高斯波束对双层粒子的辐射俘获力*

韩一平 杜云刚 张华永

(西安电子科技大学理学院,西安 710071) (2005年12月12日收到 2005年12月27日收到修改稿)

从广义米理论出发,将入射高斯波束用矢量球谐函数展开,根据对电磁场动量的讨论,得出了高斯波束对多层 球形粒子的辐射俘获力的表示式,并就单高斯波束对在轴双层有吸收粒子受到的辐射俘获力进行了数值模拟,讨 论了束腰半径、吸收系数、内外层相对厚度对俘获情况的影响。

关键词:辐射俘获力,多层球形粒子,光镊,高斯波束 PACC:4110H,4225F,4262

1.引 言

自 1970 年 Ashkin 报道了激光束对粒子的加速 和俘获以来^{12]},人们开始建立各种模型分析粒子与 波束之间的相互作用, Gouesbet 等^[3]利用 Bromwich 公式研究了均匀各向同性球形粒子对波束的散射, 给出了散射强度、相位角、截面和辐射压力截面的表 示式. Martinot-Lagarde 等人对纵向、横向辐射压力截 面进行了数值模拟^[4--6]. Barton 等^[78]研究了均匀球 内场和球表面散射场的分布,得出了任意波束中球 形粒子受到的净辐射力和力矩的级数表达式,对水 滴在空气中的悬浮和共振情况进行了讨论, Onofri 等把广义米理论扩展到多层球对任意波束的散射, 对散射振幅和辐射压力截面进行了讨论⁹]. Polaert 等讨论了不同吸收情况的多层球形粒子在线极化和 圆极化聚焦高斯波束中的力矩和辐射压力截面^[10]. 吴鹏等在大粒子对高斯波束散射的数值模拟中 改 进了计算方法 能够计算的球形粒子的尺寸参数已 突破 80000¹¹. Ashkin 以几何光学和动量转移为基 础建立了射线光学模型^[12];Harada 以电磁波理论和 微粒极化原理建立了瑞利模型[13] 姚新程等以射线 光学模型为基础计算了双层大尺寸粒子的光作用 力^[14].目前,用于理论分析光镊系统中粒子受力的 模型主要是适用于大粒子的射线光学模型和适用于 小粒子的瑞利模型 但这两种模型在微粒吸收、微粒

尺寸方面具有局限性.中国科学院物理研究所在光 镊实验系统中微位移和力的测量方面进行着深入研 究^[15,16].由于光镊可以实现对生物活体样品非接触 无损伤操纵 随着光镊技术的不断成熟 光镊以其独 特的优点已经在生物细胞及生物大分子的俘获、分 选、操纵等方面得到广泛深入的应用.目前实验中俘 获研究的细胞有动物细胞、大肠杆菌、红血细胞、神 经细胞、配偶子等 但还没有关于有吸收多层细胞和 微粒在光镊系统中受辐射俘获力的理论分析和实验 测量方面的报道^[17].

我们从广义米理论出发,将入射高斯波束用矢 量球谐函数展开.根据经典电动力学中关于电磁场 动量的讨论,得出了高斯波束对多层球形粒子轴向 辐射俘获力的表示式,并以双层有吸收的有核血细 胞的俘获情况进行了数值模拟和讨论.

2. 多层球对高斯波束的散射

高斯波束在折射率为 n_0 的均匀媒质中传播 ,媒 质的介电常数为 ε ,磁导率为 μ .选波束中心为坐标 原点 ,波束沿 z 轴正向传播 ,电场沿 x 方向极化 ,束 腰半径为 w_0 ,省去时间因子 $\exp(-i\omega t)$.与平面波 入射类似 ,将入射波束的电磁场用矢量球谐函数 展开^[18]:

$$\boldsymbol{E}^{i} = E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[g_{n,\text{TE}}^{m} \boldsymbol{M}_{nm}^{(1)} (r,\theta,\varphi) \right]$$

^{*}教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号:NECT-04-0949)和国家自然科学基金(批准号 50371019)资助的课题.

$$- i g_{n,\text{TM}}^{m} N_{nm}^{(1)} (r , \theta , \varphi)], \qquad (1)$$

$$H^{i} = - \frac{k}{\omega \mu} E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} [g_{n,\text{TM}}^{m} M_{nm}^{(1)} (r , \theta , \varphi)]$$

$$+ i g_{n,\text{TE}}^{m} N_{nm}^{(1)} (r , \theta , \varphi)], \qquad (2)$$

式中 *E*₀ 是束腰中心电场幅度 ,*g*^m_m, ,*g*^m_m是高斯波 束在负时间因子下的波束因子. 矢量球谐函数分 别为

$$M_{nm}(r,\theta,\varphi)$$

$$= \frac{z_n(kr)}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi} \hat{\theta} - z_n(kr) \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\varphi} , \qquad (3)$$

$$N_{nm}(r,\theta,\varphi)$$

$$= \frac{z_n(kr)}{kr} n(n+1) Y_{nm} \hat{r}$$

$$+ \frac{1}{kr} \frac{d(krz_n)}{d(kr)} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{kr \sin\theta} \frac{d(krz_n)}{d(kr)} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi} \hat{\varphi} , \qquad (4)$$

$$Y_{nm} = Y_{nm}(\theta,\varphi)$$

$$=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$$

$$(m=0,\pm 1,\dots,\pm n),$$
(5)

 $z_n(kr)$ 根据矢量球谐函数的上标(1,2,3)分别表示 球贝塞尔函数 $j_n(kr), y_n(kr), h_n^{(1)}(kr)$.当高斯波束 照射到多层球形介质粒子上时,周围媒质中的波长 为 λ_0 ,波数为 $k = 2\pi/\lambda_0$.粒子中心的位置为(x_0 , y_0 , z_0),每层介质区域的介电常数为 ϵ_j ,磁导率为 μ_j , 半径为 r_j (j = 1,2,3,...,t).相对折射率为 $m_j = \sqrt{\epsilon_j/\epsilon_0}/n_0$,各区域对应的尺寸参数 $x_j = 2\pi r_j m_j/\lambda_0$. 将散射场和多层球内各区域电磁场也按矢量球谐函 数展开:

$$\boldsymbol{E}^{s} = E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} [i a_{nm} N_{nm}^{(3)} (r \ \boldsymbol{\beta} \ \boldsymbol{\varphi}) - b_{nm} M_{nm}^{(3)} (r \ \boldsymbol{\beta} \ \boldsymbol{\varphi})], \qquad (6)$$

$$H^{s} = \frac{k}{\omega\mu} E_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} [i b_{nm} N^{(3)}_{nm} (r \ \beta \ \varphi) + a_{nm} M^{(3)}_{nm} (r \ \beta \ \varphi)], \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{E}^{j} = \boldsymbol{E}_{0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} [c_{nm}^{(j)} \boldsymbol{M}_{nm}^{(1)} (r_{n} \theta_{nm} \varphi) - i d_{nm}^{(j)} \boldsymbol{N}_{nm}^{(1)} (r_{n} \theta_{nm} \varphi) + e_{nm}^{(j)} \boldsymbol{M}_{nm}^{(2)} (r_{n} \theta_{n} \varphi) - i f_{nm}^{(j)} \boldsymbol{N}_{nm}^{(2)} (r_{n} \theta_{nm} \varphi)], \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{H}^{j} = -\frac{k_{j}}{\omega\mu_{j}}E_{0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[d_{nm}^{(j)}\boldsymbol{M}_{nm}^{(1)}(r,\theta,\varphi) + ic_{nm}^{(j)}\boldsymbol{N}_{nm}^{(1)}(r,\theta,\varphi) + f_{nm}^{(j)}\boldsymbol{M}_{nm}^{(2)}(r,\theta,\varphi) + ie_{nm}^{(j)}\boldsymbol{N}_{nm}^{(2)}(r,\theta,\varphi)\right],$$

$$(j = 1, 2, \dots, t). \qquad (9)$$

由边界条件,可以得出散射系数 and ,bm 的迭代公式

$$a_{nm} = g_{n,\text{TM}}^{m} \frac{\psi_{n}(x_{t})}{\xi_{n}(x_{t})} \frac{H_{n}^{a}(m_{t}x_{t}) - m_{t}D_{n}^{(1)}(x_{t})}{H_{n}^{a}(m_{t}x_{t}) - m_{t}D_{n}^{(3)}(x_{t})} = g_{n,\text{TM}}^{m}a_{n} , \qquad (10)$$

$$b_{nm} = g_{n,\text{TE}}^{m} \frac{\psi_{n}(x_{t})}{\xi_{n}(x_{t})} \frac{H_{n}^{b}(m_{t}x_{t}) - m_{t}D_{n}^{(1)}(x_{t})}{H_{n}^{b}(m_{t}x_{t}) - m_{t}D_{n}^{(3)}(x_{t})} = g_{n,\text{TE}}^{m}b_{n} , \qquad (11)$$

 a_n , b_n 的数值计算见文献[19 20]. $g_{n,\text{TE}}^m$, $g_{n,\text{TM}}^m$ 是高 斯波束在负时间因子下的波束因子,其中包含了平 面波系数 $C_n^{\text{FW}} = i^n(2n+1)[n(n+1)]$,当束腰半径 趋于无穷时高斯波束退化成平面波.关于 $g_{n,\text{TE}}^m$, $g_{n,\text{TM}}^m$ 的计算我们将另文讨论.

高斯波束对球形多层粒子的辐射俘 获力的推导

根据经典电动力学中关于电磁场动量的讨论, 在光镊系统中经显微镜物镜变换会聚到微米量级的 激光波束携带着很高的能量和动量.入射高斯波束 照射到粒子上发生散射,散射前后光束的动量将发 生变化,也就是处于波束场中的粒子将得到一部分 动量,在一段时间内,以粒子受到的辐射俘获力表现 出来,即

$$F = -\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V} g \mathrm{d}V$$
$$= -\frac{n_{0}}{2c} \mathrm{Re} \iint (E \times H^{*}) \mathrm{d}S , \qquad (12)$$

其中 c 为光在真空中的速度 $,E = E^{i} + E^{s}$ $,H = H^{i} + H^{s}$,g 为电磁场动量密度 ,F 为时间平均值. dS 为包围散射粒子的闭合球面上的面元.这里只推导和讨论粒子受到的沿光轴方向的辐射俘获力 ,即

$$F_{z} = -\frac{n_{0}}{2c} \operatorname{Re} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^{*}) \cdot \hat{z} \, \mathrm{d}S$$

$$= \frac{n_{0}}{2c} \operatorname{Re} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} (E_{\varphi}^{i} H_{\theta}^{s*} - E_{\theta}^{i} H_{\varphi}^{s*})$$

$$+ E_{\varphi}^{s} H_{\theta}^{i*} - E_{\theta}^{s} H_{\varphi}^{i*} + E_{\varphi}^{s} H_{\theta}^{s*}$$

$$- E_{\theta}^{s} H_{\varphi}^{s*} + E_{\varphi}^{i} H_{\theta}^{i*} - E_{\theta}^{i} H_{\varphi}^{i*})$$

$$\times r^{2} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi. \qquad (13)$$

考虑到周围媒质不吸收 $, E_{\varphi}^{i}H_{\theta}^{i} = E_{\theta}^{i}H_{\varphi}^{i*}$ 项的积分为 零^[3]. 把入射场和散射场的分量带入上式积分 ,并且 在大宗量时 ,

$$\xi_n(kr) = krh_n^{(1)}(kr) = (-i)^{n+1} \exp(ikr),$$

 $\psi_n(kr) = krj_n(kr) (\xi_n + \xi_n^*)/2$,

再利用球谐函数 Y_{mm}的递推关系和正交关系^[21],我 们得出轴向辐射俘获力的表示式

$$F_{z} = \frac{n_{0}}{2c} \frac{E_{0}}{k^{2}} \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{\infty} \operatorname{Re} \left(in(n+2) \times \sqrt{\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} \times \left(2a_{n+1,m}a_{n,m}^{*} - a_{n+1,m}g_{n,\mathrm{TM}}^{m*} - g_{n+1,\mathrm{TM}}^{m}a_{n,m}^{*} + 2b_{n+1,m}b_{n,m}^{*} - g_{n+1,\mathrm{TM}}^{m}a_{n,m}^{*} + 2b_{n+1,m}b_{n,m}^{*} - b_{n+1,m}g_{n,\mathrm{TE}}^{m*} - g_{n+1,\mathrm{TE}}^{m}b_{n,m}^{*} \right) + im(2a_{n,m}b_{n,m}^{*} - a_{n,m}g_{n,\mathrm{TE}}^{m*} - g_{n,\mathrm{TM}}^{m}b_{n,m}^{*})) (14)$$

$$\left. \operatorname{I} \operatorname{E} \frac{kE_{0}^{2}}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{0}^{2} = 2I = \frac{4P}{\pi w_{0}^{2}} P \operatorname{Dillem} \operatorname{Dillem}$$

4. 轴向辐射俘获力的数值模拟

根据轴向辐射俘获力的表示式,我们利用 MATLAB 对水中的有核血细胞的俘获力进行了数 值模拟.水的折射率 $n_0 = 1.33$,激光功率 P =100mW 水中的波长 $\lambda_0 = \lambda/n_0 = 0.5145/n_0\mu$ m.细胞 核和细胞质的半径、折射率分别用 r_1 , r_2 , n_1 , n_2 表 示.图 1 所示为不同束腰半径时轴向辐射俘获力 F_2 随粒子在轴位置 z 变化的曲线. $r_1 = 30\mu$ m, $r_2 =$ 3.5 μ m, $n_1 = 1.3965$, $n_2 = 1.3699$.在光镊系统中经显 微镜物镜变换会聚到微米量级的激光波束有更大的 光强梯度,处在这个梯度场中的微粒将受到指向光 强最强方向(波束中心)的梯度力;由于微粒对波束 的散射作用,微粒还受到沿着波束传播方向的散射 力.当粒子中心和束腰中心重合时,梯度力为零,而 散射力不为零,故俘获力大于零,如图所示.当 $w_0 <$ 1.0µm时,有负的辐射俘获力出现,即粒子中心在光 轴上束腰中心前方沿光传播方向偏离束腰中心时, 将受到指向束腰中心的俘获力,粒子将被拉回束腰 中心.负的俘获力是由于小的束腰半径时有大的指 向束腰中心的梯度力,在束腰中心前梯度力大于散 射力.随着束腰半径 w₀的增大,负的俘获力消失, 辐射俘获力方向沿着光束传播方向(*z*轴正向)为正 值,与粒子的重力平衡可以实现粒子的悬浮.波束束 腰半径的变化对单层和双层球形微粒的轴向辐射俘 获力的影响是相同的,它主要决定微粒所在光场的 光强梯度.在实验操作中我们常利用高数值孔径的 显微镜物镜实现波束束腰半径的变换,使波束束腰 半径变小从而对粒子产生负的辐射俘获力,实现微 粒的俘获或操纵.



图 1 不同束腰半径时轴向辐射俘获力 *F₂* 随粒子在轴位置 *z* 变化的曲线

图 2 所示为粒子内层不同吸收时轴向辐射俘获 力 F_z 随粒子在轴位置 z 变化的曲线. $w_0 = 0.6 \mu m$, $r_1 = 3.0 \mu m$, $r_2 = 3.5 \mu m$, Re(n_1) = 1.3965, $n_2 = 1.3699$. 从图可知,粒子内层的吸收比较小时($Im(n_1) < 0.0000067$ 时),有负的辐射俘获力出现 粒子将被束 缚于束腰中心.随着粒子内层吸收的增强,负的俘获 力消失,俘获力在束腰中心附近出现正的极大值.这 是由于随着粒子吸收的增强,大量的光子被粒子所 吸收,引起散射力迅速增大而远超过梯度力(虽然束 腰半径小,梯度力较大).

图 3 所示为粒子内层折射率大于外层折射率 时,内层半径相对变化时轴向辐射俘获力 F, 随粒



图 2 粒子内层不同吸收时轴向辐射俘获力 F_z 随粒子在轴位置 z 变化的曲线

子在轴位置 z 变化的曲线. $r_2 = 3.5 \mu m$, $w_0 = 0.6 \mu m$, $n_1 = 1.3965$, $n_2 = 1.3699$. 从图可知,随着粒子内层 半径的减小,在束腰中心前方($z = 13 \mu m$ 附近)负俘 获力的最大值变化不大,在束腰中心后方($z = -17 \mu m$ 附近)正俘获力的最大值变化较大.在 $r_1 < 1.0 \mu m$ 时,正俘获力出现一个次极大值.粒子在 $-15 \mu m < z < 10 \mu m$ 范围内偏离束腰中心都将受到指 向中心的俘获力,粒子就被束缚于光轴上这个范围 内.内层半径较大时在俘获范围内有过平衡位置的 较大的负斜率,表明粒子被束缚的更强.

图 4 所示为粒子内层折射率小于外层折射率 时,内层半径相对变化时轴向辐射俘获力 F_z 随粒 子在轴位置 z 变化的曲线. $r_2 = 3.5 \mu$ m, $w_0 = 0.6 \mu$ m, $n_1 = 1.3465$, $n_2 = 1.3699$. 从图可知,在 $r_1 = 2.5 \mu$ m 时,束腰中心附近出现一个较为平坦的区域,由于粒 子周围液体的外部扰动,粒子不能在光轴上这个区 域中的某个位置实现固定悬浮.随着粒子内层半径 的减小,光轴上小范围内 – 5μ m < $z < 5 \mu$ m 出现过平 衡位置的正斜率,粒子将被推出这个范围外,如图 $r_1 = 1.0 \mu$ m 最明显,虽然在这个小范围是正斜率,但 总体还是负斜率,粒子可以在这个小范围两端中的 任一个负斜率且过零力值点的位置实现俘获.当内 层半径 $r_1 < 2 \mu$ m 时,随着 r_1 的减小,辐射俘获力的 正负极大值不断增大,更容易实现轴上的俘获,这与 粒子内层折射率大于外层折射率时的情况相反.



图 3 粒子内层折射率大于外层时轴向辐射俘获力 F_z 随粒子在 轴位置 z 变化的曲线



图 4 粒子内层折射率小于外层时轴向辐射俘获力 F_z 随粒子在 轴位置 z 变化的曲线

5.结论

在光镊系统中经显微镜物镜变换会聚到微米量 级的激光波束有更大的光强梯度,对于粒子横向偏 离光轴,在一定范围内横向辐射俘获力都将把粒子 拉回到光轴上.实现单波束对粒子的俘获关键是在 轴向对粒子的俘获.本文通过对双层有吸收粒子的 轴向俘获力的数值模拟表明:通过高数值孔径的物 镜对波束变换得到小的束腰半径时,才能实现粒子 的三维俘获,随着粒子对电磁波吸收的增强,粒子在 光轴上不再受到束缚;当粒子内层折射率大于外层 时,内层半径大的粒子在光轴上有更强的束缚;当粒 子内层折射率小于外层时,内层半径小的粒子在光 轴上有更强的束缚,且有可能在光轴上两个位置实现束缚.文中轴向辐射俘获力的公式适用于半径在 0.001—10µm 范围的多层球形粒子.本文的结论为 光镊实验系统的改进和实验中力的测量提供了参 考.对多层生物细胞的辐射俘获力的理论研究对体 外辅助受精、细胞加工等研究起到了指导作用.

- [1] Ashkin A 1970 Phys. Rev. Lett. 24 156
- [2] Ashkin A, Dziedzic J M, Bjorkholm J E, Chu S 1986 Opt. Lett. 11 288
- [3] Gouesbet G , Maheu B , Gréhan G 1988 J. Opt. Soc. Am. A 5 1427
- [4] Ren K F , Gréhan G , Gouesbet G 1996 Appl. Opt. 35 2702
- [5] Ren K F , Gréhan G , Gouesbet G 1994 Opt . Commun . 108 343
- [6] Martinot-Lagarde G, Pouligny B, Angelova M I, Gréhan G, Gouesbet G 1995 Pure Appl. Opt. 4 571
- [7] Barton J P , Alexander D R , Schaub S A 1988 J. Appl. Phys. 64 1632
- [8] Barton J P , Alexander D R , Schaub S A 1989 J. Appl. Phys. 66 4594
- [9] Onofri F, Gréhan G, Gouesbet G 1995 Appl. Opt. 34 7113
- [10] Polaert H , Gréhan G , Gouesbet G 1998 Opt . Commun . 155 169
- [11] Wu Peng, Han Y P, Liu D F 2005 Acta Phys. Sin. 54 2676 (in Chinese)[吴 鹏、韩一平、刘德芳 2005 物理学报 54 2676]
- [12] Ashkin A 1992 J. Biophys. 61 569
- [13] Harada Y , Asakura T 1996 Opt . Commun . 124 529

- [14] Yao X C, Li Z L, Cheng B Y, Zhang D Z 2000 Acta Opt. Sin. 20 1305 (in Chinese)[姚新程、李兆霖、程丙英、张道中 2000 光学 学报 20 1305]
- [15] Liu C X, Guo H L, Jiang Y Q et al 2005 Acta Phys. Sin. 54 1162 (in Chinese)[刘春香、郭红莲、降雨强等 2005 物理学报 54 1162]
- [16] Jiang Y Q, Guo H L, Liu C X et al 2004 Acta Phys. Sin. 53 1721 (in Chinese)[降雨强、郭红莲、刘春香等 2004 物理学报 53 1721]
- [17] Lang M L , Block S M 2003 Am . J. Phys. **71** 201
- [18] Wu Z S, Guo L X, Wu C M 1998 Acta Opt. Sin. 18 682 (in Chinese)[吴振森、郭立新、吴成明 1998 光学学报 18 682]
- [19] Wu Z S , Guo L X , Ren K F , Gréhan G , Gouesbet G 1997 Appl. Opt. 36 5188
- [20] Wu Z S , Wang Y P 1991 Radio . Sci . 26 1393
- [21] Wang Z X, Guo D R 2000 Introduction to Special Function (Beijing: Peking University Press) p238 (in Chinese)[王竹溪、 郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京 北京大学出版社)238]

Radiation trapping forces acting on a two-layered spherical particle in a Gaussian beam *

Han Yi-Ping Du Yun-Gang Zhang Hua-Yong

(Department of Applied Physics , School of Science , Xidian University , Xi 'an 710071 , China)
 (Received 12 December 2005 ; revised manuscript received 27 December 2005)

Abstract

Based on the generalized Lorenz-Mie theory (GLMT), the incident fundamental Gaussian beam is expanded in terms of the vector spherical harmonics. We present an expression of radiation trapping forces acting on a multilayered spherical particle in a Gaussian beam by using the theory of electromagnetic momentum, and, as an example, numerical results are given to an axial two-layer absorbing spherical particle, along with a discussion about the influence of the beam waist radius, relative complex refractive index and thickness of the two layers on trapping forces.

Keywords : radiation trapping forces , multilayered spherical particle , optical tweezers , Gaussian beam PACC : 4110H , 4225F , 4262

^{*} Project supported by the NECT (Grant No.04-0949) and the National Natural Science Foundation of China Grant No.60371019).