

# 非傍轴矢量拉盖尔-高斯光束 的二阶矩表示\*

康小平<sup>1,2)</sup> 吕百达<sup>1)</sup>

1) (四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

2) (琼州大学物理系, 五指山 572200)

(2005 年 8 月 3 日收到, 2005 年 12 月 28 日收到修改稿)

基于 Porras 提出的光传输的非傍轴矢量矩理论, 推导出初始圆偏振的非傍轴矢量拉盖尔-高斯(LG)光束的特征参数, 包括束宽、远场发散角和  $M^2$  因子等的公式, 并表示为级数求和形式. 非傍轴矢量高斯光束公式作为特例给出. 研究表明, 基于二阶矩定义的束宽按双曲线规律传输, 当  $w_0/\lambda \rightarrow \alpha w_0$  为束宽,  $\lambda$  为波长, 时, 远场发散角  $\theta$  趋于  $90^\circ$ , 大于非傍轴标量理论预示的值  $63.435^\circ$ . 非傍轴矢量 LG 光束的  $M^2$  因子不仅与模指数  $p$  有关, 而且还与  $w_0/\lambda$  有关. 最后, 对非傍轴矢量 LG 光束和非傍轴标量 LG 光束的传输作了比较, 结果表明在  $w_0/\lambda$  较小时, 矢量效应对远场发散角的影响十分显著. 对  $\theta \rightarrow 90^\circ$  引起的问题和非傍轴矢量矩理论的适用范围, 以及解决问题的可能途径作了分析和讨论.

关键词: 非傍轴矢量拉盖尔-高斯光束, 圆偏振, 非傍轴矢量矩理论, 光束参数

PACC: 4200, 4210Q

## 1. 引 言

在傍轴近似下, 对用空间域和空间频率域中光强二阶矩描述光束参数和光束传输因子 ( $M^2$  因子) 的问题已作了深入研究<sup>[1,2]</sup>. 近年来, 随着光子晶体、微腔激光器、亚波长及亚波长光阑等工作的进展, 非傍轴光束的描述和传输变换问题引起人们的广泛关注<sup>[3-6]</sup>. 当把强度矩理论推广用于非傍轴光束时, 为克服积分发散, 以及更为准确描述横截面上的光强, 应当用时间平均坡印廷矢量的  $z$  分量  $S_z$  代替光强<sup>[7,8]</sup>. 按功率密度二阶矩定义的非傍轴标量光束的束宽在自由空间传输过程中满足双曲线规律, 但  $M^2$  因子可小于 1<sup>[8,9]</sup>. Porras 在文献[10]中建立了光传输的非傍轴矢量矩理论, 并给出了用  $2 \times 2$  矩阵描述矢量非傍轴光束参数的数学公式. 对圆偏振非傍轴矢量高斯光束的计算表明<sup>[11]</sup>: “在高斯光源线度趋向零的极限情形下, 横向的最大发散角为  $90^\circ$ ”. 但是, 迄今为止, 对矢量非傍轴光束二阶矩描述的研究工作都是基于基模高斯光束<sup>[10-12]</sup>, 而对高阶和多模

非傍轴矢量光束参数的二阶矩表示尚未见有关报道. 本文的目的是研究更为一般的多模非傍轴矢量光束参数的二阶矩表示和讨论非傍轴矢量矩理论相关的问题. 在第二节中, 将 Porras 的理论用于初始圆偏振、圆对称非傍轴矢量拉盖尔-高斯(LG)光束, 推导出了束宽、远场发散角和  $M^2$  因子的公式表示为级数求和的形式, 并讨论了一些特殊情况. 数值计算和分析为第三节的内容. 最后, 在第四节中对本文所得结果作了小结, 并对矢量矩理论存在的某些问题和可能解决的方法作了分析和讨论.

## 2. 理论模型

源平面  $z=0$  处圆对称、圆偏振 LG 光束的场分布可表示为<sup>[13]</sup>

$$E(r, \rho) = E_x(r, \rho)\mathbf{i} + E_y(r, \rho)\mathbf{j} \\ = L_p(2r^2/w_0^2)\exp(-r^2/w_0^2)(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad (1)$$

式中,  $w_0$  为 LG 光束对应的基模高斯光束束腰宽度,  $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  分别为  $x$ ,  $y$  方向的单位矢量,  $L_p =$

\* 国家高技术研究发展计划(批准号:A823070)、国家自然科学基金(批准号:10574097)和海南省自然科学基金(批准号:80598)资助的课题.

$L_p^{(0)}$  是指数为  $p, l=0$  的拉盖尔多项式.

按平面波的角谱理论, 在任一横平面  $z$  处的电场矢量可表示为<sup>[14]</sup>

$$E(r, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A^E(\rho, \theta) \exp[ik(x\rho \cos\theta + y\rho \sin\theta + z\sqrt{1-\rho^2})] \rho d\rho d\theta, \quad (2)$$

式中  $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长,  $\epsilon$  和  $\mu$  分别为均匀介质的介电常数和磁导率,  $\omega$  为电磁场的圆频率, 当  $\rho > 1$  时, 对应于随  $z$  的增加迅速衰减的倏逝波, 当  $\rho < 1$  时, 则对应于传播波. 参数  $\rho, \theta$  与横向空间频率  $\xi, \eta$  的关系为  $\rho \cos\theta = \lambda\xi, \rho \sin\theta = \lambda\eta$ ,

$$A^E(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi f^2} (-1)^p \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2}\right) L_p\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \times \left(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\alpha \cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{k}\right) \quad (3)$$

为  $E(r, 0)$  的傅里叶变换, 其中  $f = 1/kw_0$  ( $f$  参数<sup>[15]</sup>),  $\mathbf{k}$  为  $z$  方向的单位矢量.

根据麦克斯韦方程组, 可得磁场强度矢量  $\mathbf{H}$  为

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{i}}{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (4)$$

在(2)式和(4)式中省略了时间因子  $\exp(-i\omega t)$ , 把(2)式代入(4)式, 得到磁场强度矢量为

$$\mathbf{H}(r, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A^H(\rho, \theta) \exp[ik(x\rho \cos\theta + y\rho \sin\theta + z\sqrt{1-\rho^2})] \rho d\rho d\theta, \quad (5)$$

式中

$$A^H(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi f^2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (-1)^p \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2}\right) L_p\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \times \left(\frac{\rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \cos\theta \sin\theta - 1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{i} - \frac{\rho^2 \sin^2\theta - \rho^2 \cos\theta \sin\theta - 1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{j} + \alpha \cos\theta - \sin\theta \mathbf{k}\right). \quad (6)$$

对时间平均的坡印廷矢量在  $z$  方向上的分量为

$$S_z = \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}_z, \quad (7)$$

式中略去了对结果没有影响的  $1/2$  因子,  $\text{Re}$  表示取实部,  $*$  表示复共轭. 根据 Parseval 定理, 可得矢量 LG 光束通过任意  $z$  为常数的平面的总功率为

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_z dx dy = \frac{1}{8\pi\lambda^2 f^4} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{mp} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right)$$

$$\times \frac{2 - \rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho^{\alpha m_1 + m_2 + 1} d\rho, \quad (8)$$

式中

$$F_{mp} = \frac{(p!)^2}{(p - m_1)(p - m_2)(m_1!)(m_2!)^2} \times (-1/f^2)^{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

(8)式表明, 功率在传输过程中与传输距离  $z$  无关, 保持不变, 即  $P(z) = P(0) = P$ .

根据光束传输的非傍轴矢量矩理论<sup>[10]</sup>, 光束在横平面上的重心坐标表示为

$$\begin{pmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} S_z dx dy = -\frac{1}{4\pi\lambda f^2 P} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \times \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right) L_p\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \times \left[L_p\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) + 2L_{p-1}^{(1)}\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right)\right] \times \frac{(2 - \rho^2 + \rho^2 \sin 2\theta)}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \rho^2 d\rho d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

因此, 基于坡印廷矢量二阶矩定义的束宽矩阵为

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z) \\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_z \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} dx dy \quad (\text{束宽矩阵}). \quad (11)$$

选取  $z=0$  面为参考面, 则束宽沿  $z$  轴的变化满足

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z) \\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x^2(0) & W_{xy}^2(0) \\ W_{xy}^2(0) & W_y^2(0) \end{pmatrix} + 2z \begin{pmatrix} W_x^2(0) & W_{xy}^2(0) \\ W_{xy}^2(0) & W_y^2(0) \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} \tan^2\theta_x & \tan^2\theta_{xy} \\ \tan^2\theta_{xy} & \tan^2\theta_y \end{pmatrix}, \quad (12)$$

式中,

$$\begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x S_x & \frac{1}{2}(x S_y + y S_x) \\ \frac{1}{2}(x S_y + y S_x) & y S_y \end{pmatrix} dx dy \quad (\text{曲率矩阵}), \quad (13)$$

式中  $S_x$ ,  $S_y$  分别为时间平均坡印廷矢量在  $x, y$  方向上的分量,

$$\begin{pmatrix} \tan^2 \theta_x & \tan^2 \theta_{xy} \\ \tan^2 \theta_{xy} & \tan^2 \theta_y \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1/\lambda^2} d\xi d\eta \times \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\zeta}(\mathbf{A}^E \times \mathbf{A}^{H*})_x & \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi}{\zeta}(\mathbf{A}^E \times \mathbf{A}^{H*})_y + \frac{\eta}{\zeta}(\mathbf{A}^E \times \mathbf{A}^{H*})_x \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\xi}{\zeta}(\mathbf{A}^E \times \mathbf{A}^{H*})_y + \frac{\eta}{\zeta}(\mathbf{A}^E \times \mathbf{A}^{H*})_x \right] & \frac{\eta}{\zeta}(\mathbf{A}^E \times \mathbf{A}^{H*})_y \end{pmatrix} \quad (\text{发散角矩阵}). \quad (14)$$

利用(3)(6)(8)和(11)式,经运算得到  $z=0$  面处的束腰宽度分别为

$$W^2(0) = W_x^2(0) = W_y^2(0) = \frac{1}{64\pi^3 f^8 P} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{mp} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \times (\rho^2 - 2) \rho^4 + 16f^4 m_2^2 - 4\rho^2 f^2 - 8m_2 \rho^2 f^2 \rho^{x_{m_1+m_2}-1} d\rho, \quad (15)$$

$$W_{xy}^2(0) = -\frac{1}{128\pi^4 f^8 P} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{mp} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (2 - \rho^2 + \rho^2 \sin 2\theta) \times (\rho^4 - 8\rho^2 f^2 4m_2 - 16m_2 f^4 + 16m_2^2 f^4) \rho^{x_{m_1+m_2}-1} \sin 2\theta d\rho d\theta = 0. \quad (16)$$

由(13)式,得  $z=0$  面处  $x$  方向的曲率为

$$\begin{aligned} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} &= \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x S_x dx dy \\ &= \frac{1}{16\pi^3 f^6 P} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \\ &\times \text{Im} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right) L_p\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \\ &\times \left[ L_p\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) + 2L_{p-1}^{(1)}\left(\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \right] \\ &\times \frac{(2 - \rho^2 \sin 2\theta - \rho^2) \cos^2 \theta}{\rho^2 - 1} \rho^3 d\rho d\theta = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

类似地,由(13)式可得  $z=0$  面处  $y$  方向的曲率及交叉曲率分别为

$$\frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} = 0. \quad (19)$$

利用(3)(6)(8)和(14)式,得到非傍轴矢量 LG 光束的远场发散角分别为

$$\tan^2 \theta = \tan^2 \theta_x = \tan^2 \theta_y = \frac{1}{4\pi\lambda^2 f^4 P} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{mp} \int_0^1 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \frac{2 - \rho^2}{(1 - \rho^2)^{3/2}} \rho^{x_{m_1+m_2}+3} d\rho, \quad (20)$$

$$\tan^2 \theta_{xy} = \frac{4\pi^2 w_0^4}{4\pi^2 \lambda^2 f^4 P} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p F_{mp} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2}\right) \frac{\cos\theta \sin\theta (1 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)^{3/2}} \rho^{x_{m_1+m_2}+3} d\rho d\theta = 0. \quad (21)$$

把(16—19)式及(21)式代入(12)式,则(12)式简化为

$$W^2(z) = W_i^2(0) + z^2 \tan^2 \theta_i \quad (i = x, y). \quad (22)$$

(22)式表明,基于二阶矩定义的非傍轴矢量 LG 光束的束腰宽度随传输距离  $z$  的变化满足双曲线变化规律.

将(8)(15)和(20)式作级数展开,经繁冗的积分,得到非傍轴矢量 LG 光束的束腰和远场发散角分别为

$$\begin{aligned} W^2(0) &= W_x^2(0) = W_y^2(0) \\ &= \frac{\lambda^2}{8\pi^2 f^4 Q_1 (2H_u - H_{u+1})} Q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [8f^2(1 + 2m_2 + 8m_2^2)H_u \\ & - \mathcal{X}(1 + 2f^2 + 4m_2f^2)H_{u+1} \\ & + H_{u+2} - 32f^4m_2^2H_{u-1}], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= \tan^2 \theta_x = \tan^2 \theta_y \\ &= \frac{Q_2(2H_{u+1} - H_{u+2})}{Q_1(2H_u - H_{u+1})}, \end{aligned} \quad (24)$$

式中  $u = n + m_1 + m_2$ ,

$$Q_1 = \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(p!)(-1/2f^2)^{m_1+m_2}}{2^{2n}(n!)(p-m_1)(p-m_2)(m_1!)(m_2!)}, \quad (25)$$

$$Q_2 = \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(p!)(-1/2f^2)^{m_1+m_2}}{2^{2n-1}(n!)(p-m_1)(p-m_2)(m_1!)(m_2!)}, \quad (26)$$

$$H_u = \int_0^1 \rho^u \exp\left(-\frac{\rho}{2f^2}\right) d\rho = u(2f^2)^{u+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2f^2}\right) \sum_{s=0}^u \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{2f^2}\right)^s\right]. \quad (27)$$

根据(23)(24)式和  $M^2$  因子定义<sup>[10]</sup>, 得到非傍轴矢量 LG 光束的  $M^2$  因子为

$$M_x^2 = M_y^2 = \frac{\{Q_1[8f^2(1 + 2m_2 + 8m_2^2)H_u - \mathcal{X}(1 + 2f^2 + 4m_2f^2)H_{u+1} + H_{u+2} - 32f^4m_2^2H_{u-1}]\}^{1/2}}{2\sqrt{2}f^2\{Q_2(2H_{u+1} - H_{u+2})\}^{1/2}Q_1(2H_u - H_{u+1})}. \quad (28)$$

(23)(24)和(28)式为本文所得主要解析结果, 为非傍轴矢量 LG 光束参数的二阶矩表示式。(28)式表明, 初始圆偏振的非傍轴矢量 LG 光束在  $x, y$  方向上的  $M^2$  因子相等. 在非傍轴情形下,  $M^2$  因子不仅与模指数  $p$  有关, 而且还与  $w_0/\lambda$  有关. 此外, 尽管(23)(24)式写为无穷级数形式, 但收敛很快, 数值

计算表明, 一般  $n$  取至 10 项左右就可得到与直接积分(15)和(20)式一致的结果.

作为本文所得公式的特例, 在(23)(24)和(28)式中令  $p = 0$ , 得到矢量非傍轴高斯光束的束腰宽度、远场发散角及  $M^2$  因子分别为

$$W_G^2(0) = W_{G_x}^2(0) = W_{G_y}^2(0) = \frac{\lambda^2}{2f^2\pi^2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \left[4H_n - 2\left(1 + \frac{1}{2f^2}\right)H_{n+1} + \frac{1}{2f^2}H_{n+2}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2H_u - H_{u+1})}{2^{2n}(n!)^2}}, \quad (29)$$

$$\tan^2 \theta_G = \tan^2 \theta_{G_x} = \tan^2 \theta_{G_y} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2H_{n+1} - H_{n+2})}{2^{2n-1}(n!)^2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2H_n - H_{n+1})}{2^{2n}(n!)^2}}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} M_G^2 = M_{G_x}^2 = M_{G_y}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}f} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left[4H_n - 2\left(1 + \frac{1}{2f^2}\right)H_{n+1} + \frac{1}{2f^2}H_{n+2}\right] \right]^{1/2} \\ &\times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2H_{n+1} - H_{n+2})}{2^{2n}(n!)^2} \right]^{1/2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2H_u - H_{u+1})}{2^{2n}(n!)^2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

(29—31)式与文献[11]中的(22—24)式是一致的.

### 3. 数值计算和分析

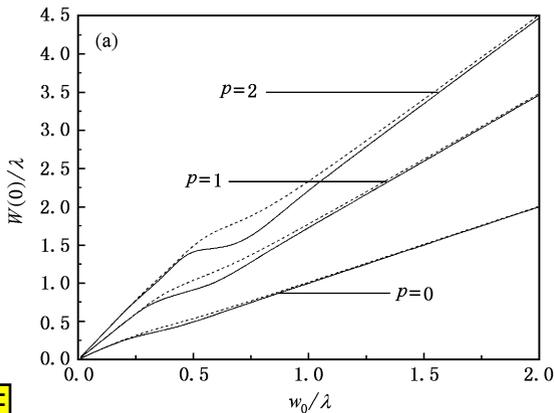
图 1(a)和(b)给出非傍轴矢量 LG 光束在自由空间非傍轴传输时, 归一化束腰宽度  $W(0)/\lambda$  和远场发散角  $\theta$  随  $w_0/\lambda$  变化的曲线. 图中实线表示非傍轴矢量 LG 光束, 虚线表示按非傍轴标量光束的二

阶矩理论<sup>[8]</sup>计算出的非傍轴标量 LG 光束结果. 当  $p = 0$  时, 对应于非傍轴矢量高斯光束. 由图 1(a)可以看出, 束腰宽度  $W(0)/\lambda$  与光束阶数  $p$  和  $w_0/\lambda$  有关. 当  $w_0/\lambda$  较小时, 例如在我们的计算例中取  $0.3 < w_0/\lambda < 1.0$ , 非傍轴矢量和标量束腰宽度的差异明显. 当  $w_0/\lambda$  较大时, 非傍轴矢量和标量束腰宽度趋于一致. 从图 1(b)可知, 当  $w_0/\lambda$  较大时, 非傍轴矢量和标量的远场发散角相等.  $w_0/\lambda$  越小, 远场发散

角越大,当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时,  $p = 0, 1$  和 2 的非傍轴矢量 LG 光束的最大远场发散角都趋于  $\theta_{\max} = 90^\circ$ , 这也可从 (24) 式中得到. 例如, 取  $p = 0$  和 1, 当  $w_0/\lambda \ll 1$  时, 取级数展开的前两项, 并略去高阶项后, 得到

$$\tan\theta = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{1}{w_0/\lambda} \right) \left[ 1 + \frac{2}{9} \pi^2 (w_0/\lambda)^2 \right] \quad (p = 0), \quad (32)$$

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{117}{7\pi^2}} \left( \frac{1}{w_0/\lambda} \right) \left[ 1 + \frac{50}{117} \pi^2 (w_0/\lambda)^2 \right] \quad (p = 1). \quad (33)$$



从 (32) (33) 式容易看出, 当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时,  $\theta_{\max} = 90^\circ$ . 但对非傍轴标量 LG 光束, 当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时, 远场发散角趋于  $\theta_{\max} = 63.435^\circ$ . 比较图 1(a) 和 (b) 可以看出, 在  $w_0/\lambda$  较小时, 非傍轴 LG 光束的矢量效应对束腰宽度的影响较小, 但对远场发散角的影响却十分显著. 原因在于, 标量理论中忽略了场的纵向分量 (即  $z$  分量) 对光场的贡献. 因此, 对于束宽为波长量级或发散角很大的光束, 必须考虑其矢量效应, 即场的纵向分量对光场的贡献不能忽略.

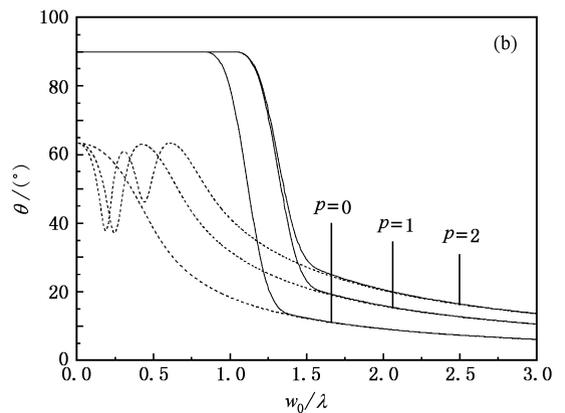


图 1  $p = 0, 1$  和 2 的 LG 光束的 (a) 归一化束腰宽度  $w(0)/\lambda$  和 (b) 远场发散角  $\theta$  随  $w_0/\lambda$  的变化 (实线和虚线分别表示非傍轴矢量和标量 LG 光束的  $w(0)/\lambda$  和  $\theta$ )

## 4. 结 论

本文使用非傍轴光束传输的矢量矩理论, 推导出了初始圆偏振非傍轴矢量圆对称 LG 光束的束宽、远场发散角和  $M^2$  因子的公式, 并表示为级数求和形式. 结果表明, 基于二阶矩定义的束宽在传输过程中满足双曲线变化规律. 当  $p = 0$  时, 退化为非傍轴矢量高斯光束的结果. 在  $w_0/\lambda$  较小时, 非傍轴 LG 光束的矢量效应对束腰宽度的影响较小, 但对远场发散角的影响十分显著. 因此, 对于束宽为波长量级或发散角很大的光束, 光场的纵向分量已不容忽视, 必须考虑其矢量效应对光场的贡献. 此外, 对非傍轴矢量 LG 光束和高斯光束 ( $p = 0$ ), 当  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  时, 远场发散角趋于渐近值  $\theta_{\max} = 90^\circ$ , 大于非傍轴标量理论给出的上限  $63.435^\circ$ . 值得注意的是, 因  $\tan 90^\circ \rightarrow \infty$ , 这会导致  $M^2$  因子的计算值很大, 而不能对非傍

轴矢量光束的光束质量给出正确的描述. 事实上, 即使对非傍轴标量光束, 使用二阶矩理论描述光束质量时, 也仅当  $w_0/\lambda$  在一定范围内才是适用的<sup>[8,9]</sup>. 另一方面, 对非傍轴矢量光束直观的分析 and 计算表明, 其远场发散角的最大值却小于  $90^\circ$ <sup>[16,17]</sup>. 因此, 尽管 Porras 建立的非傍轴光束传输的矢量矩和标量矩的形式理论在数学上是正确的, 但在物理上是否能对非傍轴光束的光束参数, 特别是远场发散角和  $M^2$  因子给出合乎实际情况的正确描述, 或者在什么物理条件下能给出正确描述, 则是一个值得讨论和解决的问题. 我们认为, 解决这个问题一个可能途径是针对性地开展非傍轴光束的实验, 和进行与实验结果相比较的理论计算和分析, 特别是专门设计在某些极限情况下, 例如  $w_0/\lambda < 1$ , 或称为高度非傍轴光束<sup>[18]</sup>的实验, 来修正现有理论, 或提出合乎实际需要的描述非傍轴光束质量的参数和相关理论.

- [ 1 ] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [ 2 ] Siegman A E 1998 *OSA TOPS* **17** 184
- [ 3 ] Laabs H 1998 *Opt. Commun.* **147** 1
- [ 4 ] Lezec H J, Degiron A, Devaux E *et al* 2002 *Science* **297** 820
- [ 5 ] Lu D Q, Hu W, Yang Z J *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1063 ( in Chinese ) [ 陆大全、胡 巍、杨振军等 2004 物理学报 **53** 1063 ]
- [ 6 ] Gao Z H, Lü B D 2005 *Chin. Phys.* **54** 5144
- [ 7 ] Cao Q, Deng X M, Guo H 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 897 ( in Chinese ) [ 曹 清、邓锡铭、郭 弘 1996 光学学报 **16** 897 ]
- [ 8 ] Porras M A 1999 *Optik* **110** 417
- [ 9 ] Kang X P, Lü B D 2005 *Optik* **116** 232
- [ 10 ] Porras M A 1996 *Opt. Commun.* **127** 9
- [ 11 ] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1572 ( in Chinese ) [ 周国泉 2005 物理学报 **54** 1572 ]
- [ 12 ] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4710 ( in Chinese ) [ 周国泉 2005 物理学报 **54** 4710 ]
- [ 13 ] Siegman A E 1986 *Lasers* ( Mill Valley California : University Science Books ) p644
- [ 14 ] Carter W H 1974 *Opt. Acta* **218** 71
- [ 15 ] Chen C C, Konkola P T, Ferrera J *et al* 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 404
- [ 16 ] Zeng X D 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1254 ( in Chinese ) [ 曾小东 1999 物理学报 **48** 1254 ]
- [ 17 ] Duan K L, Lü B D 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 1613
- [ 18 ] Ciattoni A, Crosignani B, Porto P D 2002 *Opt. Commun.* **202** 17

## The second-order moment representation of nonparaxial vectorial Laguerre-Gaussian beams \*

Kang Xiao-Ping<sup>1,2)</sup> Lü Bai-Da<sup>1)</sup>

1) ( *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China* )

2) ( *Department of Physics, Qiongzhou University, Wuzhishan 572200, China* )

( Received 3 August 2005 ; revised manuscript received 28 December 2005 )

### Abstract

Based on the nonparaxial vectorial moment theory of light beam propagation proposed by Porras, the characteristic parameters, such as the beam width, far-field divergence angle and  $M^2$  factor of nonparaxial vectorial Laguerre-Gaussian ( LG ) beams with initial circular polarization, are derived and expressed in terms of a series sum. The nonparaxial vectorial Gaussian beam is treated as a special case of our result. It is shown that the second-order-moment based beam width propagates according to the hyperbolic law, and for  $w_0/\lambda \rightarrow 0$  ( $w_0$ -waist width,  $\lambda$ -wavelength) the far-field divergence angle  $\theta$  approaches  $90^\circ$ , which is larger than  $63.435^\circ$  predicated by the nonparaxial scalar theory. The  $M^2$  factor of nonparaxial vectorial LG beams depends not only on the mode index  $p$ , but also on the  $w_0/\lambda$ . Finally, comparison between the propagation of nonparaxial vectorial LG beams and that of nonparaxial scalar LG beams indicates that the far-field divergence angle is greatly influenced by the vectorial effect when  $w_0/\lambda$  is relatively small. The problem which results from  $\theta \rightarrow 90^\circ$  and the applicability of the nonparaxial vectorial moment theory as well as the possible method for solving the problem are discussed.

**Keywords** : nonparaxial vectorial Laguerre-Gaussian ( LG ) beam, circular polarization, nonparaxial vectorial moment theory, beam parameter

**PACC** : 4200, 4210Q

\* Project supported by the National High Technology Development Program of China ( Grant No. A823070 ), the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10574097 ) and the Natural Science Foundation of Hainan Province ( Grant No. 80598 ).