

# 一个 unified 系统与 Rössler 系统的组合研究\*

高秉建<sup>1,2)†</sup> 陆君安<sup>1)</sup> 陈爱敏<sup>1)</sup>

1) 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

2) 武汉理工大学理学院, 武汉 430070)

(2005 年 11 月 29 日收到 2006 年 1 月 22 日收到修改稿)

将 Unified 系统和 Rössler 系统凸组合构造了新的混沌系统, 包括含两个参数的 Unified-Rössler 系统, 以及含一个参数的 Lorenz-Rössler 系统和 Chen-Rössler 系统, 通过计算最大 Lyapunov 指数谱、维数谱和计算机仿真, 确定 Chen-Rössler 系统的混沌区域.

关键词: 混沌, 凸组合, Lyapunov 指数谱

PACC: 0545

## 1. 引 言

自从 1963 年 Lorenz 发现了第一个混沌系统<sup>[1]</sup>以来, 人们以各种方法发现了许多新的混沌系统, 如著名的 Rössler 系统<sup>[2]</sup>. 1999 年, Chen 在混沌反控制(或称为混沌化)的研究中发现了一个在 Celikovský 和 Vanecek 意义下, 与 Lorenz 系统对偶的新的系统, 后被称作 Chen 系统<sup>[3]</sup>. 2002 年, Lü 和 Chen 进一步发现了一个新的临界混沌系统, 之后被其他学者称之为 Lü 系统<sup>[4]</sup>, 代表了 Lorenz 和 Chen 系统之间的转换. 接着, 他们将 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统用一个光滑的连续凸变换统一起来, 被称为统一系统<sup>[5]</sup>. 后来又提出了广义 Lorenz 系统族和广义 Lorenz 规范型(GLCF)<sup>[6,7]</sup>. 对它们的研究已经有一些工作, 并且开始在保密通讯等领域得到应用<sup>[8-17]</sup>.

著名的 Lorenz 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= cx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\alpha, b, c$  是实参数. 当  $\alpha = 10, b = 8/3, c = 28$  时, 系统处于混沌状态, 如图 1(a) 所示.

Chen 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= (c - \alpha)x - xz - cy, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{z} = xy - bz,$$

其中  $\alpha, b, c$  是实参数. 当  $\alpha = 35, b = 3, c = 28$  时, 系统处于混沌状态, 如图 1(b) 所示. 尽管该系统看上去与 Lorenz 系统有着相似的结构, 但它们是拓扑不等价的. 在 Celikovský 和 Vanecek 意义下, Chen 系统被证明是 Lorenz 系统的对偶系统: 如果把这种类型的系统写成线性部分和二次型部分的和, 即  $\dot{x} = Ax + f(x)$ , 其中线性部分  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ , 则对于 Lorenz 系统满足  $a_{12} a_{21} > 0$ , 而 Chen 系统满足  $a_{12} a_{21} < 0$ .

在 2002 年, Lü 和 Chen 进一步发现了一个新的混沌系统, 称为 Lü 系统, 该系统满足  $a_{12} a_{21} = 0$ , 代表了 Lorenz 系统和 Chen 系统之间的转换, 系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= -xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\alpha, b, c$  是实参数. 当  $\alpha = 36, b = 3, c = 20$  时, 系统处于混沌状态, 如图 1(c) 所示.

随后不久, 在 2002 年, 他们将 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统用一个光滑的连续凸变换统一起来, 被称为统一系统, 该系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} &= (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} &= xy - \frac{1}{3}(\alpha + 8)z, \end{aligned} \quad (4)$$

\* 国家自然科学基金(批准号 60574045), 国家重点基础研究发展计划项目(批准号 2003CB415200)资助的课题

† E-mail: bjgao@mail.whut.edu.cn

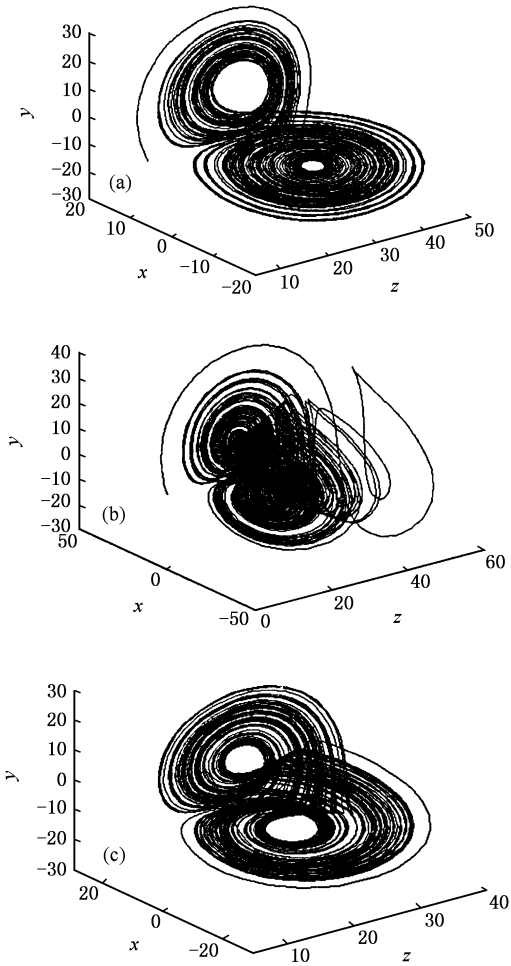


图 1 (a) Lorenz 吸引子, (b) Chen 吸引子, (c) Lü 吸引子

其中  $\alpha$  是实参数. 对于所有的  $\alpha \in [0, 1]$ , 系统处于混沌状态. 当  $\alpha = 0$  时, 它是 Lorenz 系统; 当  $\alpha = 1$  时, 它成为 Chen 系统; 当  $\alpha$  在 0 与 1 之间变化时, 系统均保持混沌状态.

Rössler 在总结 Lorenz 吸引子模型时, 于 1976 年发现了一个混沌系统, 其结构简单, 表达式右端仅含有一个非线性项和一个常数项. Rössler 系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $a, b, c$  为实参数, 当  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$  时, 系统处于混沌状态, 如图 2 所示.

本文将 Unified 系统和 Rössler 系统凸组合构造了新的混沌系统, 包括含两个参数的 Unified-Rössler 系统, 以及含一个参数的 Lorenz-Rössler 系统和 Chen-Rössler 系统; 计算了 Unified-Rössler 系统的最大

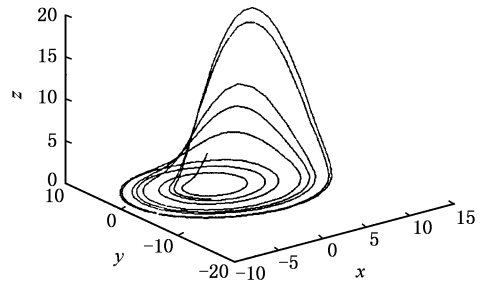


图 2 Rössler 混沌吸引子

Lyapunov 指数谱, 以及 Chen-Rössler 系统的最大 Lyapunov 指数谱和维数谱, 结合计算机仿真确定了 Chen-Rössler 系统的混沌区域.

## 2. Unified 系统与 Rössler 系统的组合

记 Unified 系统(4)为  $\dot{X} = U(X)$ , Rössler 系统(5)为  $\dot{X} = R(X)$ . 然后对这两个系统作凸组合, 即

$$\dot{X} = \beta U(X) + (1 - \beta)R(X), \quad (6)$$

其中实参数  $\beta \in [0, 1]$ .

于是, 当(5)式中  $a, b, c$  给定后(6)式成为含两个一次参数  $\alpha, \beta$  的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -[\alpha(25\alpha + 10)x + [-1 + \alpha(25\alpha + 11)]y + (\beta - 1)z], \\ \dot{y} &= [1 + \beta[27 - 35\alpha]]x + [\alpha(1 - \beta) + \alpha(29\alpha - 1)]y - \beta xz, \\ \dot{z} &= [\alpha(\beta - 1) - \frac{\beta}{3}(\alpha + 8)]z + (1 - \beta)xz + \beta xy + b(1 - \beta), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$ . 称之为含两个参数的 Unified-Rössler 系统.

取  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$  (7)式化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -[\alpha(25\alpha + 10)x + [-1 + \alpha(25\alpha + 11)]y + (\beta - 1)z], \\ \dot{y} &= [1 + \alpha(27 - 35\alpha)]x + [0.2\alpha(1 - \beta) + \alpha(29\alpha - 1)]y - \beta xz, \\ \dot{z} &= [5.7\alpha(\beta - 1) - \frac{\beta}{3}(\alpha + 8)]z + (1 - \beta)xz + \beta xy + 0.2(1 - \beta). \end{aligned} \quad (8)$$

这时,  $\beta = 0$  时为 Rössler 系统,  $\beta = 1$  时为 Unified 系统.

系统(8)中取  $\alpha = 0$  (即含一个参数的 Lorenz-Rössler 系统)为

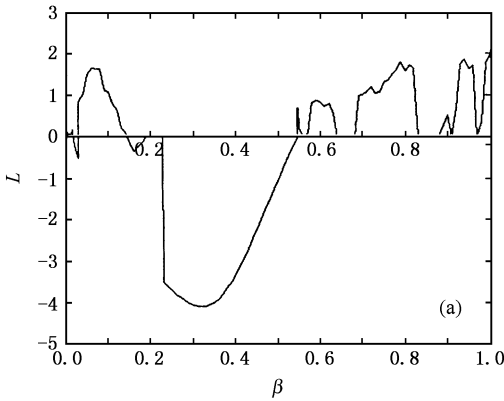
$$\dot{x} = -10\beta x + (11\beta - 1)y + (\beta - 1)z,$$

$$\dot{y} = (1 + 27\beta)x + (0.2 - 1.2\beta)y + \beta xz, \quad (9)$$

$$\dot{z} = \left[ \left( 5.7 - \frac{8}{3} \right) \beta - 5.7 \right] z + (1 - \beta)xz + \beta xy + 0.2(1 - \beta).$$

系统(8)中取  $\alpha = 1$  (即含一个参数的 Chen-Rössler 系统)为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -35\beta x + (-1 + 36\beta)y + (\beta - 1)z, \\ \dot{y} &= (1 - 8\beta)x + [0.2(1 - \beta) + 28\beta]y - \beta xz, \\ \dot{z} &= (2.7\beta - 5.7)z + (1 - \beta)xz + \beta xy + 0.2(1 - \beta). \end{aligned} \quad (10)$$



### 3. 最大 Lyapunov 指数谱和维数谱

对于含一个参数的 Chen-Rössler 系统(10),在  $\beta = 0$  时为 Rössler 系统,  $\beta = 1$  时为 Chen 系统(10)式构成 Rössler 系统和 Chen 系统的一个光滑连接,但是我们发现  $\beta$  在  $[0, 1]$  区间并非全为混沌.事实上,通过计算含一个参数的 Chen-Rössler 系统(10)的最大 Lyapunov 指数谱和维数谱,划分了组合系统的混沌区域.

记最大 Lyapunov 指数为  $l$ , Kaplan-Yorke 维数为  $d$ . 计算结果有:

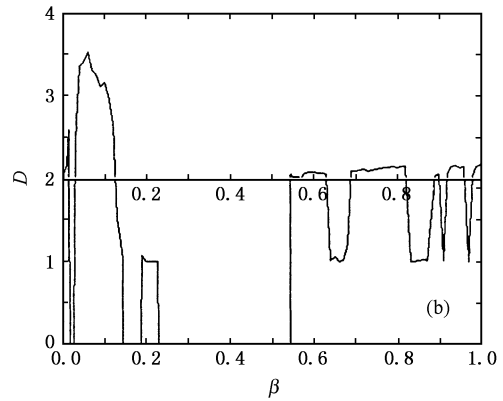


图3 Chen-Rössler 系统最大 Lyapunov 指数谱和 Kaplan-Yorke 维数谱

$\beta \in [0.017, 0.027]$  时,  $l \in [-0.51, -0.01]$ ,  $l < 0, d = 0$  系统收敛到不动点;

$\beta \in [0.028, 0.143]$  时,  $l \in [0.02, 0.9]$ ,  $l > 0$  系统处于混沌状态;

$\beta \in [0.144, 0.188]$  时,  $l \in [-1.7, -0.01]$ ,  $l < 0, d = 0$  系统收敛到不动点;

$\beta \in [0.189, 0.228]$  时,  $l \in [0.001, 0.005]$ ,  $l > 0$  系统处于混沌状态;

$\beta \in [0.229, 0.545]$  时,  $l \in [-4.1, -0.05]$ ,  $l < 0, d = 0$  系统收敛到不动点;

$\beta \in [0.546, 1]$  时,  $l \in [0.17, 2.00]$ ,  $l > 0$  系统处于混沌状态.

图4是 Unified-Rössler 系统(8)在参数空间  $\alpha, \beta \in [0, 1] \times [0, 1]$  上的最大 Lyapunov 指数谱.

图5给出含一个参数的 Chen-Rössler 系统(10)的计算机仿真图.

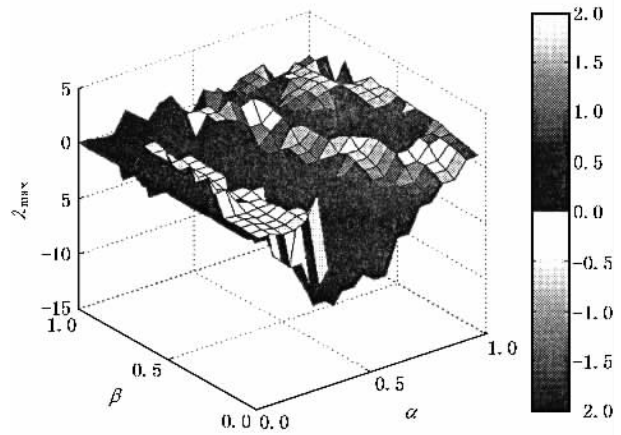


图4 参数空间  $\alpha, \beta \in [0, 1] \times [0, 1]$  上的最大 Lyapunov 指数谱

### 4. 结 论

本文利用凸组合方法,构造了新的混沌系统,包

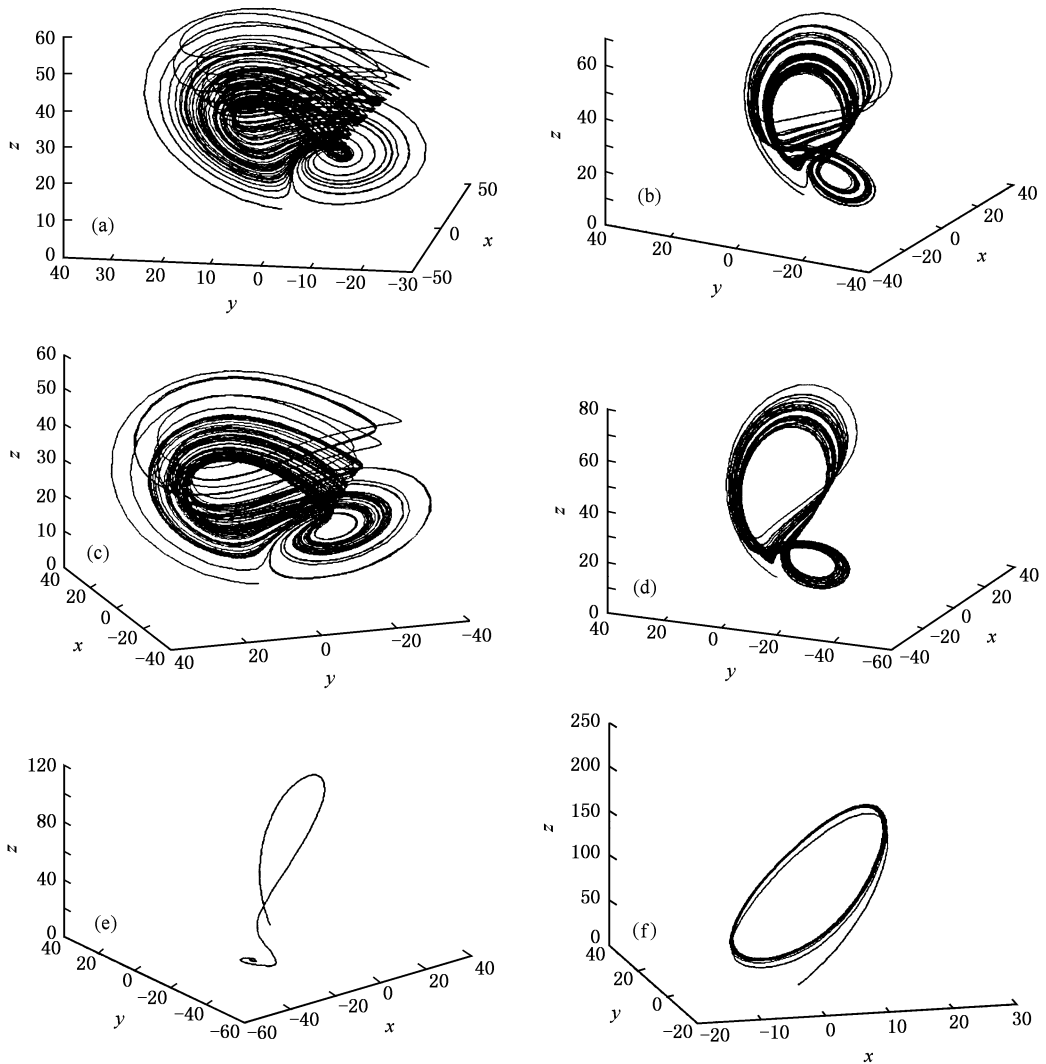


图5 Chen-Rössler 系统(10)的计算机仿真图 (a) $\alpha=1, \beta=0.9$  (b) $\alpha=1, \beta=0.7$  (c) $\alpha=1, \beta=0.8$  (d) $\alpha=1, \beta=0.6$  (e) $\alpha=1, \beta=0.4$  (f) $\alpha=1, \beta=0.2$

括含两个参数的 Unified-Rössler 系统,以及含一个参数的 Lorenz-Rössler 系统和 Chen-Rössler 系统,通过计

算最大 Lyapunov 指数谱、维数谱和计算机仿真,确定了 Chen-Rössler 系统的混沌区域。

- [ 1 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 2 ] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [ 3 ] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [ 4 ] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [ 5 ] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Celikovsky S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [ 6 ] Celikovsky S, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1789
- [ 7 ] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz Systems Family: Analysis, Control and Synchronization* ( Beijing: Science Press ) p98 ( in Chinese ) [ 陈光荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)第 98 页 ]
- [ 8 ] Chen G R, Dong X N 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* ( Singapore: World Scientific )
- [ 9 ] Lu J A, Wu X Q, Lü J H 2002 *Phys. Lett. A* **305** 365
- [ 10 ] Lu J A, Wu X Q, Han X P, Lü J H 2004 *Phys. Lett. A* **329** 327
- [ 11 ] Chen A M, Lu J A, Lü J H, Yu S M 2006 *Physica A* **364** 103
- [ 12 ] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497 ]
- [ 13 ] Tao C H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 0281( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安 2003 物理学报 **52** 0281 ]
- [ 14 ] Li D M, Lu J A, Wu X Q, Chen G R 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 529

- [ 15 ] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control* ( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) p54 ( in Chinese ) [ 胡 岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制( 上海 :上海科技教育出版社 )第 54 页 ]
- [ 16 ] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 91( in Chinese ) [ 禹思敏 2004 物理学报 **53** 91 ]
- [ 17 ] Zou Y L , Zhu J , Chen G R 2005 *Chin. Phys.* **14** 697

## A novel chaotic system via combining a unified system with Rössler system<sup>\*</sup>

Gao Bing-Jian<sup>1,2)†</sup> Lu Jun-An<sup>1)</sup> Chen Ai-Min<sup>1)</sup>

1 *School of Mathematics and Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China* )

2 *School of Science , Wuhan University of Technology , Wuhan 430070 , China* )

( Received 29 November 2005 ; revised manuscript received 22 January 2006 )

### Abstract

This brief paper designs a novel chaotic system via convex-combining a unified system with Rössler system. The combined system includes a Unified-Rössler system with double parameters , a Lorenz-Rössler system and a Chen-Rössler system with single parameter. The chaotic intervals in Chen-Rössler system are determined by calculating maximum Lyapunov exponent spectrum and numerical simulation .

**Keywords** : chaos , convex combination , Lyapunov exponent spectrum

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 60574045 ) and the State Key Development Program for Basic Research of China( Grant No. 2003CB415200 ).

<sup>†</sup> E-mail : bjgao@mail.whut.edu.cn