第 55 卷 第 9 期 2006 年 9 月
1000-3290/2006/55(09)/4433-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.9,September,2006

Kerr-Newman 黑洞的谐振子模型及量子面积谱*

李传安 苏九清
(菏泽学院物理系,菏泽 274015)
(2005 年 11 月 17 日收到;2006 年 1 月 16 日收到修改稿)

利用 Kerr-Newman 黑洞的质量 M,电量 Q,角动量 J 和它们各自的对偶量,π_M,π_Q,π_J,构成的六维相空间,通过规范变换,首先建立黑洞的简谐振子模型;再利用该模型进一步研究 Kerr-Newman 黑洞的量子面积谱.

关键词:黑洞,规范变换,简谐振子模型,量子面积谱
PACC:0420,9760L,0470

1. 引 言

近年来,人们对黑洞熵的研究,已取得了令人满意的结果[1—7],学者们采用了各种不同的计算方法,都给出了黑洞熵与视界面积成正比.由于黑洞熵都依赖于黑洞的视界面积,故研究黑洞的量子面积谱,对进一步理解黑洞熵的本质将是很有意义的.文献[8]进一步证明了量子 Kerr 黑洞仍能满足统计“自举”条件,使黑洞量子面积谱的研究显得更具有实际价值.1974 年 Bekenstein 曾提出[9]黑洞视界面积的本征值应具有下述形式:

$$A_n = \gamma n l_{\rm pl}^2, \tag{1}$$

式中 n 是正整数,γ 是序列为 1 的纯数,而 $l_{\rm pl} = \sqrt{\hbar G C^{-3}}$ 是 Planck 长度.为了证实 Bekenstein 假设的正确性,学者们建立了各种量子模型[10—12],采用各种不同的计算方法,分别给出了 Schwarzschild 黑洞的量子面积谱[10]为

$$A_n \sim 32\pi n l_{\rm pl}^2 + {\rm const} + O(1), \tag{2}$$

式中 n 为整数,当 n 较大时,$O(1)$渐近为零.Kerr 黑洞的量子面积谱[13]为

$$A_{n,m} = 8\pi\hbar(n + m + 1/2)$$
$$n, m = 0,1,2,\cdots \tag{3}$$

众所周知,Kerr-Newman 度规仅仅含有三个参量,本文就从这三个可观测物理量 M,Q,J 入手,首先将它们视为广义坐标,把它们各自的对偶视为广义动量,利用这六个动力学变量构成六维相空间,通过规范变换条件,建立黑洞的简谐振子模型,并利用该模型,进一步研究 Kerr-Newman 黑洞的量子面积谱.

2. 黑洞的简谐振子模型

Kerr-Newman 时空中的四维不变线元为

$$\begin{aligned} {\rm d}S^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right){\rm d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}{\rm d}r^2 \\ &+ \rho^2{\rm d}\theta^2 + \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta\right. \\ &\left.+ \frac{(2Mr - Q^2)a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right]{\rm d}\varphi^2 \\ &- \frac{2(2Mr - Q^2)a^2\sin^2\theta}{\rho}{\rm d}t{\rm d}\varphi, \end{aligned} \tag{4}$$

式中 $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$,$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$,而 $a = J/M$ 为单位质量的角动量,利用(4)式可得到 Kerr-Newman 黑洞的内、外视界为

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - J^2/M^2 - Q^2}. \tag{5}$$

再利用 $A = \iint\left(\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}\right)^{1/2}{\rm d}\theta{\rm d}\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ 可求得外视界的面积

$$A = 8\pi\left(M^2 - Q^2/2 + M\sqrt{M^2 - J^2/M^2 - Q^2}\right). \tag{6}$$

整理上式,微分后便可得到

$$\begin{aligned} 2M{\rm d}M = &\left(\frac{1}{16\pi} - \frac{4\pi J^2 + \pi Q^4}{A^2}\right){\rm d}A \\ &+ \frac{8\pi J}{A}{\rm d}J + \left(1 + \frac{4\pi Q^2}{A}\right)Q{\rm d}Q. \end{aligned} \tag{7}$$

1972 年,Bekenstein-Smar 给出的黑洞热力学第一定

* 菏泽学院基金资助的课题.

律的微分形式为

$$\mathrm{d}M = \frac{\kappa}{8\pi}\mathrm{d}A + \Omega\mathrm{d}J + V_{\mathrm{o}}\mathrm{d}Q, \tag{8}$$

式中 κ 为视界表面重力,V_{o} 为两极的静电势,Ω 为拖曳角速度,将(7),(8)两式相比较,不难看出

$$\kappa = (A^2 - 64\pi^2 J^2 - 16\pi^2 Q^4)/4MA^2, \tag{9}$$

$$V_{\mathrm{o}} = Q(1 + 4\pi Q^2/A)/2M, \tag{10}$$

$$\Omega = 4\pi J/MA. \tag{11}$$

依据"三毛定理",视界外的静止观察者,只能得到 Kerr-Newman 黑洞的三个可观测物理量:质量 M,电荷 Q 和角动量 J. 由(6)式知 $A = A(M,J,Q)$,因此在经典意义上描述 Kerr-Newman 黑洞,可采用相空间中的三个广义坐标 A,J,Q 和各自相应的对偶,即三个广义动量 P_A,P_J,P_Q,这六个动力学变量,经过量子化以后,算符之间满足对易关系,$[A,P_A] = [J,P_J] = [Q,P_Q] = \mathrm{i}\hbar$. 若用 M 代替 A,自然可得到一组新的动力学变量及相应的正则共轭量 π_M,π_J,π_Q,利用(8)式,可以证明,上述规范变换的形式为

$$\pi_M = \frac{8\pi}{\kappa}P_A, \tag{12}$$

$$\pi_J = P_J - \frac{8\pi}{\kappa}\Omega P_A, \tag{13}$$

$$\pi_Q = P_Q - \frac{8\pi}{\kappa}V_{\mathrm{o}}P_A. \tag{14}$$

容易证明,在自然单位制中各算符满足

$$[M,\pi_M] = [J,\pi_J] = [Q,\pi_Q] = 1, \tag{15}$$

其余的泊松括号都等于零.

为了量子化过程的需要,并考虑波函数的归一化条件,仿照文献[14]引入下属周期性条件

$$\pi_M \sim \pi_M + 2\pi/\kappa. \tag{16}$$

为满足以上周期条件,可适当选择广义坐标

$$X = \sqrt{\frac{\hbar B(M,J,Q)}{\pi\mu\kappa}}\cos(\kappa\pi_M), \tag{17}$$

并利用广义动量与广义坐标的关系,定义广义坐标的对偶量

$$P_X = \sqrt{\frac{\mu\kappa\hbar B(M,J,Q)}{\pi}}\sin(\kappa\pi_M). \tag{18}$$

容易看出,式中 κ 相当于经典简谐振动的圆频率,μ 为质量参数,$B(M, J, Q)$则是反映 Kerr-Newman 黑洞性质的待定函数,为了确定 $B(M, J, Q)$,考虑到下式关于正则规范变换的一个充分必要条件

$$P_X\mathrm{d}X + P_J\mathrm{d}J + P_Q\mathrm{d}Q = \pi_M\mathrm{d}M + \pi_J\mathrm{d}J + \pi_Q\mathrm{d}Q. \tag{19}$$

利用(17),(18)式,在一级近似下可得到

$$P_X\mathrm{d}X = \frac{\hbar\kappa\pi_M}{2\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial M}\mathrm{d}M + \frac{\partial B}{\partial J}\mathrm{d}J + \frac{\partial B}{\partial Q}\mathrm{d}Q\right). \tag{20}$$

比较以上两式,不难得出

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{2\pi}{\hbar\kappa}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial B}{\partial J} = \frac{2\pi(\pi_J - P_J)}{\hbar\kappa\pi_M}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial B}{\partial Q} = \frac{2\pi(\pi_Q - P_Q)}{\hbar\kappa\pi_M}, \tag{23}$$

再利用(8)式得到

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \frac{8\pi}{\kappa}. \tag{24}$$

将(24)式与(21)比较,容易看出

$$\frac{\partial A}{\partial M} = 4\hbar\frac{\partial B}{\partial M}. \tag{25}$$

上式表明 $\frac{\partial A}{\partial M}$ 与 $\frac{\partial B}{\partial M}$ 成正比,即视界面积 A 与函数 B 在随 M 的变化过程中,具有类似的性质. 从经典意义上考虑一个一维简谐振子,它的能量可表示为 $E = \frac{P_X^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\kappa^2X^2$,利用(17),(18)两式,能够得到

$$\frac{P_X^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\kappa^2X^2 = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}B. \tag{26}$$

对上式进一步整理,便可得到

$$B = \frac{P_X^2}{2\mu'} + \frac{1}{2}\mu'\omega^2X^2, \tag{27}$$

式中 $\mu' = \frac{\mu\kappa\hbar}{2\pi}$,$\omega = \frac{2\pi}{\hbar}$,可见表示黑洞性质的函数 $B(M, J, Q)$ 对应一个经典的简谐振子,再考虑到视界 $A(M, J, Q)$ 与函数 $B(M, J, Q)$ 有类似的性质,所以从某种意义上,我们能够建立 Kerr-Newman 黑洞的一个简谐振子模型.

3. Kerr-Newman 黑洞的量子面积谱

利用(25)式不难判断出

$$B(M,J,Q) = \frac{1}{4\hbar}A(M,J,Q) + F(J,Q), \tag{28}$$

式中 $F(J,Q)$为待定项. 为确定 $F(J,Q)$,让我们考虑 Kerr-Newman 黑洞的外视界面积,利用(6)式容易找出,在经典的理论中它的极值必须遵循

$$A \geqslant A_{\mathrm{ext}} = 4\pi\sqrt{Q^4 + 4J^2}. \tag{29}$$

为保证(17),(18)式有定义,$B(M,J,Q)$的值应非

负，故最合适的选择就是取 $F(J,Q) = -A_{ext}(J,Q)/4\hbar$，于是(28)式可写为

$$B(M,J,Q) = \frac{1}{4\hbar}[A(M,J,Q) - A_{ext}(J,Q)]. \tag{30}$$

量子化后，分别将 B, P_X, X 视为算符，则(27)式的算符关系为

$$\hat{B} = \frac{\hat{P}_X^2}{2\mu'} + \frac{1}{2}\mu'\omega^2\hat{X}^2. \tag{31}$$

再利用经典量子力学中动量算符与坐标算符之间的关系，量子化以后，各算符间应满足 $[\hat{X},\hat{P}_X] = \mathrm{i}\hbar$，将(31)式代入场方程

$$\hat{B}\Psi = \left(\frac{\hat{P}_X^2}{2\mu'} + \frac{1}{2}\mu'\omega^2\hat{X}^2\right)\Psi = B\Psi, \tag{32}$$

易求得 $\hat{B}$ 的本征值为

$$B_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{33}$$

再由(28)式不难得到

$$A_n - A_{ext} = 8\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{34}$$

下面进一步考虑角动量 J 和电荷 Q 对视界量子面积的影响，由(8)式可得到

$$\frac{\partial A}{\partial J} = -\frac{8\pi\Omega}{\kappa}. \tag{35}$$

对(30)式求偏导数，并将(35)式代入后，整理便可得到

$$\frac{\partial B}{\partial J} = -\frac{1}{4\hbar}\left(\frac{8\pi\Omega}{\kappa} + \frac{\partial A_{ext}}{\partial J}\right). \tag{36}$$

与(22)式比较，再经过适当的整理可得

$$P_J = \pi_J + \Omega\pi_M + \frac{\kappa\pi_M}{8\pi}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J}. \tag{37}$$

由(8)式和(30)式，利用类似的方法，同样可得到

$$P_Q = \pi_Q + V_o\pi_M + \frac{\kappa\pi_M}{8\pi}\frac{\partial A_{ext}}{\partial Q}. \tag{38}$$

若令 $a = \pi_J + Q\pi_M$ 和 $\alpha = \kappa\pi_M$，则(37)式可化为

$$P_J = a + \frac{\alpha}{8\pi}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J}. \tag{39}$$

由(17)，(18)式不难看出，α 是一个角，且周期为 2π. 再考虑一个角动量算符

$$\hat{J} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial P_J}, \tag{40}$$

与其所对应的角动量本征态波函数为

$$\Psi_J(P_J) \sim \exp(\mathrm{i}JP_J/\hbar), \tag{41}$$

它的周期性同样可表示成

$$JP_J/\hbar \sim JP_J/\hbar + 2\pi m \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{42}$$

当固定 a 不变时，比较(39)式和(42)式可得

$$\frac{\alpha J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J} \sim \frac{\alpha J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J} + 2\pi m. \tag{43}$$

不难看出，上式左边必然是一个角，由于 α 本身就是一个角，所以 $\frac{J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J}$ 必定为一个数，再利用(16)式中的周期性条件，不难导出，$\frac{J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J}$ 应为整数，记作 n_1，则

$$\frac{J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{ext}}{\partial J} = n_1 \quad n_1 = 0,1,2,\cdots \tag{44}$$

将(29)式关系代入后，整理可得到

$$\frac{2J^2}{\sqrt{Q^4 + 4J^2}} = n_1\hbar \quad n_1 = 0,1,2,\cdots \tag{45}$$

利用类似的推导方法，还可求得

$$\frac{Q}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{ext}}{\partial Q} = n_2 \quad n_2 = 0,1,2,\cdots \tag{46}$$

将 $A_{ext} = 4\pi\sqrt{Q^4 + 4J^2}$ 代入后，整理便得到

$$\frac{Q^4}{\sqrt{Q^4 + 4J^2}} = n_2\hbar \quad n_2 = 0,1,2,\cdots \tag{47}$$

将$(45)\times 2 + (47)$式，便可求得 A_{ext}的本征值

$$\begin{aligned} A_{ext,n_1,n_2} &= 4\pi\sqrt{Q^4 + 4J^2} \\ &= 4\pi(2n_1 + n_2)\hbar. \end{aligned} \tag{48}$$

将(48)代入(34)式，容易求出 Kerr-Newman 黑洞的量子面积谱为

$$\begin{aligned} A_{n,n_1,n_2} &= 8\pi\hbar(n + n_1 + n_2/2 + 1/2) \\ & n,n_1,n_2 = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{49}$$

将黑洞熵与黑洞的视界面积关系代入后，便可得到黑洞的量子熵

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}k_B A = 2\pi k_B\hbar(n + n_1, n_2/2 + 1/2) \\ & n,n_1,n_2 = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{50}$$

其中 k_B 为 Boltzmann 常数.

4. 结论分析

1. 当 $Q = 0, J \neq 0$ 时，$n_2 = 0$，由(48)式可得到 Kerr 黑洞的量子面积谱

$$\begin{aligned} A_{n,n_1} &= 8\pi\hbar(n + n_1 + 1/2) \\ & n,n_1 = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{51}$$

2. 当 $Q \neq 0, J = 0$ 时，$n_1 = 0$，由(48)式可得到荷电黑洞的量子面积谱

$$A_{n,n_2} = 8\pi\hbar(n + n_2/2 + 1/2) \quad n,n_2 = 0,1,2,\cdots \tag{52}$$

3. 当 $Q = J = 0$ 时,$n_1 = n_2 = 0$,由(48)式可得到 Schwarzschild 黑洞的量子面积谱

$$A_n = 8\pi\hbar(n + 1/2) \quad n, = 0,1,2,\cdots \tag{53}$$

感谢朱建阳,张建华,李洪奇教授的有益帮助.

[1] Zhao Z, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin*. **48** 1558 (in Chinese) [赵峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]

[2] Liu W B, LI X 1999 *Acta Phys. Sin*. **48** 1793 (in Chinese) [刘文彪、李 翔 1999 物理学报 **48** 1793]

[3] Li C A 2001 *Acta Phys. Sin*. **50** 986 (in Chinese) [李传安 2001 物理学报 **50** 986]

[4] Zhang J Y, Zhao Z 2003 *Acta Phys. Sin*. **52** 2096 (in Chinese) [张静仪、赵 峥 2003 物理学报 **52** 2096]

[5] Su J Q, Li C A 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 530 (in Chinese) [苏九清、李传安 2005 物理学报 **54** 530]

[6] Zhang J H, Zhang Q S 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 5500 (in Chinese) [张建华、张清松 2005 物理学报 **54** 5500]

[7] Liu C Z 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 1977 (in Chinese) [刘成周 2005 物理学报 **54** 1977]

[8] Wang L P, Zhu J Y 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 5504 (in Chinese) [王丽萍、朱建阳 2005 物理学报 **54** 5504]

[9] Bekenstein J D 1974 *Lett Nuovo Cimento* **11** 476

[10] Louko J, Mäkelä J 1996 *Phys. Rev*. D **54** 4982

[11] Mäkelä J, Repo P 1998 *Phys. Rev*. D **57** 4889

[12] Mäkelä J, Rep P, Luomajoki M, Poiilonen J 2001 *Phys. Rev*. D **64** 4018

[13] Jiang J Y, Li C A 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 3958 (in Chinese) [蒋继建、李传安 2005 物理学报 **54** 3958]

[14] Gilad Gour, A J M Medved 2003 *Class Quantum Grav* **20** 1661

The resonance model and quantum area spectrum of Kerr-Newman black hole*

Li Chuan-An　Su Jiu-Qing

(*Department of Physics*, *Heze University*, *Heze* 274016, *China*)

(Received 17 November 2005; revised manuscript received 16 January 2006)

Abstract

Using the mass M, charge Q, angular momentum J and their corresponding π_M, π_Q, π_J of Kerr-Newman black hole, we obtain a six-dimensional space. We first establish the resonance model of black hole through criterion transforms. Then we make use of this model to analyze the quantum area spectrum of Kerr-Newman black hole.

Keywords: black hole, criterion transformation, resonance model, quantum area spectrum

PACC: 0420, 9760L, 0470

* Project supported by the Foundation of Heze University.