

# 理想气体球面强冲击波一般自模拟运动模型<sup>\*</sup>

卞保民 杨玲 张平 纪运景 李振华 倪晓武

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

(2006 年 1 月 4 日收到, 2006 年 4 月 25 日收到修改稿)

应用理想气体一维不定常流自模拟运动基本微分方程, 详细讨论了球面强冲击波波后气体自模拟特性, 推导出具有自模拟运动特性的球面强冲击波传播公式的一般形式. 分析结果表明, 球面强冲击波自模拟运动模型不必从具有奇异性质的点源出发, 冲击波初始速度和自模拟温度函数解一般不存在趋于无穷大的问题. Taylor 点爆炸冲击波自模拟模型只是一般自模拟模型中假设自模拟运动总能量为定值条件下的特例.

关键词: 理想气体, 球面强冲击波, 自模拟运动

PACC: 4740, 2870

## 1. 引 言

强点爆炸自模拟模型是理想气体中强爆炸球面冲击波理论研究的成功范例. 其中 Taylor<sup>[1,2]</sup>和谢多夫<sup>[3]</sup>根据量纲理论分析方法推导出的自模拟解具有经典代表性. 与 Taylor 点爆炸模型对应的球面强冲击波传播公式为<sup>[4,5]</sup>

$$R(t) = \left( \frac{E_0}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (1)$$

(1) 式与 1945 年美国第一颗原子弹爆炸冲击波的测试数据在 19.9—185 m 范围内符合相当好. 只是在距爆心 11.1 m 处的第一个测量点上, 计算结果与测量值的相对误差很大, 达到 30%<sup>[2,6]</sup>. 在此需要特别指出的是, Taylor 和谢多夫都是先用量纲分析方法推得点爆炸冲击波传播公式, 然后再将该式代入一维不定常流绝热运动微分方程进行自模拟函数的计算<sup>[3]</sup>. 这样做实际上隐含了两个假设条件, 一是自模拟运动的空间区域为  $0 \leq r \leq R$ , 二是(1)式为衰减球面强冲击波波前传播公式的唯一形式. 后来, 这种点爆炸球面冲击波自模拟模型被成功推广应用于非绝热运动气体、非完全理想气体、超星爆炸运动过程. 到目前为止, 它仍然是空气中强冲击波运动研究中最具有权威性的理论, 甚至被推广应用于广义相对论效应条件下的自相似运动理论研究<sup>[7-9]</sup>.

但是, 从物理学的意义上考虑, 这种点爆炸自模拟运动理论存在两个明显的缺陷. 首先, 由(1)式导出的冲击波初始时刻的速度、加速度趋于无穷大. 这表明该模型不能用于进行强爆炸球面冲击波初始状态的理论分析. 这可称为该模型的“第一类原点发散问题”. 其次, 该模型对应的自模拟密度解函数在原点附近趋于零, 自模拟压强解函数趋于定值<sup>[3]</sup>(参见图 1). 这意味着波后很大区域内气体温度趋于无穷大<sup>[5]</sup>, 即物理上具有不确定性. 这可称之为该模型的“第二类原点发散问题”. 第一类原点发散问题来自于爆炸源为几何“点”的假设. 因球面冲击波不一定要从“点”出发, 则有理由认为理想点源不是球面强冲击波自模拟理论模型的必要条件. 对于第二类原点发散问题, 谢多夫的解释是: 因强爆炸源区中心温度的梯度很大, 此时热传导性质变得非常重要. 若考虑热传导, 则爆炸中心的温度为有限值<sup>[3]</sup>. 这种解释实际上已经改变了研究对象的绝热过程性质, 并没有回答在绝热条件下模型本身是否必然导致中心附近局部温度趋于无穷大. 因此, 有必要分析研究非“点爆炸”意义下的理想气体球面强冲击波在绝热条件下的自模拟运动一般模型, 从理论上避免点爆炸模型时空原点处的奇异性.

本文从文献 10 建立的理想气体一维不定常流自模拟运动基本微分方程出发, 分析研究非“点爆

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60378003)资助的课题.

炸”意义下的理想气体球面强冲击波在绝热条件下的自模拟运动一般模型,推导出具有自模拟特性的球面强冲击波传播公式的一般形式,并且讨论了波

后气体自模拟一般特性.从理论上证明了在绝热条件下,理想气体球面强冲击波的自模拟运动并不一定存在时间、空间原点处的物理量发散问题.

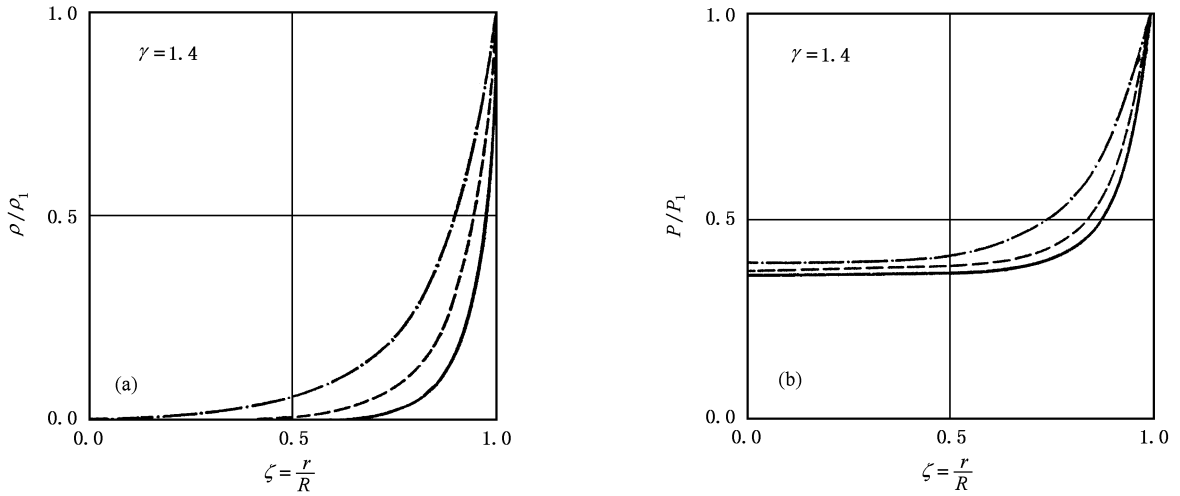


图 1 Taylor 点爆炸模型强冲击波波后密度分布(a)和压强分布(b)曲线.横坐标为空间相对坐标,实线对应于球面冲击波、虚线对应于柱面冲击波、点划线对应于平面冲击波

## 2. 理想气体球面强冲击波自模拟运动基本微分方程

理想气体球面自模拟运动具有如下基本特征<sup>[11]</sup> 对任意时刻  $t$ ,参考边界为  $R(t)$ ,波后  $r$  处的力学参量  $Y(r, t)$  一定能够表示成边界处相应的物理量  $Y_1(R)$  与无量纲函数  $y(\zeta)$  的乘积.无量纲函数  $y(\zeta)$  即是与物理量  $Y(r, t)$  对应的自模拟函数,

$$y(\zeta) = Y(r, t) / Y_1(R). \quad (2)$$

由(2)式可得球面强冲击波波后气体自模拟运动速度、密度、压强自模拟函数分别为

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= \frac{u(r, t)}{u_1}, \\ g(\zeta) &= \frac{\rho(r, t)}{\rho_1}, \\ p(\zeta) &= \frac{P(r, t)}{P_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $u_1, \rho_1, P_1$  对应于冲击波处气体的速度、密度和压强.(尽管 Taylor 和谢多夫在点爆炸强冲击波理论研究的初期就已经得到了自模拟函数的分离变量

形式,但是这种形式的重要意义却没有得到他们本人和其他研究者的充分重视.)再定义两个新的无量纲变量,一个是波后气体运动速度  $u$  与自模拟面( $\zeta$  为定值)膨胀速率  $\dot{\zeta}$  的比函数

$$\begin{aligned} L &= \frac{u}{\dot{\zeta}} = \frac{u}{D\zeta} = \frac{u(\zeta)u_1}{\zeta D} \\ &= L(\zeta)L_1, \end{aligned} \quad (4)$$

另一个是波后气体的动能密度与内能密度比函数

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\rho u^2 / 2}{P / (\gamma - 1)} = \frac{g v^2 \rho_1 u_1^2 / 2}{P_1 / (\gamma - 1)} \\ &= \alpha(\zeta)\epsilon_1. \end{aligned} \quad (5)$$

在强冲击波条件下  $L_1$  和  $\epsilon_1$  都是常数,

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{u_1}{D} = \frac{2}{\gamma + 1}, \\ \epsilon_1 &= 1, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} L(\zeta) &= L / L_1, \\ \alpha(\zeta) &= \epsilon / \epsilon_1 \end{aligned}$$

均为自模拟函数,且有  $L \geq 0, \epsilon \geq 0$ .将(3)式代入球对称一维不定常流绝热运动微分方程后可得<sup>[10]</sup>

$$\frac{d \ln \zeta}{d \ln L} = - \frac{\gamma L^2 - \frac{2\epsilon}{\gamma - 1}(1 - L)^2}{3\gamma L^2 + \frac{2\epsilon}{\gamma - 1}(1 - L)\left(\frac{d \ln u_1}{d \ln R} - 1 + L\right) + L \frac{d \ln P_1}{d \ln R}}, \quad (6)$$

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = -\frac{1}{1-L} \left\{ \frac{\left( \frac{d \ln \rho_1}{d \ln R} + 3L \right) \left[ \gamma L^2 - \frac{2\epsilon}{\gamma-1} (1-L)^2 \right]}{3\gamma L^2 + \frac{2\epsilon}{\gamma-1} (1-L) \left( \frac{d \ln u_1}{d \ln R} - 1 + L \right) + L \frac{d \ln P_1}{d \ln R}} - L \right\}, \quad (7)$$

$$\frac{d \ln p}{d \ln L} = -\frac{2\epsilon}{(\gamma-1)L} \left\{ \frac{\left( 1-L - \frac{d \ln u_1}{d \ln R} \right) \left[ \gamma L^2 - \frac{2\epsilon}{\gamma-1} (1-L)^2 \right]}{3\gamma L^2 + \frac{2\epsilon}{\gamma-1} (1-L) \left( \frac{d \ln u_1}{d \ln R} - 1 + L \right) + L \frac{d \ln P_1}{d \ln R}} - (1-L) \right\}. \quad (8)$$

由(4)–(8)式可得

$$\frac{d \ln \epsilon}{d \ln L} + \frac{\left[ \frac{d \ln \rho_1}{d \ln R} + L + 2 - \frac{2\epsilon}{L} \frac{1-L}{\gamma-1} \left( 1-L - \frac{d \ln u_1}{d \ln R} \right) \right] \left( \frac{\gamma L^2}{1-L} - 2\epsilon \frac{1-L}{\gamma-1} \right)}{\left[ 3\gamma L^2 - 2\epsilon \frac{1-L}{\gamma-1} \left( 1-L - \frac{d \ln u_1}{d \ln R} \right) + L \frac{d \ln P_1}{d \ln R} \right]} + \frac{2\epsilon}{L} \frac{1-L}{\gamma-1} - \frac{2-L}{1-L} = 0. \quad (9)$$

(9)式给出波后气体的能量密度比函数  $\epsilon$  所服从的以  $L$  为自变量的微分方程,称其为理想气体球面强冲击波自模拟运动基本微分方程.需要提请注意的是(9)式是将一般自模拟函数直接代入一维不定常流绝热运动微分方程得到的普遍结果.即除了自模拟运动状态和气体绝热状态以外没有任何先决条件.

自模拟函数  $\epsilon$  服从的微分方程中必然不显含时间  $t$ ,即(9)式中所有  $\frac{d \ln Y_1}{d \ln R}$  形式的参量均为定值.

对强冲击波有

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \rho_1}{d \ln R} &= 0, \\ \frac{d \ln u_1}{d \ln R} &= \frac{d \ln D}{d \ln R} = C_u, \\ \frac{d \ln P_1}{d \ln R} &= 2C_u. \end{aligned} \quad (10)$$

对球面冲击波的衰减过程必定有  $C_u < \alpha$  这些结论与量纲理论完全一致<sup>[5]</sup>.将  $C_u$  代入(9)式可得

$$\frac{d \ln \epsilon}{d \ln L} + \frac{\left[ L + 2 - \frac{2\epsilon}{L} \frac{1-L}{\gamma-1} (1-L - C_u) \right] \left( \frac{\gamma L^2}{1-L} - 2\epsilon \frac{1-L}{\gamma-1} \right)}{3\gamma L^2 - 2\epsilon \frac{1-L}{\gamma-1} (1-L - C_u) + 2C_u L} + \frac{2\epsilon}{L} \frac{1-L}{\gamma-1} - \frac{2-L}{1-L} = 0. \quad (9')$$

(9')式是一个常微分方程,由它可得能量密度比函数  $\epsilon$  的一般解.再将解函数  $\epsilon$  代入(6)–(8)式即可计算出所有自模拟解函数.由(6)式推知,强爆炸球面冲击波自模拟区域范围( $\zeta$  的值域)与  $C_u$  的数值有关,即一般情况下不能简单设定波后自模拟区域一定延伸到原点( $\zeta_m = 0$ )处!表明球面强冲击波自模拟运动的外边界( $R$  处)参数  $C_u$  将决定自模拟运动区域的内边界.

### 3. 理想气体球面自模拟强冲击波一般特性

#### 3.1. 理想气体球面强冲击波波后物理参量的自模拟性

除了以上已经给出的具有自模拟性质的函数

$u(r, t), \rho(r, t), P(r, t), \zeta(r, t), L(r, t), \epsilon(r, t)$  外,容易推出自模拟区域内气体的温度分布  $T(r, t)$ , 比焓分布函数  $h(r, t)$ , 比内能函数  $U(r, t)$  都是自模拟函数,

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \frac{P/\rho}{(\gamma-1)\bar{R}}, \\ h(r, t) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\bar{R}} \frac{P}{\rho}, \\ U(r, t) &= \frac{P}{\gamma-1}, \end{aligned}$$

其中  $\bar{R}$  为气体普适常数,质量、能量分布函数为

$$\begin{aligned} M(r, t) &= 4\pi \int_{r_m}^r \rho r^2 dr \\ &= 4\pi \rho_1 R^3 \int_{\zeta_m}^{\zeta} g(\zeta) \zeta^2 d\zeta, \end{aligned} \quad (11)$$

$$E(r, t) = 4\pi \int_{r_m}^r \left( \frac{\rho}{2} u^2 + \frac{P_1}{\gamma - 1} \right) r^2 dr$$

$$= 4\pi \frac{R^3 P_1}{\gamma - 1} \int_{\xi_m}^{\xi} [1 + \alpha(\xi) \epsilon_1] \xi^2 d\xi. \quad (12)$$

由(11)(12)式可知,  $M(r, t)$  和  $E(r, t)$  也是自模拟函数. 根据统计物理理论, 理想气体热力学概率  $W$  与气体温度、压强的关系为

$$\ln W = \ln \frac{T^{c_v/k}}{P^{R/k}}, \quad (13)$$

式中,  $k$  为玻尔兹曼常数,  $c_v$  为气体定容比热容. 显然,

$$W(r, t) = \frac{P^{(c_v - R)/k}(\xi) T_1^{c_v/k}}{g^{c_v/k}(\xi) P_1^{R/k}}$$

也具有自模拟特性. 单位质量气体熵函数与热力学概率  $W$  的关系为

$$S(r, t) = k \ln W. \quad (14)$$

由(14)式可知, 熵函数不能表示成自模拟坐标  $\xi$  和时间  $t$  的分离变量形式, 所以熵函数不具有自模拟性. 因此, 相应的自由能函数  $F = U - TS$ 、热力学势函数  $G = h - TS$  也不具有自模拟性.

### 3.2. 理想气体自模拟衰减球面强冲击波传播公式

在强冲击波条件下, 由(10)式中的第二式可解出自模拟衰减球面冲击波传播公式的一般形式为

$$R = R_0 \left[ \left(1 - C_u\right) \frac{\dot{R}_0}{R_0} t + 1 \right]^{\frac{1}{1-C_u}}, \quad (15)$$

式中  $R_0$  和  $\dot{R}_0$  分别代表与  $t = 0$  对应的冲击波半径和速度. 可见, 强爆炸自模拟球面冲击波的初始半径不一定为零, 初始速度也不一定为无穷大. 该结论与实际强爆炸源具有有限尺度的事实完全相符. 据此, 能够推定“点爆炸”不是球面冲击波自模拟运动的必要条件.

若假定自模拟运动气体的总能量为定值, 由(12)式可推得  $R^3 P_1$  为定值. 再由  $\rho_1, L_1$  为定值结合(5)式可得

$$R^3 \dot{R}^2 = R^3 D^2 \propto R^3 P_1 = \text{const}. \quad (16)$$

将(16)式代入(10)式中的第二式, 可得  $C_u = -3/2$ , 则(15)式可写为

$$R = R_0 \left[ \frac{5}{2} \frac{\dot{R}_0}{R_0} t + 1 \right]^{2/5} = \left[ \frac{5}{2} \dot{R}_0 R_0^{3/2} t + R_0^{5/2} \right]^{2/5}. \quad (17)$$

有意思的是, “点爆炸”冲击波传播公式(1)既可

作为(17)式中的时间满足  $\frac{5\dot{R}_0}{2R_0} t \gg 1$  时的近似表达式, 又可作为(17)式在条件  $R_0 \rightarrow 0, \dot{R}_0 R_0^{3/2} \rightarrow \text{常数}$  时的特解. 而作为特解函数时就导致冲击波初速度趋于无穷大. 由此可以十分清楚地看出, 点爆炸强球面冲击波公式是新模型的特例.

### 3.3. 自模拟球面强冲击波波后质量、能量分布特性

在球对称条件下, 由(11)式可知自模拟区域内气体的质量分布函数  $M(r, t)$  可以表示为

$$M(r, t) = 4\pi \rho_1 R^3 [\alpha(\xi) - \alpha(\xi_m)], \quad (18)$$

式中  $\alpha(\xi)$  满足

$$\frac{dG}{d\xi} = g(\xi) \xi^2.$$

初始时刻自模拟区域中的运动总质量为

$$M(R_0) = 4\pi [\alpha(1) - \alpha(\xi_m)] \rho_1 R_0^3. \quad (19)$$

由(15)(18)式, 得自模拟区域运动总质量  $M(R)$  的时间导数为

$$\frac{dM(R)}{dt} = 12\pi \rho_1 [\alpha(1) - \alpha(\xi_m)] \dot{R}_0 R_0^2$$

$$\times \left[ \left(1 - C_u\right) \frac{\dot{R}_0}{R_0} t + 1 \right]^{\frac{2+C_u}{1-C_u}}. \quad (20)$$

由(20)式可知, 自模拟区域内运动质量  $M(R)$  是随时间增大的. 在自模拟区域边界  $R$  外, 气体流动速度为零, 则单位时间内经外表面流入的气体质量与自模拟边界膨胀速度  $\dot{R}$ 、边界面积  $4\pi R^2$  和外侧气体密度  $\rho_0$  成正比; 在自模拟区域内边界处, 气体流动速度也为零, 单位时间内经自模拟内表面流出的气体质量与自模拟内边界膨胀速度  $\dot{r}(\xi_m) = \xi_m D$ 、边界面积  $4\pi r^2$  和边界气体密度  $\rho(\xi_m)$  成正比. 自模拟区域内气体质量的时间导数在数值上等于外表面气体流入率  $4\pi R^2 \dot{R} \rho_0$  减去内表面处气体的流出率

$$4\pi r^2 \dot{r} \rho_m = 4\pi R^2 \dot{R} \xi_m^3 g_m \rho_1,$$

故可得

$$\frac{dM(R)}{dt} = 4\pi (\rho_0 - \xi_m^3 g_m \rho_1) \dot{R}_0 R_0^2$$

$$\times \left[ \left(1 - C_u\right) \frac{\dot{R}_0}{R_0} t + 1 \right]^{\frac{2+C_u}{1-C_u}}. \quad (21)$$

比较(20)(21)两式, 可得

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \xi_m^3 g_m + 3 [\alpha(1) - \alpha(\xi_m)] = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (22)$$

(22)式给出与质量守恒定律对应的积分关系. 同理

可得自模拟区域气体的能量分布函数  $E(r, t)$  为

$$E(r, t) = 4\pi \frac{R^3 P_1}{\gamma - 1} [\Sigma(\zeta) - \Sigma(\zeta_m)], \quad (23)$$

式中  $\Sigma(\zeta)$  满足

$$\frac{d\Sigma}{d\zeta} = [1 + \epsilon(\zeta)] \rho(\zeta) \zeta^2.$$

初始时刻自模拟区域中的运动总能量为

$$E(R_0) = 4\pi \frac{R_0^3 P_1(R_0)}{\gamma - 1} [\Sigma(1) - \Sigma(\zeta_m)]. \quad (24)$$

由(10)(15)和(23)式可得自模拟区域运动总能量的时间导数为

$$\begin{aligned} \frac{dE(R)}{dt} &= \frac{4\pi}{\gamma - 1} [\Sigma(1) - \Sigma(\zeta_m)] (3 + 2C_u) R_0^2 \dot{R} P_1(R_0) \\ &\quad \times \left[ (1 - C_u) \frac{\dot{R}_0}{R_0} t + 1 \right]^{\frac{2+3C_u}{1-C_u}}. \end{aligned} \quad (25)$$

单位时间内经外表面流入的能量与流入气体的比内能  $\frac{P_0}{\gamma - 1}$ 、自模拟外边界膨胀速度  $\dot{R}$ 、边界面积

$4\pi R^2$  成正比,其值为  $\frac{P_0}{\gamma - 1} \dot{R} 4\pi R^2$ . 在自模拟区域内边界处,气体流动速度为零,则气体的动能密度为零,内表面处能量的流出率与流出气体的比内能、自模拟边界膨胀速度、边界面积成正比,

$$\frac{P_m}{\gamma - 1} \dot{r} 4\pi r^2 = \zeta_m^3 p_m \frac{P_1}{\gamma - 1} \dot{R} 4\pi R^2.$$

两者之差为自模拟区域内气体能量的时间导数,即有

$$\frac{dE(R)}{dt} = \frac{4\pi}{\gamma - 1} (P_0 - \zeta_m^3 p_m P_1) R^2 \dot{R}. \quad (26)$$

比较(25)(26)两式,可得

$$\frac{P_0}{P_1} = \zeta_m^3 p_m + (3 + 2C_u) [\Sigma(1) - \Sigma(\zeta_m)]. \quad (27)$$

由于自模拟运动要求(27)式等号右端为常数,表明只有冲击波强度满足  $\frac{P_0}{P_1} \rightarrow 0$  时,才可作为自模拟运动近似.这一条件与点爆炸模型一致,但在这里是根据自模拟微分方程推出的结果.此时有

$$\zeta_m^3 p_m + (3 + 2C_u) [\Sigma(1) - \Sigma(\zeta_m)] = 0. \quad (28)$$

因为  $\zeta_m^3 p_m \geq 0$ ,即一般条件下自模拟球面强冲击波要求参数  $C_u < -\frac{3}{2}$ .结合(25)式可知,在爆炸能量瞬间全部转变成爆炸源区内气体的内能和动能的假设条件下,球面强冲击波自模拟运动区域内的总能量是不断减小的.若  $3 + 2C_u = 0$ ,由(25)式得

$$\frac{dE(R)}{dt} = 0,$$

即自模拟区域内能、动能之和不变.再由(28)式可得对应的  $\zeta_m = 0$ ,这正是量纲理论所给出的自模拟区域达到原点的极限情况.这又一次表明,Taylor的点爆炸球面强冲击波是球面强冲击波自模拟运动的特例.文献[10]已证明,自模拟区域延伸到原点必将导致温度函数趋于无穷大.所以,点爆炸模型出现第二类原点发散问题,是其预先假定自模拟区域总能量不变所致.

### 3.4. 理想气体球面强冲击波波后自模拟运动区域的内边界特性

自模拟区域内气体的温度分布函数  $T(r, t)$  与(4)(5)式相结合,可得  $\epsilon$  函数的另一表达式,即

$$\epsilon = \frac{\rho u^2}{P} \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{D^2}{2R} \frac{\zeta^2(L)}{T(L)} L^2. \quad (29)$$

从物理学角度考虑,气体温度  $T(L)$  是大于零的有限值.对于衰减球面冲击波,从边界  $R$  向内  $\zeta$  值是减小的,当自变量  $L \rightarrow \infty$  (即气体宏观运动速度趋于零)时,考虑到(29)式可设能量密度比函数的渐近表达式  $\epsilon = KL^{2+\alpha}$ ,其中  $\alpha \geq 0$ ,  $K$  为常数.代入基本微分方程(9)式可得

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow 0} \left[ \frac{2 \left( 1 - KL^{1+\alpha} \frac{1 - C_u}{\gamma - 1} \right) \left( \gamma - \frac{2KL^\alpha}{\gamma - 1} \right)}{3\gamma L - \frac{2KL^{1+\alpha}}{\gamma - 1} (1 - C_u) + 2C_u} L + \frac{2KL^{1+\alpha}}{\gamma - 1} \right] \\ = -\alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

显然(30)式成立的条件为  $\alpha = 0$ .将  $\epsilon = KL^2$  代入(6)式可得  $L \rightarrow 0$  时  $\zeta$  渐近表达式为

$$\zeta = \zeta_m \exp\left(\frac{2K - \gamma(\gamma - 1)}{2C_u(\gamma - 1)} L\right). \quad (31)$$

由(31)式可知,对于方程(6)的非零解,必须有  $\zeta_m > 0$ ,且有

$$2K - \gamma(\gamma - 1) < 0. \quad (32)$$

同理,由微分方程(7)(8)可得,当  $L \rightarrow 0$  时函数  $g, p$  渐近表达式分别为

$$g = g_m \exp(L), \quad (33)$$

$$p = p_m \exp\left(\frac{2K}{\gamma - 1} L\right). \quad (34)$$

由(28)式可知,当  $C_u < -\frac{3}{2}$  时,  $\zeta_m > 0$ .由(33), (34)式可知,对应于  $L \rightarrow 0$ ,自模拟密度、压强均为不等于零的有限值.显然,一般球面强冲击波自模拟运动模型没有“点爆炸模型”中原点附近温度无穷大问

题.由(29)–(34)式可推得内边界处自模拟函数渐近值满足

$$\frac{\rho_m \zeta_m^2 D^2}{p_m} < \gamma. \quad (35)$$

对于强球面冲击波自模拟运动而言,唯一的参数是  $C_u$ ,至此所有自模拟解都可以得到.所以自模拟内边界参数  $u_m, \rho_m, p_m$  都可解得.理论上,内边界条件再结合微分方程即可以得到  $\xi_m$  区域内的物理量解.

对于自模拟区域总能量不变的极限情况,可计算出  $\epsilon$  函数的表达式<sup>[5]</sup>为

$$\epsilon = \frac{L\gamma - 1}{1 - L}. \quad (36)$$

将(36)式代入微分方程(6)–(9)可得,当  $L \rightarrow \frac{1}{\gamma}$  时,  $\zeta \rightarrow 0, g \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0, p \rightarrow p_m > 0$ .所以温度函数

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} T(r, t) = \frac{P_1 / \rho_1}{(\gamma - 1)R} \frac{p_m}{\lim_{\zeta \rightarrow 0} g} \rightarrow \infty.$$

这就是 Taylor 点爆炸强球面冲击波自模拟模型原点

附近温度发散的情况.

## 4. 结 论

与量纲理论不完全相同,本文的结果表明理想气体中的强球面冲击波自模拟运动本质上只服从于一个关于气体动能密度与内能密度比函数的基本微分方程.由于这个新理论模型不要求球面强冲击波必须从具有奇异性质的点源出发,所以其自然避免了点爆炸球面强冲击波自模拟模型具有的时间原点处冲击波速度无穷大、空间原点附近气体温度无穷大的问题.并且,当取适当近似条件时该模型能够过渡到点爆炸冲击波模型,表明它比点爆炸模型具有更普遍的意义.该模型的自模拟解函数及其特性,以及自模拟内边界以内( $0 \leq \xi \leq \zeta_m$ )气体的性质有待于作更深入研究.这些工作对进一步研究冲击波传播过程中物理量的演变特性,探索球面强冲击波自模拟运动和非自模拟运动之间的转化规律具有重要意义.

- [1] Taylor G I 1950 *Proc. Roy. Soc. A* **201** 159
- [2] Taylor G I 1950 *Proc. Roy. Soc. A* **201** 177
- [3] Sedov L I 1982 *Similar Method and Dimensional Theory in Mechanics* (Beijing: Science Press) p237, 249, 250 (in Chinese) [谢多夫 Л И 1982 力学中的相似方法与量纲理论(中译本)北京:科学出版社]第 237, 249, 250 页]
- [4] Barenblatt G I 1996 *Scaling, Self-similarity and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge University Press) p1
- [5] Li W X 2003 *One-dimensional Nonsteady Flow and Shock Waves* (Beijing: National Defence Industry Press) p331, 335, 340 (in Chinese) [李维新 2003 一维不定常流体动力学(北京:国防工业出版社)第 331, 335, 340 页]
- [6] Bian B M, Yang L, Cheng X *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 809 (in Chinese) [卞保民、杨玲、陈笑等 2002 物理学报 **51** 809]
- [7] Edens A D, Ditmire T, Hansen J F *et al* 2004 *Phys. Plas.* **11** 4968
- [8] Mao S S, Mao X, Greif R *et al* 2001 *J. Appl. Phys.* **89** 4096
- [9] Meade H, Harada T 2004 *Gen. Relat. Quantum Cosm.* **20**(5) 113
- [10] Bian B M, He A Z, Li Z H *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5535 (in Chinese) [卞保民、贺安之、李振华等 2005 物理学报 **54** 5535]
- [11] Zeldovich Y B, Raizer Y P 1985 *Physics of Shock Wave and High-temperature Flow Dynamics Phenomena* (Beijing: Science Press) p340, 341 (in Chinese) [泽尔道维奇 Я Б, 莱依捷尔 Ю П 1985 激波和高温流体动力学现象物理学(中译本)北京:科学出版社]第 340, 341 页]

# General self-simulating motion mode of spherical strong shock waves in ideal gas<sup>\*</sup>

Bian Bao-Min Yang Ling Zhang Ping Ji Yun-Jing Li Zhen-Hua Ni Xiao-Wu

( *Department of Information Physics and Engineering , Nanjing University of Science and Technology , Nanjing 210094* )

( Received 4 January 2006 ; revised manuscript received 25 April 2006 )

## Abstract

Adopting basic-differential equations for self-simulating motion of one-dimensional nonstable flow in ideal gas , the self-simulating characteristics of wave-rear gas in spherical strong shock wave have been analyzed in detail . Additionally , the general form of propagation formula for the spherical strong shock wave , owning self-simulating motion characteristics , is deduced out . Study indicates that the self-simulating motion mode of spherical strong shock wave need not start from a point having irregularity , and the initial shock velocity and self-simulating temperature function , generally , do not exist the problem of driving to infinite . And , Taylor 's self-simulating mode of the shock wave from point explosion is a special case of the general self-simulating mode with the assumption that the whole energy of the self-simulating motion is a definite value .

**Keywords** : ideal gas , spherical strong shock wave , self-simulating motion

**PACC** : 4740 , 2870

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60378003 ).