响. 研究发现, 噪声可以提高系统的可兴奋性, 通过数值模拟研究了噪声引起的相干共振现象. 结果表明, 只有当系统参数选取在静息区域且接近连续点火和静息状态分界线时才可以得到相干共振现象.

关键词: 高斯白噪声, 神经元二维映射模型, 相图, 相干共振

PACC: 0547, 0545, 8730C

1. 引 言

神经元在产生动作电位的生物学过程中总是要受到环境中各种噪声的影响. 这些噪声包括细胞膜内离子通道开合概率的随机性波动、突触前神经元输出电流的变动以及局域膜电导的涨落等因素对膜电位的影响. 若这些涨落或波动的强度足够大, 就可以引起一系列的随机性兴奋, 使系统从静息状态跃变到兴奋状态, 进而影响系统参数空间状态区域的划分. 噪声是如何影响系统动力学行为的? 不同强度噪声的影响是否相同? 这些问题还有待于进一步深入研究.

噪声通常被认为是有害的, 然而在一些非线性系统中噪声对一些重要的动力学过程的发生是必要的. 1981 年, Benzi 及其合作者^[1]在研究周期性出现的冰川期时发现存在随机共振(stochastic resonance)这一奇异的现象. 在随后的几十年里, 人们深入研究了许多系统的随机共振现象, 比如非线性光学系统中弛豫速率与随机共振^[2]、噪声环境下弱信号的检测^[3]、利用随机共振在强噪声下提取信息信号^[4]等等. 在生物学体系中, 大量的例证促使人们从理论^[5, 6]和实验^[7-10]的角度深入研究随机共振现象.

1993 年, Gang 等^[11]发现: 在噪声驱动(无外部信

号输入)的可兴奋系统中, 当调节输入噪声的强度为适当量值时, 系统输出变得有序, 这种现象称为“相干共振”(coherence resonance)或“自治随机共振”(autonomous stochastic resonance). 在许多可兴奋性系统中都可以观察到这种现象, 如 Fitz-Hugh-Nagumo 模型^[12]、Plant 模型和 Hindemmarsh-Rose 模型^[13]以及 Hodgkin-Huxley(HH)模型^[14, 15].

近年来, 大脑神经系统的复杂性及其在嘈杂环境中传输信号的高效性引起神经生理学家越来越高的兴趣, 他们提出了许多模型^[16]以研究噪声的影响. 目前, 通过对随机共振和相干共振现象的研究, 已经很好地证实了噪声帮助神经元感受和传递阈下小幅信号的特性. 然而, 实际神经元是否真正存在这一特性还有待进一步证实. 这激励人们从实验和理论两方面研究这些现象发生的条件. 本文研究神经元的相干共振行为, 试图给出理论解释.

2. 模 型

2002 年, Rulkov^[17]最早提出了二维映射神经元模型. 该模型用两个变量描述神经元的特性, 其动力学方程为

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n + \beta_n), \quad (1a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu f(x_n + 1) + \mu \sigma_n. \quad (1b)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10375016, 10474018)和河北省自然科学基金(批准号: A200400005)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: zhaotj66@eyou.com

这里,下标 n 表示迭代序数; x_n 为快速动力学变量,表征神经元的膜电位; y_n 为慢动力学变量,表征神经元细胞膜上离子通道的门控离子(通常为 Ca^{2+})浓度,为了使 y_n 随时间演化缓慢,选取参量 $\mu = 0.001$, μ 的取值很小使得 x_n 的变化对 y_{n+1} 的影响十分微小; β_n 和 σ_n 描述外部对系统的输入或影响, σ_n 项也可以用作控制单个神经元动力学行为的参量。 $f(x, y)$ 为不连续函数,具体形式如下:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha(1-x) + y & (x \leq 0), \\ \alpha + y & (0 < x < \alpha + y), \\ -1 & (x \geq \alpha + y). \end{cases} \quad (2)$$

这里 α 是系统参量.考虑输入 $\beta_n = \beta$, $\sigma_n = \sigma$ 均为常量并且注意到如果 β 为常量,可以利用 $y_n + \beta \rightarrow y_n^{new}$ 将 β 从方程中去掉.这样,单个神经元映射的动力学行为只依赖于参量 α 和 σ ,映射可以改写为如下形式:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad (3a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu f(x_n + 1) + \mu\sigma. \quad (3b)$$

参数取不同值时,此模型可以模拟神经元处于静息(silence)、连续点火(continuous spikes)和爆发式点火(bursts of spikes)等不同状态的行为.图 1 给出

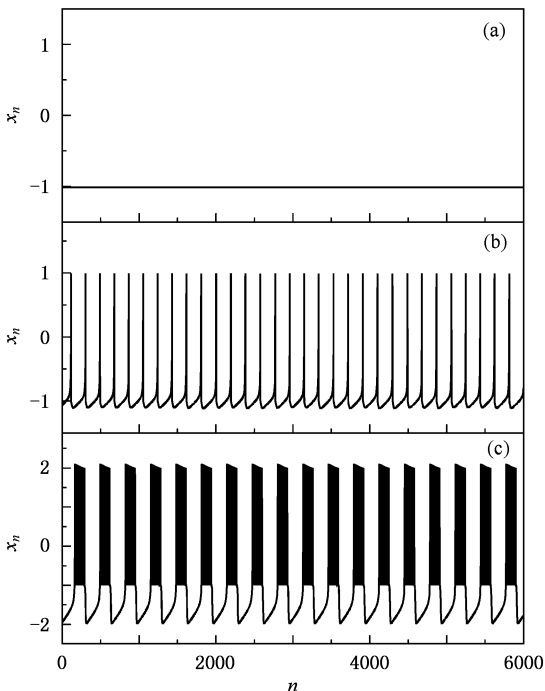


图 1 神经元动作电位的三种典型状态 (a) 静息状态, $\alpha = 4.0$, $\sigma = -0.01$ (b) 连续点火状态, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.01$ (c) 爆发式点火状态, $\alpha = 6.0$, $\sigma = -0.1$

了这几种状态的典型行为以及对应的参数值.

神经元处于以上三种状态之中的哪一种取决于参数 α 和 σ 的取值,可以根据这一特性将系统参数空间划分成不同的状态区域.图 2 给出了在 (σ, α) 参数空间中系统状态相图^[17].

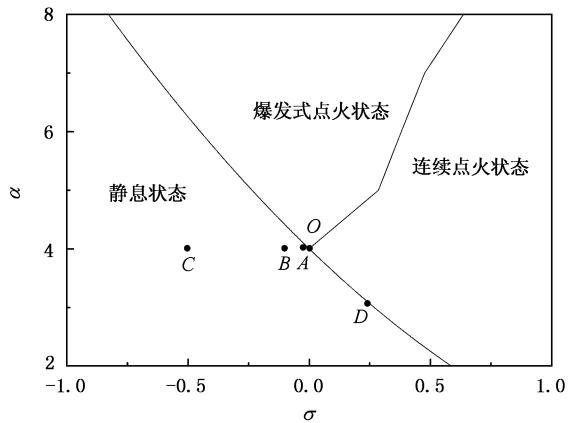


图 2 (σ, α) 参数空间系统状态相图

3. 噪声对 (σ, α) 参数空间相图的影响

在神经元的生物学环境中,存在着固有的随机性动力学涨落,这主要反映在离子浓度自发的波动上.为了模拟这种环境涨落,我们在表征离子浓度的变量 y 上加入噪声项.在这里考虑高斯白噪声,则映射改写为如下形式:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad (4a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu f(x_n + 1) + \mu\sigma + \sqrt{2D_y}\xi_{yn}, \quad (4b)$$

式中 $\sqrt{2D_y}\xi_{yn}$ 为噪声项,它是强度为 D_y 的高斯白噪声,平均值为零,方差为 $2D_y$.

噪声的存在会影响系统的一些动力学性质,下面研究噪声对 (σ, α) 参数空间相图的影响.图 3 给出了当噪声强度 D_y 为 10^{-4} 和 10^{-5} 时 (σ, α) 参数空间相图的变化.

图 3 中实线表示没有噪声影响时系统在 (σ, α) 参数空间的相变曲线,虚线和点划线分别表示加入强度为 10^{-5} 和 10^{-4} 的高斯白噪声时系统的相变曲线.图 3 中静息、连续点火和爆发式点火区域的相对位置与图 2 类似.从表面上看,噪声的存在似乎只是扩大了爆发式点火的区域,但由于参数空间是无限大的,噪声的实际效果是将区域间的分界线整体向右下方平移.从物理角度看,这一平移的效果是噪声提高了神经元的可兴奋性,也就是噪声降低了神经

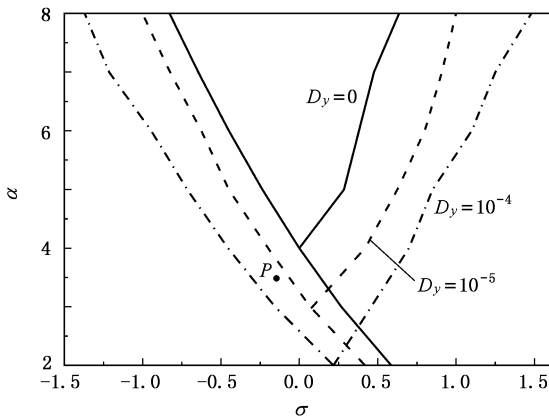


图3 噪声对 (σ, α) 参数空间相图的影响

元点火的相对阈值. 在低噪声情况下, 可兴奋性提高或降低的程度与噪声的强度成正比. 例如在图3中, 若系统参数在 P 点取值, 则在未加入噪声的情况下神经元处于静息状态, 当加入强度为 10^{-5} 的噪声后, 噪声虽然使得神经元的可兴奋性提高, 但由于噪声强度不够大, 神经元膜电位无法达到点火阈值, 所以这时系统仍处于静息状态. 如果将噪声强度提高到 10^{-4} , 这时神经元膜电位可以随机地越过阈值而产生爆发式点火, P 点也就被划分到了爆发式点火区域.

4. 相干共振现象

在没有外部信号输入情况下, 一定强度的噪声可以驱动系统并使系统行为变得有序. 为了得到较为明显的相干共振现象, 将噪声项直接加在快速变量 x 上, 则系统映射方程改写为如下形式:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) + \sqrt{2D_x}\xi_{x,n}, \quad (5a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu f(x_n, y_n) + \mu\sigma, \quad (5b)$$

式中 $\sqrt{2D_x}\xi_{x,n}$ 仍为高斯白噪声, 其强度为 D_x , 平均值为零, 方差为 $2D_x$.

首先, 若系统参数选取在相空间中的 A 点($\alpha_0 = 4.0, \sigma_1 = -0.01$) (见图2), A 点位于静息区域, 且十分接近三相点 O ($\alpha_0 = 4.0, \sigma_0 = 0.0$). 在无噪声情况下, 系统处于静息状态(阈值 $\sigma_1 < \sigma_0$), 可以保证加入噪声之后得到的峰电位是完全由噪声所激发的. 加入足够强度的噪声后, 膜电位随机地越过点火阈值, 系统对这一刺激的反应是产生一系列不规则分布的峰电位. 图4中给出了在0—10000步迭代中

不同噪声强度下的峰序列. 从图4可以看出, 当噪声强度 D_x 取不同值时, 相应的峰序列有很大差别.

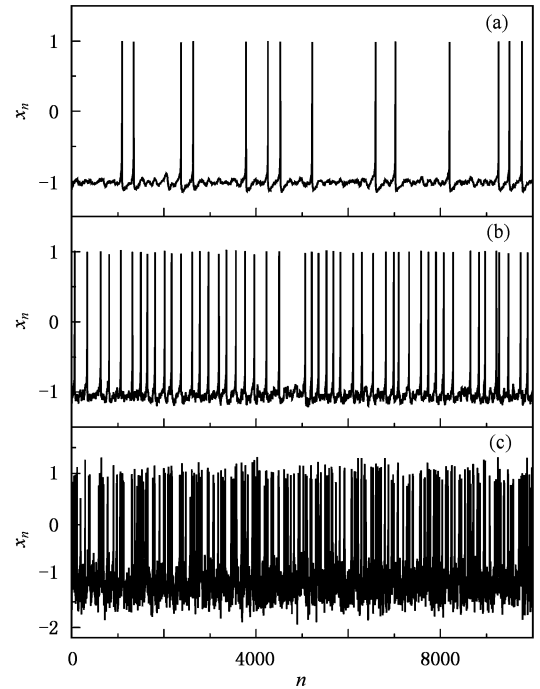


图4 不同噪声情况下的峰序列 (a) $D_x = 10^{-5}$, (b) $D_x = 10^{-4}$, (c) $D_x = 10^{-2}$

从图4还可以看出, 噪声强度越大, 单位迭代步数内的峰电位也越多. 从峰序列分布的角度看, 当噪声强度较小($D_x = 10^{-5}$)时, 峰电位基本上是随机分布的(图4(a)). 而当强度过大($D_x = 10^{-2}$)时, 噪声在变量 x_n 中所占的比例过大, 导致峰电位趋向于不规则分布(图4(c)). 只有当强度适中($D_x = 10^{-4}$)时, 峰电位分布变得基本均匀(图4(b)), 但与连续点火区域的均匀分布还有一定差别.

受激系统有两个特征时间, 一个是激发时间(activation time) t_a , 即激发系统离开定点所需时间, 另一个是偏移时间(excursion time) t_e , 即系统由激发态回到定点所需时间, 其量值大约是一个极限环的周期. 峰间间隔 T 就是这两个特征时间之和, 即 $T = t_a + t_e$. 这里由于模型为映射差分方程, 本文所涉及时间均无量纲.

为了定量地描述, 参照文献[12]的做法, 引入峰间间隔的标准差与平均值的比值 R 作为衡量峰序列有序度的标准, 称为相干共振系数. R 的具体形式如下:

$$R = \frac{\sqrt{T^2 - \overline{T^2}}}{T} = \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{T}, \quad (6)$$

式中 $\bar{\cdot}$ 表示取平均值, $\text{var}(T)$ 表示方差. 对于 Poisson 序列, R 趋近于 1. 若 $R < 1$, R 值越小则说明序列越有规律. 对于周期性确定序列, $R = 0$. 图 5 给出了 R 随噪声强度 D_x 的变化曲线.

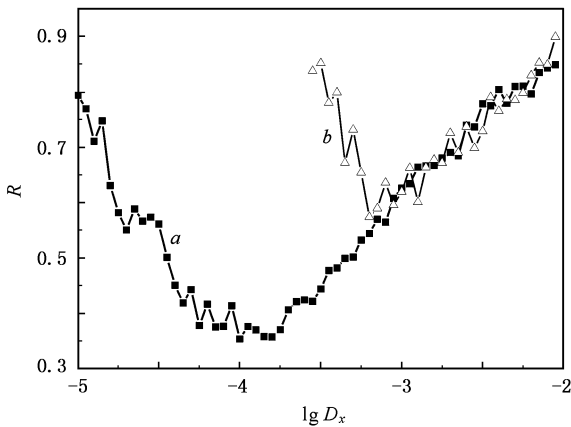


图 5 相干共振系数 R 随噪声强度 D_x 的变化曲线. 曲线 a 为系统参数取值对应相图上 A 点的情况, 曲线 b 为系统参数取值对应相图上 B 点的情况. 图中的每一个点均为 10000 次迭代的统计结果.

激发时间 t_a 和偏移时间 t_e 与噪声强度 D_x 的依赖关系不同, 从而导致了峰间间隔的相干共振现象. 对于噪声强度较小的情况, 系统要在定点附近振荡很长时间才能产生峰电位, 这时 $t_a \gg t_e$, 峰间间隔的主要部分为激发时间, 即 $T \approx t_a$. 由 Kramers 规则^[18,19]可知, 噪声强度较小的情况下, 激发时间随噪声强度 D_x 的增加而迅速减小, 即

$$t_a \propto \exp(c/D_x),$$

$$\text{var}(t_a) \approx t_a^2,$$

其中 c 为常数. 由系数 R 的定义可知

$$R \approx R_a \approx 1.$$

对于强噪声情况, 激发时间 t_a 在峰间间隔中所占的比例基本上可以忽略不计, 而偏移时间 t_e 将占据主要部分, 即 $T \approx t_e$. 如果系统的激发态行为基本一致, 则可以认为 t_e 与噪声强度无关, 可以证明^[20] 方差

$$\text{var}(t_e) \propto D_x^2 t_e.$$

所以在这种情况下,

$$R \approx R_e \propto D_x t_e^{-1/2}.$$

由此可以看出, 波动随着噪声强度增加而增加. 在上述两种极限条件下, 存在一个交叉点, 这时 R 可以达到最小值. 当噪声强度选取适当且平均刺激强度达到阈值时, 系统变量完成一个极限环运动的时刻,

恰好也准备开始下一个循环, 这时峰序列的有序度就达到了最佳.

从以上分析可以看出, 相干共振在一定噪声强度下才能发生, 并且要求偏移时间占主导地位, 控制着峰序列的主要结构, 但同时偏移时间的量值又不是很大, 这时其波动(即方差)才可以保持在较低水平, 并得到最有序的峰序列.

下面研究参数选取对于相干共振的影响. 仍将系统参数选取在静息区域, 不同的是选取 B 点($\sigma_0 = 4.0, \alpha_2 = -0.1$) (见图 2), 它较 A 点更远离三相点 O . 按照同样的方法, 可以得到这种情况下相干共振系数 R 随噪声强度的变化曲线, 如图 5 中曲线 b 所示.

比较图 5 中曲线 a 和曲线 b 可以看出, 当系统参数取值在 A 点和 B 点时, 都可以观察到相干共振现象, 即对于不同的参数取值点, 调整噪声强度为某些适当值时, 峰序列的有序度可以达到这一参数情况下的最佳状态. 同时也看到, 当系统参数取值在 B 点时, 相干共振系数 R 的最小值远远大于 A 点时 R 的最小值, 也就是当参数取值在 B 点时, 峰序列无法达到在 A 点时的有序程度. 并且注意到, 在 B 点时系统达到共振时的噪声强度比在 A 点时的噪声强度高出大约一个数量级. 这些差异都是因为 B 点比 A 点处于更深的静息状态, 其平均膜电位与点火阈值的差距也更大, 因此激发峰电位所需要的噪声也就比 A 点更强. 然而, 由上述相干共振的发生条件可知, 噪声的强度不可以过大. 这两方面原因就造成了图 5 中的情况. 当系统参数选取在更加远离 O 点的 C 点($\alpha_0 = 4.0, \sigma_3 = -0.5$) (见图 2) 时, 这两方面再也无法得到协调, 也就无法观察到相干共振现象. 所以可以认为, 系统参数取值越接近三相点, 所得峰序列的最佳有序度也就越高, 系统在该参数点的相干共振性越好.

如果将参数选取在静息区域且接近静息和连续点火区域分界线时, 是否也能观察到相干共振现象呢? 为了进一步研究这一问题, 选取静息区域中 D 点($\alpha_1 = 3.0, \sigma_4 = 0.26$) (见图 2) 此点与静息区域和连续点火区域分界线上点($\alpha = 3.0, \sigma = 0.268$) 很接近. 为了便于比较, 我们在图 6 中同时给出了取值在 A 点和 D 点时所得相干共振系数 R 随噪声强度 D_x 的变化曲线.

从图 6 可以看出两条曲线已经十分接近, 由此可以得出以下结论: 相干共振的发生对系统参数取

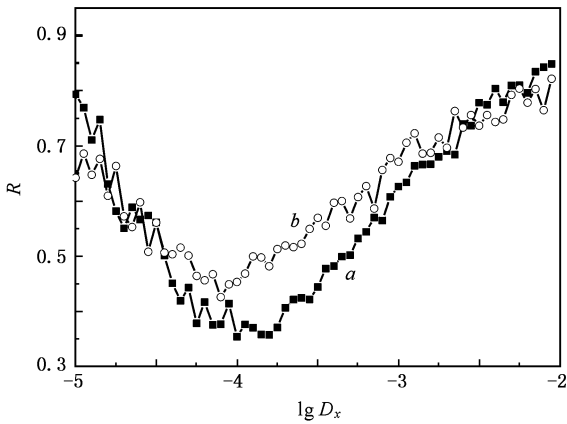


图 6 相干共振系数 R 随噪声强度 D_x 的变化曲线. 曲线 a 为参数取值对应相图上 A 点的情况, 曲线 b 为参数取值对应相图上 D 点的情况

值是有一定要求的. 首先, 要求参数取值点应在相空间中的静息区域; 其次, 由于爆发式点火峰间间隔的不规则性, 参数取值点应该接近静息区域与连续点火区域的分界线. 通过以上的数值计算可知, 取值点越接近此分界线, 所得相干共振现象就越明显. 只有

满足这两方面的要求, 才有可能观察到相干共振现象.

5. 结 论

基于神经元二维映射模型, 用高斯白噪声模拟了生命体系中的噪声环境, 进而研究了高斯白噪声对系统参数空间相图的影响. 噪声的存在使得神经元的可兴奋性提高, 如果将参数选取在原参数空间中静息区域, 在加入一定强度的噪声后系统可以产生连续式或爆发式点火. 基于这一现象, 进一步研究了噪声激发峰序列的有序度与噪声强度的关系, 并发现当噪声强度取某一有限值时, 峰序列有序度可以达到最佳, 即产生相干共振现象. 讨论了这种相干共振现象发生对于系统参数的要求, 数值模拟结果表明, 参数应在相空间中静息区域选取, 且靠近静息区域和连续点火区域的分界线.

感谢中国原子能科学研究院卓益忠研究员有益的讨论和指导.

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** 453
- [2] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [3] Hu G, Gong D C, Wen X D *et al* 1992 *Chin. Phys. Lett.* **9** 69
- [4] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [5] Longtin A 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 309
- [6] Wiesenfeld K, Pierson D, Pantazelou E *et al* 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2125
- [7] Douglass J K, Wilkens L, Pantazelou F 1993 *Nature* **365** 337
- [8] Braun H A, Wissing H, Schäfer K *et al* 1994 *Nature* **367** 270
- [9] Levin J E, Miller J P 1996 *Nature* **380** 165
- [10] Collins J J, Imhoff T T, Grigg P 1996 *Nature* **383** 770
- [11] Gang H, Ditzinger T, Ning C Z 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
- [12] Pikovsky A S, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 775
- [13] Longtin A 1997 *Phys. Rev. E* **55** 868
- [14] Lee S G, Neiman A, Kim S 1995 *Phys. Rev. E* **52** 327
- [15] Lee S G, Neiman A, Kim S 1995 *Phys. Lett. A* **200** 283
- [16] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P *et al* 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [17] Rulkov N F 2002 *Phys. Rev. E* **65** 041922
- [18] Kramers H A 1940 *Physica* **7** 284
- [19] Hänggi P, Talkner P, Borkovec M 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 251
- [20] Pikovsky A S 1984 *Z. Phys. B* **55** 149

Impact of Gaussian white noise on a two-dimensional neural map^{*}

Song Yang Zhao Tong-Jun[†] Liu Jin-Wei Wang Xiang-Qun Zhan Yong

(*School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China*)

(Received 12 December 2005 ; revised manuscript received 25 April 2006)

Abstract

Based on the two-dimensional neural map, we use the Gaussian white noise to imitate the noisy environments of neurons. We investigate the impacts of Gaussian white noise on the phase diagram of parameters. It is found that adding the noise leads to an enhancement of excitability of the system. We also study the coherence resonance (CR) by numerical simulation, and the parameter condition of the CR phenomenon is discussed. Only when the parameters of the system are chosen in the regime of silence and near the dividing line between spiking and silence can we get the CR phenomenon.

Keywords : Gaussian white noise, two-dimensional neural map, phase diagram, coherence resonance

PACC : 0547, 0545, 8730C

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10375016, 10474018) and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A200400005).

[†] Corresponding author. E-mail: zhaotj66@eyou.com