第 55 卷 第 9 期 2006 年 9 月
1000-3290/2006/55(09)/4414-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.9,September,2006


# 非线性薛定谔方程的 Jacobi 椭圆函数解

龚伦训†

(贵州师范大学理学院,贵阳 550001)

(2005 年 10 月 31 日收到;2006 年 1 月 16 日收到修改稿)

用修正的影射法解非线性薛定谔方程,得到了一些新的 Jacobi 椭圆函数展开解.

关键词:Jacobi 椭圆函数, 非线性薛定谔方程, 修正影射法, 行波解
PACC:0340K, 0290

## 1.引 言

许多物理问题经常需要用非线性偏微分方程(NPDEs)来描述.研究非线性偏微分方程的精确解是数学物理的一个重要课题.近年来,一些新的方法不断被提出来,例如,逆散射法[1],Hirota 变换法[2],tanh 函数展开法[3],齐次平衡法[4],分离变量法[5],sin-cosine 函数展开法[6],Jacobi 椭圆函数展开法等[7,8].

Jacobi 椭圆函数展开法是一种很有用的方法,刘式达等[7—9]构造了包括 KdV 方程,mKdV 方程,非线性薛定谔方程等许多非线性方程椭圆函数周期解;Yan 等[10]推广了刘式达等的方程;Zhu 等[11]的方法的关键在于将展开项的指数 $j$ 从 $-n$ 到 $n$;Peng[12]用修正的影射法得到了(2+1)-维破裂孤子方程(breaking soliton equation)的解.

本文应用文献[12]的方法,求解非线性薛定谔方程,并得到了一些 Jacobi 椭圆函数的解.

## 2.修正影射法

关于 Jacobi 椭圆函数及应用,已有不少文献作过介绍,可参阅有关文献[7—9,13]等,这里不作介绍.下面对修正影射法[12]作简介.

对于有两个变量 $x$ 和 $t$ 的非线性偏微分方程

$$F(v,\ v_t,\ v_x,\ v_{tx},\cdots)=0, \tag{1}$$

我们作下列行波变换:

$$v(x,\ t)=v(\xi),$$

$$\xi=k(x-ct), \tag{2}$$

这里 $k$,$c$ 是待定的波参数.

将方程(2)代入方程(1)得到非线性常微分方程

$$K(v,\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}\xi^2,\cdots)=0, \tag{3}$$

然后将 $v(\xi)$ 扩展为 $f(\xi)$ 的多项式

$$v(\xi)=\sum_{i=0}^{N}A_if^i+\sum_{i=1}^{N}B_if^{-i}, \tag{4}$$

其中 $A_i$ 和 $B_i$ 是待定常数,$N$ 由 $f$ 的非线性项和最高阶导数项平衡而得.

$$f''=pf+qf^3,(f')^2=r+pf^2+\frac{1}{2}qf^4, \tag{5}$$

这里'$'$'是 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$,$r$,$p$,$q$ 是常数,它们的取值确定函数 $f$ 的具体形式,例如,$r=1$,$p=-2$,$q=2$,$f=\tanh(\xi)$;$r=1$,$p=-(1+m^2)$,$q=2m^2$,$f=\mathrm{sn}(\xi)$,$m(0<m<1)$是 Jacobi 椭圆函数的模数,下同.将(4),(5)两式代入(3)式,则系数 $A_i\ B_i\ k\ c\ p\ q$ 和 $r$ 可以通过它们之间的代数关系确定.

## 3.例子 非线性薛定谔(NLS)方程

由文献[9,11]知,非线性薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0, \tag{6}$$

令 $u=v(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$,$\xi=k_1(x-c_gt)$,代入(6)式,可得

$$\alpha k_1^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}+\mathrm{i}k_1(2\alpha k-c_g)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}$$
$$+(\omega-\alpha k^2)v+\beta v^3=0.$$

让 $2\alpha k=c_g$,$\omega-\alpha k^2=-B(B>0)$,$\alpha k_1^2=A$,$\beta=C$.有

† E-mail:glx3097@sina.com.cn

$$A\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}-Bv+Cv^3=0. \tag{7}$$

因为

$$O(v)=N,$$
$$O\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}\right)=N+2,$$
$$O(v^3)=3N.$$

选择 $N$ 使得非线性波动方程(7)中的非线性项和最高阶导数项平衡得到

$$N=1. \tag{8}$$

所以(7)式的解可以表示为

$$v=A_0+A_1f+B_1/f. \tag{9}$$

将(9),(5)式代入(7)式,然后,合并 $f^i$ $(i=-3,-2,-1,0,1,2,3)$的同类项,能够得到关于 $A_0$, $A_1$, $B_1$, $A$, $B$, $C$, $p$, $q$ 和 $r$ 的代数方程

$$-A_0B+A_0^3C+6A_0A_1B_1C=0,$$
$$B_1^3C+2AB_1r=0,$$
$$3A_0B_1^2C=0,$$
$$-(BB_1)+3A_0^2B_1C+3A_1B_1^2C+AB_1p=0,$$
$$-(A_1B)+3A_0^2A_1C+3A_1^2B_1C+AA_1p=0,$$
$$3A_0A_1^2C=0,$$
$$A_1^3C+AA_1q=0. \tag{10}$$

解方程组(10),可以得到下面这些解:

情形 1

$$A_0=0,\ A_1=\pm\sqrt{-AqC}/C,B_1=0,$$

条件 1

$$B=Ap>0,\ C\neq0,\ AqC<0; \tag{11a}$$

情形 2

$$A_0=0,\ A_1=0,\ B_1=\pm\sqrt{-2ACr}/C,$$

条件 2

$$B=Ap>0,C\neq0,\ ACr<0; \tag{11b}$$

情形 3

$$A_0=0,\ A_1=\pm\sqrt{2}(Ap-B)/(6\sqrt{-ACr}),$$
$$B_1=\mp\sqrt{-2ACr}/C,$$

条件 3

$$B^2-2ABp=A^2(18qr-p^2),$$
$$B>0,C\neq0,ACr<0; \tag{11c}$$

情形 4

$$A_0=0,\ A_1=\pm Ap/(3\sqrt{-2ACr}),$$
$$B_1=\pm\sqrt{-2ACr}/C,$$

条件 4

$$q=p^2/(18r),\ A\neq0,\ B=2Ap>0,$$
$$C\neq0,\ r\neq0,ACr<0. \tag{11d}$$

将(11)式代入(9)式,就能得到非线性薛定谔方程的解.

由文献[14]可知,确定合适的参数 $r,p,q$ 能够得到 $v(\xi)$的孤立子解,周期解等.其中,Jacobi 椭圆函数展开解有,当:$p=-(1+m^2),q=2m^2,r=1.f=\mathrm{sn}(\xi)$;$p=2m^2-1,q=-2m^2,r=1-m^2,f=\mathrm{cn}(\xi)$;$p=2-m^2,q=-2,r=m^2-1,f=\mathrm{dn}(\xi)$;$r=m^2/4,p=(m^2-2)/2,q=m^2/2,f=m\ \mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$等,函数 $f$ 的更多取法可参阅文献[14].综合考虑到(11)式有 4 种情况,并参考符号的变化,$v(\xi)$的 Jacobi 椭圆函数展开解可以有上百种.能找到这样多的 Jacobi 椭圆函数展开解,这是修正影射法的优点.

下面具体计算一些 Jacobi 椭圆函数展开解.

### 3.1. $v(\xi)$的 Jacobi 椭圆函数 $m\ \mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$ 展开解

考虑情形 1,取 $A_1=\sqrt{-AqC}/C,r=m^2/4,p=(m^2-2)/2,q=m^2/2,f=m\ \mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$;$A=-2\pi,C=2\pi,m=0.5$,代入(9)式,则

$$v(\xi)=\sqrt{1/2}m^2\ \mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$$
$$=\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi)), \tag{12}$$

这是 $v(\xi)$的 Jacobi 椭圆函数 $m\ \mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$展开解.

又　$u=v(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$, $\xi=k_1(x-c_gt)$,

则　$u=v(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

$$=\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},$$

取 $u$ 的实部作图,即

$$u=v(\xi)\cos(kx-\omega t)$$
$$=\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))\cos(kx-\omega t). \tag{13}$$

为了表现 $\cos(kx-\omega t)$的调制作用,我们分别作了 $v(\xi)$和 $u=v(\xi)\cos(kx-\omega t)$的图像.取 $k_1=k=1,c_g=4\pi,\omega=-2.25\pi,-100\leqslant x\leqslant100,0\leqslant t\leqslant50$,由(12),(13)式可以得到下列图像.

从图 1—图 3 可以看出 $v(\xi)$被调制的情况,特别是图 3 清楚地显示出 $v(\xi)$和 $u=v(\xi)\cos(kx-\omega t)$的周期包络线.图像显示出 $v(\xi)=\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$是包络周期解.

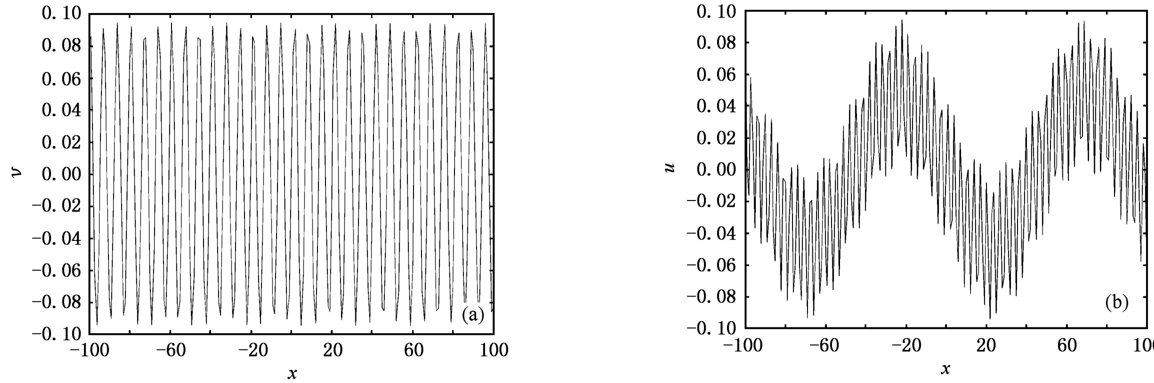


图 1 (a) $t=0$，$v(\xi)$的图像；(b) $t=0$，$u=v(\xi)\cos(kx-\omega t)$的图像；作图计算步长 $\Delta x=1$

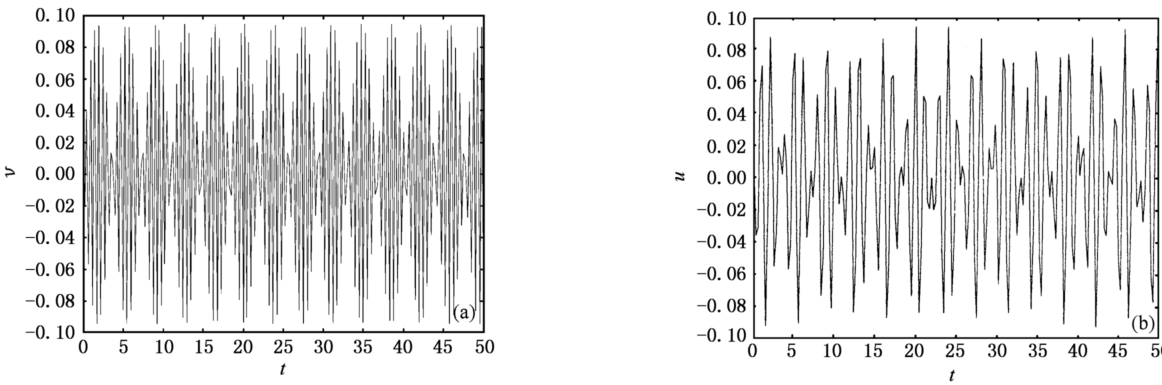


图 2 (a) $x=0$，$v(\xi)$的图像；(b) $x=0$，$u=v(\xi)\cos(kx-\omega t)$的图像；作图计算步长 $\Delta t=0.25$

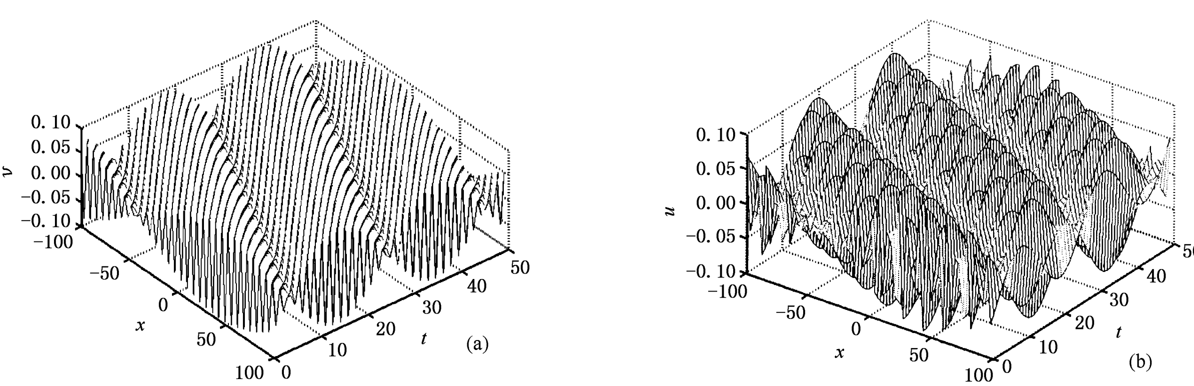


图 3 (a) $v=\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$ 的图像；(b) $u=\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))\cos(kx-\omega t)$的图像；$\Delta x=3.24$，$\Delta t=0.81$

### 3.2. $v(\xi)$的 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{cn}(\xi)$展开解

考虑情形 1，取 $A_1=\sqrt{-AqC}/C$，$p=2m^2-1$，$q=-2m^2$，$r=1-m^2$，$f=\mathrm{cn}(\xi)$；$A=-2\pi$，$C=2\pi$，$m=0.5$，其余参数同 3.1，代入(9) 式，则可得 $V(\xi)$ 的 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{cn}(\xi)$ 展开解

$$v(\xi)=\sqrt{1/2}\mathrm{cn}(\xi),\tag{14}$$

$$u=\sqrt{1/2}\mathrm{cn}(\xi)\cos(kx-\omega t).\tag{15}$$

由(14)，(15)式作图 4.

图 4 的图像同样显示出 $v(\xi)=\sqrt{1/2}\mathrm{cn}(\xi)$ 是包络周期解. 图 4 与图 3 相比较，图像显示出 $v(\xi)=$

$\sqrt{1/32}\mathrm{sn}(\xi)/(1+\mathrm{dn}(\xi))$ 与 $v(\xi)=\sqrt{1/2}\mathrm{cn}(\xi)$ 是同一类型的包络周期解，但位相和振幅不同.

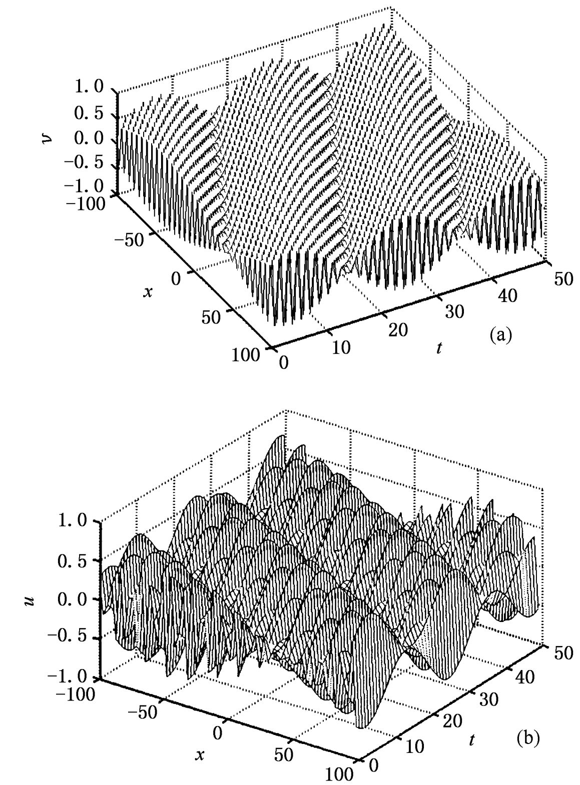


图 4 (a) $v=\sqrt{1/2}\mathrm{cn}(\xi)$ 的图像；(b) $u=\sqrt{1/2}\mathrm{cn}(\xi)\cos(kx-\omega t)$ 的图像

### 3.3. $v(\xi)$ 的 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{dn}(\xi)$ 展开解

考虑情形 1，取 $A_1=\sqrt{-AqC}/C$，$p=2-m^2$，$q=-2$，$r=m^2-1$，$f=\mathrm{dn}(\xi)$；$A=2\pi$，$C=2\pi$，$m=0.5$，$k=1$，$\omega=0.25\pi$，其余参数同3.1，代入(9)式，则可得 $v(\xi)$ 的 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{dn}(\xi)$ 展开解：

$$v=\sqrt{2}\mathrm{dn}(\xi)=\sqrt{2}\mathrm{dn}(\xi), \tag{16}$$

$$u=\sqrt{2}\mathrm{dn}(\xi)\cos(kx-\omega t). \tag{17}$$

由(16)，(17)式作图 5

图 5 的图像显示出 $v(\xi)=\sqrt{2}\mathrm{dn}(\xi)$ 是周期解，$u(\xi)$ 的图像显示出 $v(\xi)$ 被 $\cos(kx-\omega t)$ 调制后的周期包络线.

### 3.4. $v(\xi)$ 的 Jacobi 椭圆函数 $(1+\mathrm{dn}(\xi))/(m\ \mathrm{sn}(\xi))$ 展开解

考虑情形 2，取 $B_1=\sqrt{-2ACr})/C$，$r=m^2/4$，$p=(m^2-2)/2$，$q=m^2/2$，$f=(m\ \mathrm{sn}(\xi))/(1+\mathrm{dn}(\xi))$；$A=-2\pi$，$C=2\pi$，$m=0.5$，其余参数同3.1，

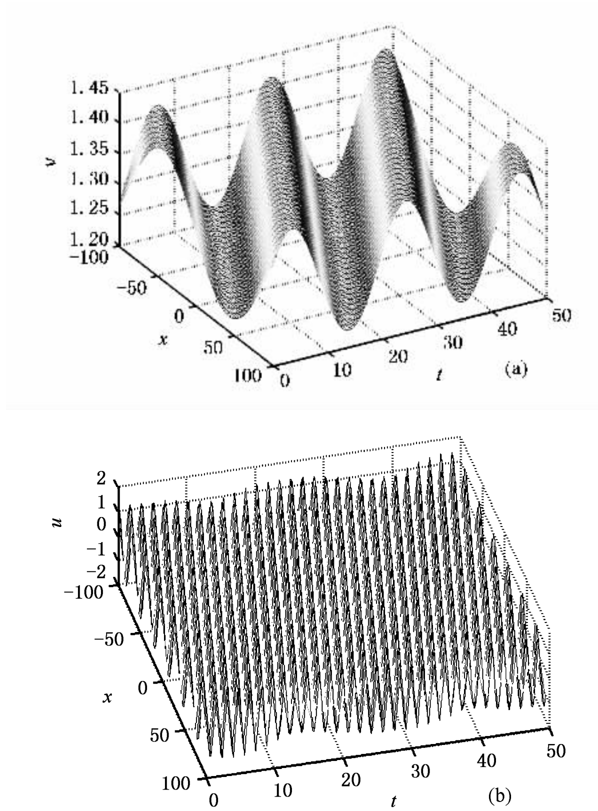


图 5 (a) $v=\sqrt{2}\mathrm{dn}(\xi)$ 的图像；(b) $u=\sqrt{2}\mathrm{dn}(\xi)\cos(kx-\omega t)$ 的图像

代入(9)式，则可得 $v(\xi)$ 的 Jacobi 椭圆函数 $(1+\mathrm{dn}(\xi))/(m\ \mathrm{sn}(\xi))$ 展开解：

$$\begin{aligned}v(\xi)&=\sqrt{m^2/2}(1+\mathrm{dn}(\xi))/(m\ \mathrm{sn}(\xi))\\&=\sqrt{1/2}(1+\mathrm{dn}(\xi))/(\mathrm{sn}(\xi)),\end{aligned} \tag{18}$$

$$u=\sqrt{1/2}(1+\mathrm{dn}(\xi))/\mathrm{sn}(\xi)\cos(kx-\omega t). \tag{19}$$

由(18)，(19)式作图 6.

图 6 的图像显示出 $v=\sqrt{1/2}(1+\mathrm{dn}(\xi))/\mathrm{sn}(\xi)$ 与上述图象显然不同，但仍然显示有周期性.

非线性薛定谔方程的其余的 Jacobi 椭圆函数展开解，这里不一一计算，从略.

## 4. 结 论

本文应用修正影射法解非线性薛定谔方程. 这个方法的优点在于：可以不必给出函数 $f(\xi)$ 的具体表达式求解方程，这样便于寻找更多的解. 本文就是利用了这一特点，选择合适的参数，得到一些 Jacobi 椭圆函数展开解. 我们相信：这个方法还可以推广到含有更多维和更高阶的求导项的方程. 利用 Jacobi

椭圆函数展开解的图像,可以发现 Jacobi 椭圆函数展开解的一些性质,例如:包络周期解等.

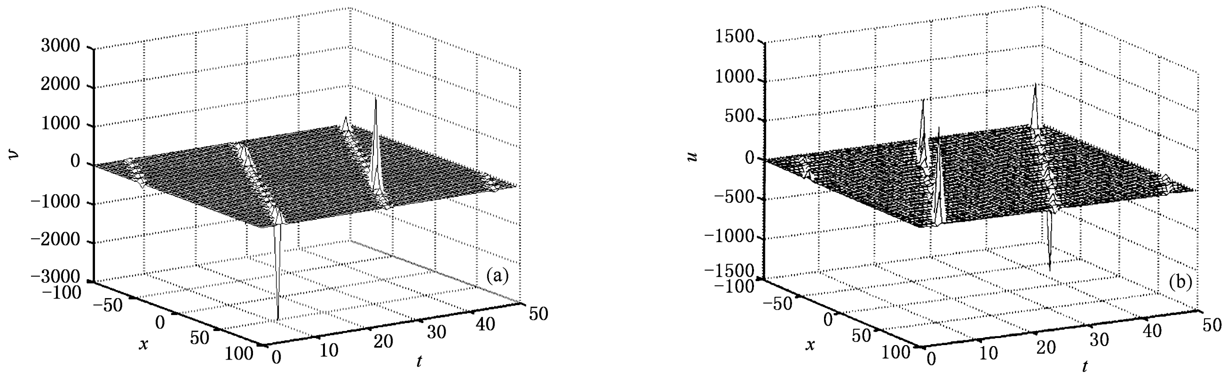


图 6 (a) $v=\sqrt{1/2}(1+\mathrm{dn}(\xi))/\mathrm{sn}(\xi)$ 的图像;(b) $u=\sqrt{1/2}(1+\mathrm{dn}(\xi))/\mathrm{sn}(\xi)\cos(kx-\omega t)$ 的图像


[1] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095

[2] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[3] Parkes E J, Duffy B R 1997 *Phys Lett.* A **229** 217

[4] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169
Zhang J L, Wang Y M, Wang M L, Fang Z D 2003 *Chin. Phys.* **12** 245

[5] Lou S Y, 2000, *Phys. Lett.* A **277** 94
Zhang J F, Meng J P, Huan W H 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 161

[6] Yan C T 1996 *Phys. Lett.* A **224** 77

[7] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Phys. Lett.* A **289** 69

[8] Fu Z T, Liu S K, Liu S D, Zhao Q 2001 *Phys. Lett.* A **290** 72

[9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]
Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适,赵 强 2002 物理学报 **51** 718]
Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 343 (in Chinese) [付遵涛、刘式适、刘式达 2004 物理学报 **53** 343]

[10] Yan Z Y 2002 *Commun. Thor. Phys.* **38** 143

[11] Zhu J M, Ma Z Y, Fang J P, Zheng C L, Zhang J F 2004 *Chin. Phys.* **13** 798

[12] Peng Y Z 2003 *Phys. Lett.* A **314** 401
Peng Y Z 2005 *Commun. Thor. Phys.* **42** 205

[13] Liu S K, Liu S D 2000 *Nonlinear equations in physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京 北京大学出版社)]

[14] Li H M 2002 *Chin. Phys.* **11** 1111
Li H M 2005 *Chin. Phys.* **14** 251

# Some new exact solutions of the Jacobi elliptic functions of NLS equation

Gong Lun-Xun†

(*School of Science*, *Guizhou Normal University*, *Guiyang* 550001, *China*)

(Received 31 October 2005; revised manuscript received 16 January 2006)

Abstract

New exact solutions in terms of the Jacobi elliptic functions are obtained for the nonlinear Schrödinger (NLS) equation by means of modified mapping method.

**Keywords**: Jacobi elliptic functions, NLS equation, modified mapping method, traveling wave solutions

**PACC**: 0340K, 0290

† E-mail: glx3097@sina.com.cn